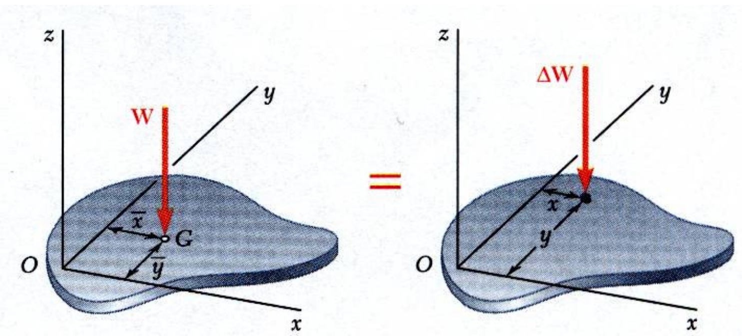
// Introdução

- A Terra exerce uma força de atracção em todas as partículas que compõem um corpo. Estas forças podem ser substituídas por uma única força igual ao peso do corpo e aplicada no *centro de gravidade* (ou *centro de massa*) do corpo.
- O centróide de uma área é análogo ao centro de massa de um corpo, mas refere-se ao centro geométrico do mesmo.

// Centro de massa e centróide de um corpo

Teorema de Varignon: "o momento em relação a um ponto O da resultante de várias forças concorrentes é igual à soma dos momentos das diversas forças em relação ao mesmo ponto O".

Os momentos de P relativamente aos eixos "y", "x", são iguais às somas dos momentos de cada força infinitesimal, relativamente aos respectivos eixos.



$$\sum M_y \quad \bar{x}W = \sum x\Delta W = \int x\,dW$$

$$\sum M_y \quad \bar{y}W = \sum y\Delta W = \int y\,dW$$

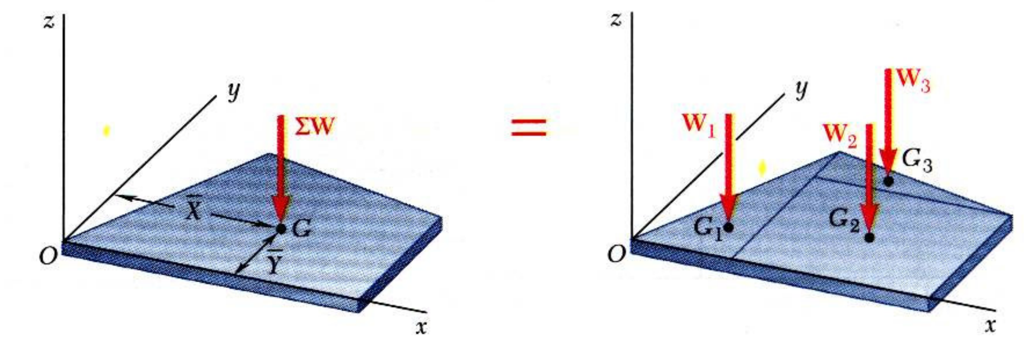
$$\bar{x}W = \int x\,dW$$

$$\bar{x}(\gamma A t) = \int x(\gamma t)\,dA$$

$$\bar{x}A = \int x\,dA = Q_y = \text{momento estático segundo } y$$

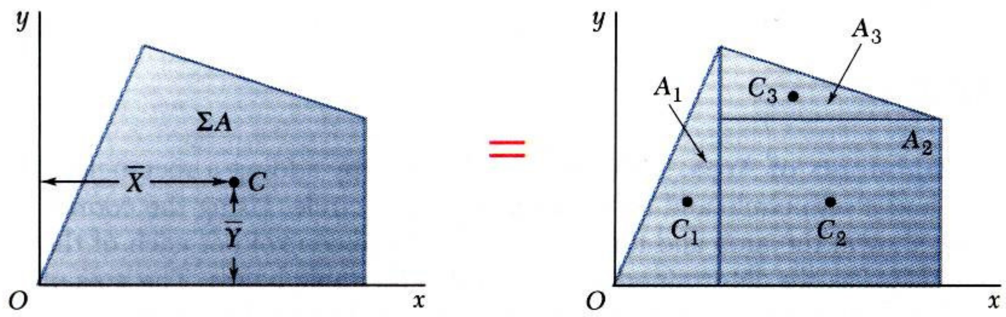
$$\bar{y}A = \int y\,dA = Q_x = \text{momento estático segundo } x$$

// Placas e áreas compostas



- Placas compostas

$$\bar{X}\sum W=\sum \bar{x}\,W$$
$$\bar{Y}\sum W=\sum \bar{y}\,W$$

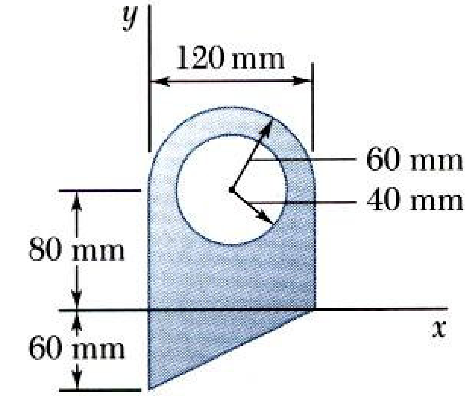


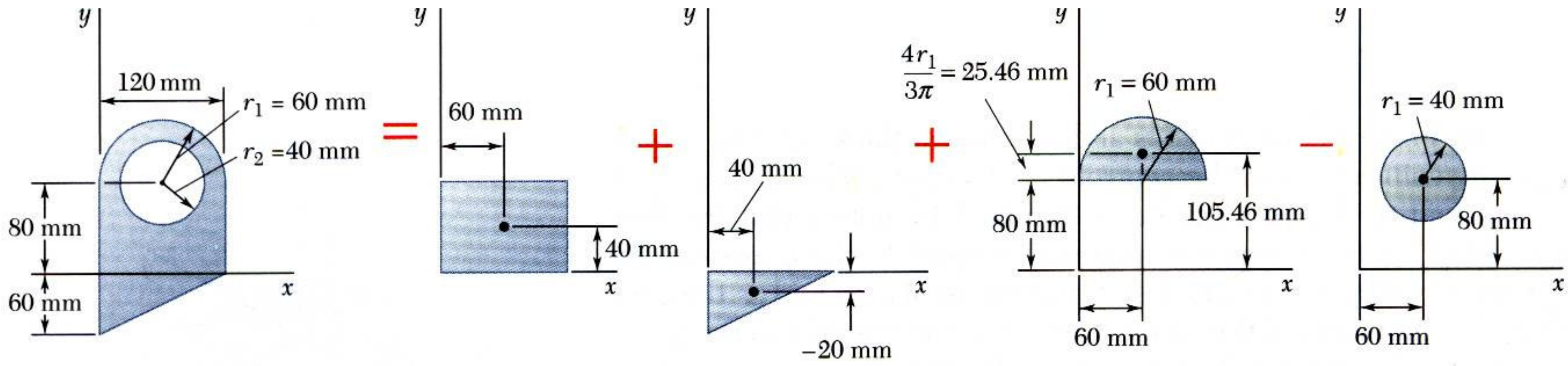
- Áreas compostas

$$\bar{X}\sum A=\sum \bar{x}\,A$$
$$\bar{Y}\sum A=\sum \bar{y}\,A$$

// Exemplo

- Para a placa mostrada, determine os momentos de primeira ordem segundo x e y e a localização do centróide.





Component	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

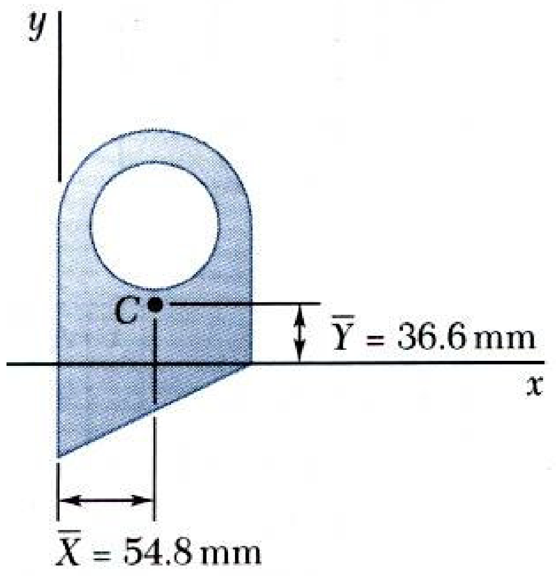
// Exemplo

- Os momentos estáticos são dados por,

$$Q_x = +506.2 \times 10^3 \, \text{mm}^3$$

$$Q_y = +757.7 \times 10^3 \, \text{mm}^3$$

- As coordenadas do centróide,



$$\overline{X} = \frac{\sum \bar{x} A}{\sum A} = \frac{+757.7 \times 10^3 \, \text{mm}^3}{13.828 \times 10^3 \, \text{mm}^2}$$

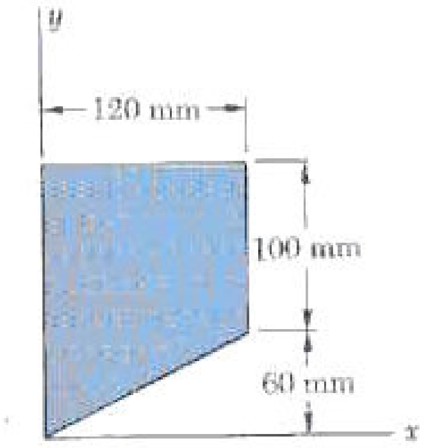
$$\overline{X} = 54.8 \, \text{mm}$$

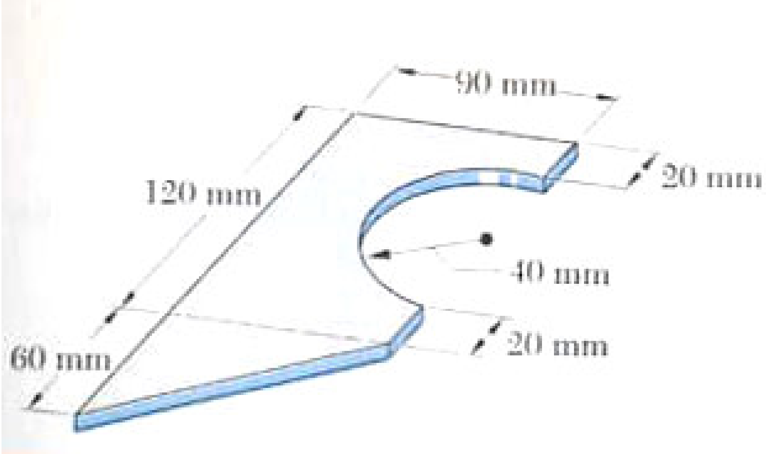
$$\overline{Y} = \frac{\sum \bar{y} A}{\sum A} = \frac{+506.2 \times 10^3 \, \text{mm}^3}{13.828 \times 10^3 \, \text{mm}^2}$$

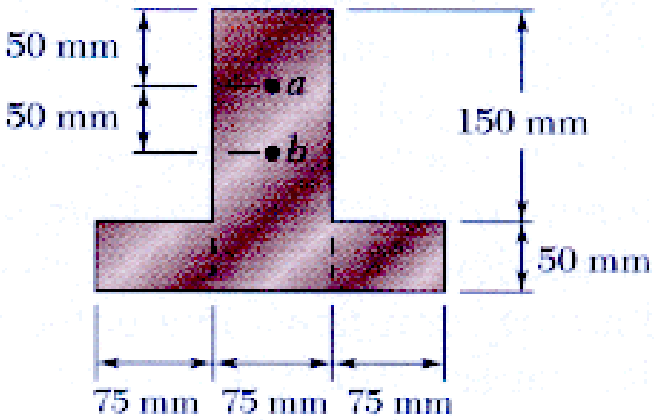
$$\overline{Y} = 36.6 \, \text{mm}$$

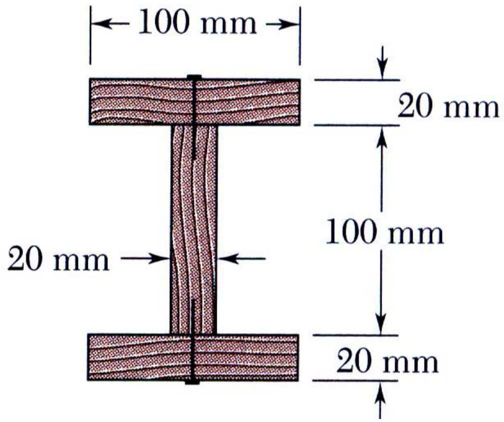
// Exercícios

Determine as coordenadas do centróide das seguintes secções.



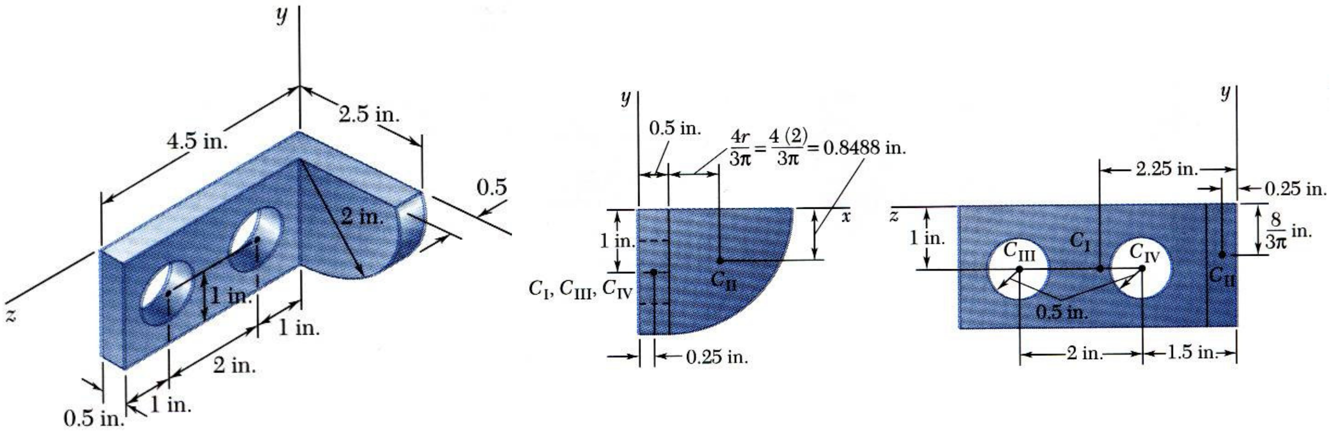




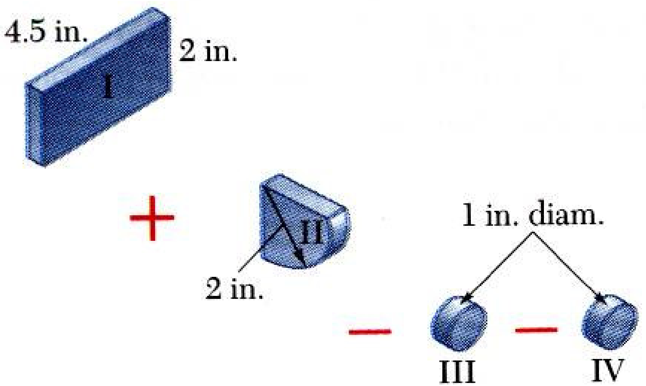


// Corpos compostos a 3D

- Determine o centro de gravidade do elemento de aço. Cada furo tem um diâmetro de 1in.



	V, in³	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{z}$, in.	$\bar{x}V$, in⁴	$\bar{y}V$, in⁴	$\bar{z}V$, in⁴
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	−1	2.25	1.125	−4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	−0.8488	0.25	2.119	−1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	−1	3.5	−0.098	0.393	−1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	−1	1.5	−0.098	0.393	−0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma\bar{x}V = 3.048$	$\Sigma\bar{y}V = -5.047$	$\Sigma\bar{z}V = 8.555$



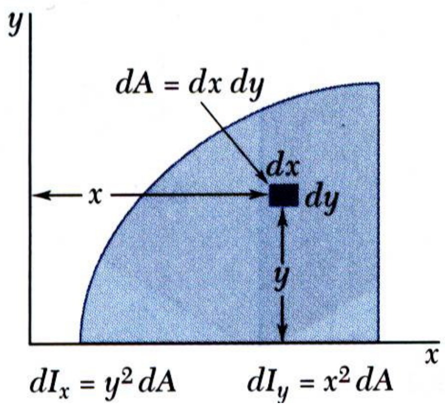
$$\bar{X} = \sum \bar{x}V / \sum V = \left(3.08\,\text{in}^4\right) / \left(5.286\,\text{in}^3\right) \qquad \bar{X} = 0.577\ \text{in.}$$

$$\bar{Y} = \sum \bar{y}V / \sum V = \left(-5.047\,\text{in}^4\right) / \left(5.286\,\text{in}^3\right) \qquad \bar{Y} = 0.577\ \text{in.}$$

$$\bar{Z} = \sum \bar{z}V / \sum V = \left(1.618\,\text{in}^4\right) / \left(5.286\,\text{in}^3\right) \qquad \bar{Z} = 0.577\ \text{in.}$$

// Momentos de Inércia

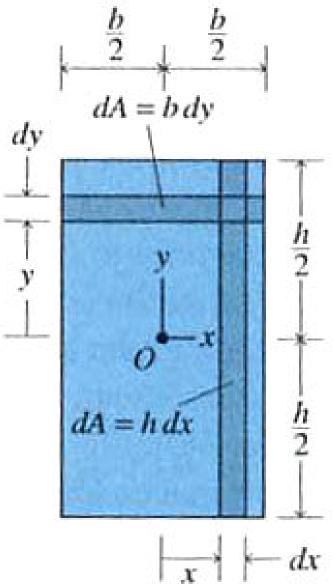
- Caracteriza ou quantifica e capacidade resistência dos elementos estruturais (ex. flexão de vigas)



Momentos de segunda ordem ou momentos de inércia segundo os eixos x e y.

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

// Cálculo do momento de inércia por integração



Para uma área rectangular,

$$dA = bdy$$

$$I_x = \int_{Area} y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 bdy$$

$$= \left[b\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

$$dA = hdx$$

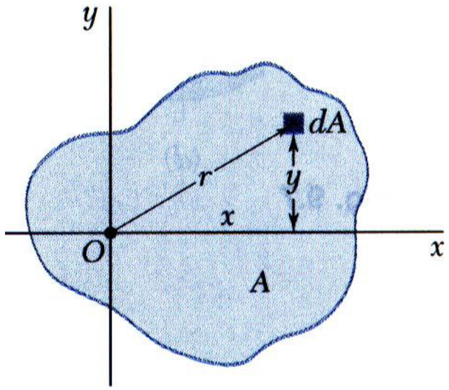
$$I_y = \int_{Area} x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 hdx$$

$$= \left[h\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{b^3 h}{12}$$

// Momento polar de inércia

- O momento polar de inércia é um parâmetro geométrico preponderante no dimensionamento de veios cilíndricos sujeitos à torção.

$$J_0 = \int r^2 dA$$



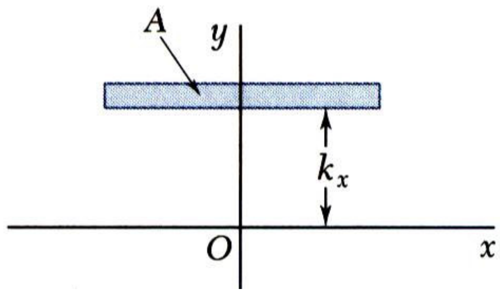
O momento polar de inércia de uma secção pode ser relacionado com os momentos de inércia.

$$J_0 = \int r^2 dA = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$
$$= I_y + I_x$$

// Raio de giração

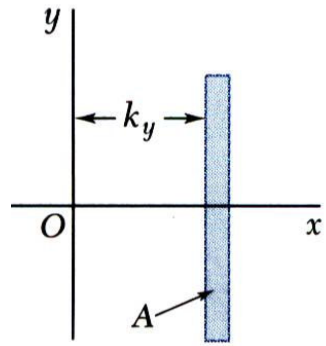
O raio de giração de uma área A, relativamente ao eixo x, é definido como a distância k_x, na qual se concentra uma faixa estreita paralela a x que produz o mesmo momento de inércia.

$$I_x = k_x^2 A \qquad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$



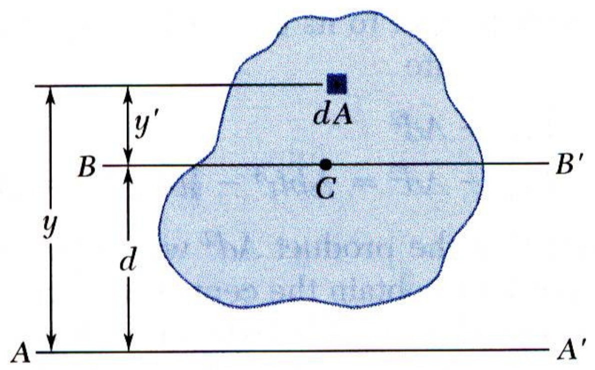
De igual modo,

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$



// Teorema de Steiner ou eixos paralelos

- O teorema dos Eixos Paralelos determina que o momento de inércia I de uma área relativamente a um eixo arbitrário AA' é igual ao momento de inércia I segundo o eixo que passa no centróide da área (BB') mais o produto da área pelo quadrado da distância entre eixos.



$$I = \bar{I} + Ad^2$$

Demonstração:

- Considere o momento de inércia *I* da área *A* segundo o eixo *AA'*, fornecido pela equação,

$$I = \int y^2 dA$$

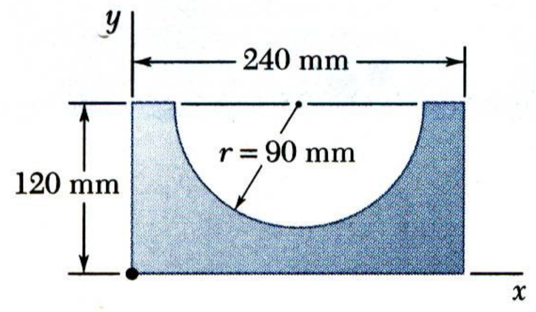
- Como o eixo *BB'* passa pelo centróide,

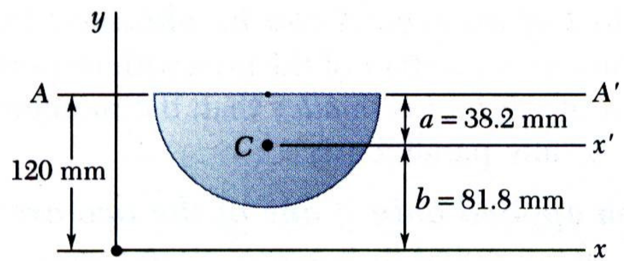
$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA$$
$$= \int y'^2 dA + 2d \cancel{\int y' dA} + d^2 \int dA$$

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad \textit{Teorema dos eixos paralelos}$$

// Exemplo

- Determine o momento de inércia segundo o eixo x.

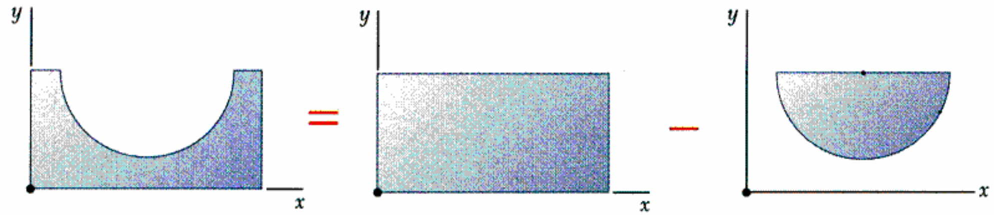




$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90)}{3\pi} = 38.2\ \text{mm}$$

$$\text{b} = 120 - \text{a} = 81.8\ \text{mm}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi(90)^2$$
$$= 12.72\times10^3\ \text{mm}^2$$



Rectângulo

$$I_x r = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}(240)(120) = 138.2\times10^6\ \text{mm}^4$$

Semi-circulo: Momento de inércia segundo *AA'*,

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{8}\pi r^4 = \tfrac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76\times10^6\ \text{mm}^4$$

Momento de inércia segundo *x'*,

$$\bar{I}_{x'} = I_{AA'} - Aa^2 = (25.76\times10^6)(12.72\times10^3)$$
$$= 7.20\times10^6\ \text{mm}^4$$

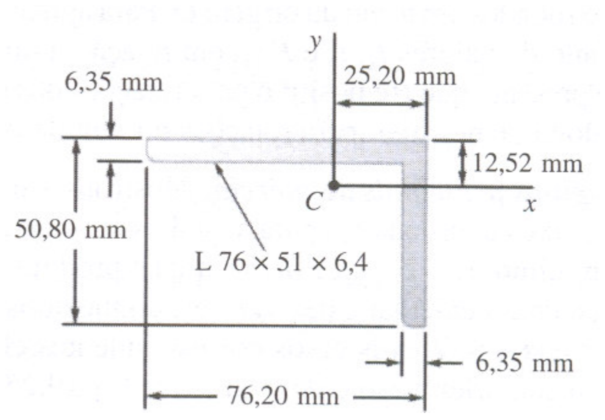
Momento de inércia segundo *x*,

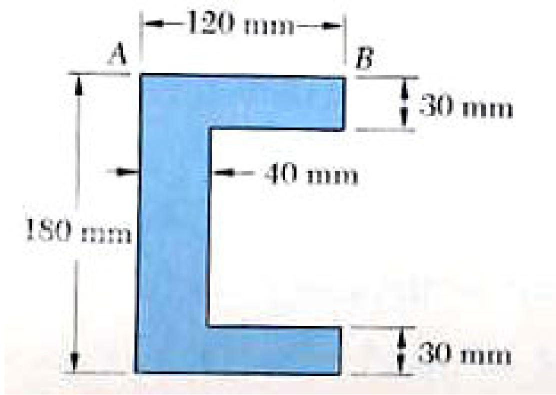
$$I_x c = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20\times10^6 + (12.72\times10^3)(81.8)^2$$
$$= 92.3\times10^6\ \text{mm}^4$$

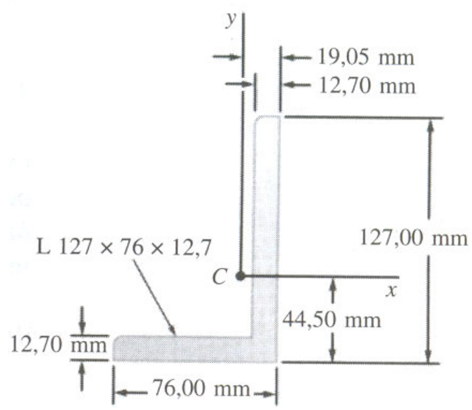
$$I_x total = I_x r - I_x c = 45.9\times10^6\ \text{mm}^4$$

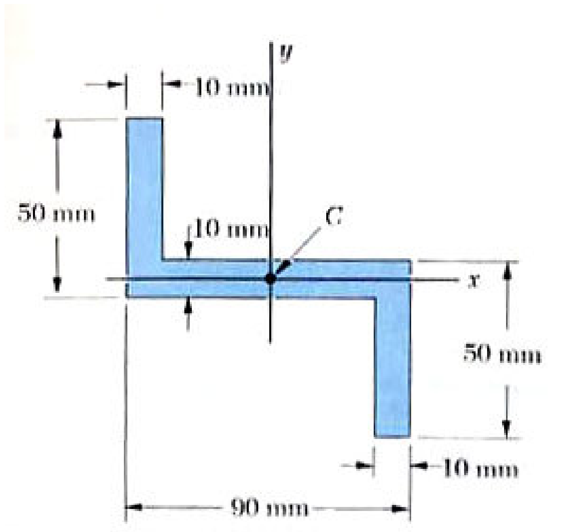
// Exercícios

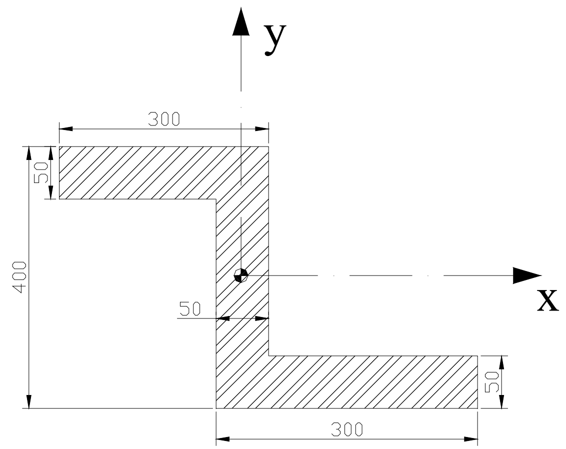
Determine os momentos de inércia segundo x e y.

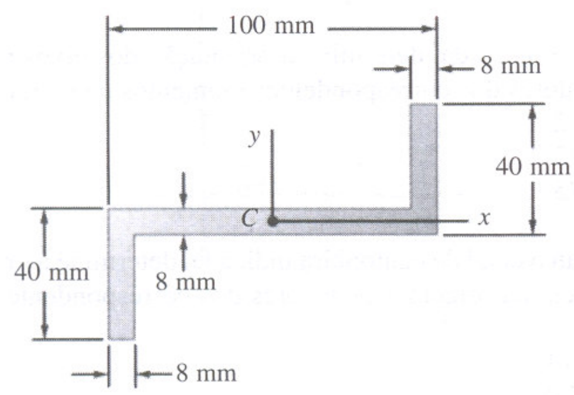






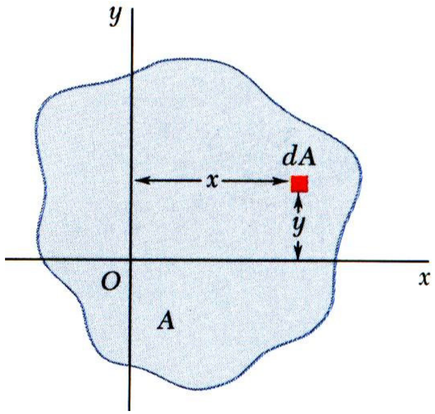






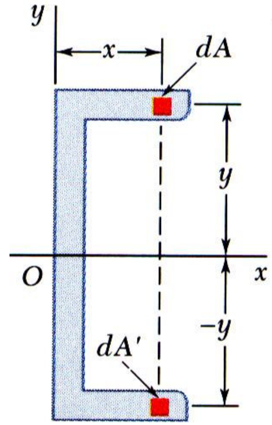
// Produto de inércia

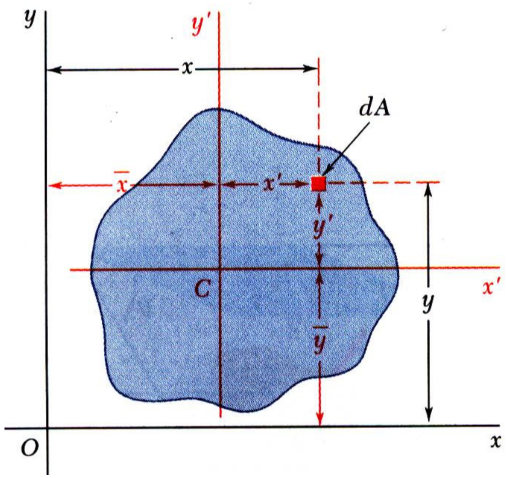
- O produto de inércia de uma superfície A relativamente ao eixos de coordenadas OXY, obtém-se multiplicando as coordenadas x e y pela superfície elementar dA e integrando ao longo do seu domínio;



$$P_{xy} = \int xy\, dA$$

Quando um eixo, x ou y, ou ambos são se simetria, o produto de inércia é nulo.



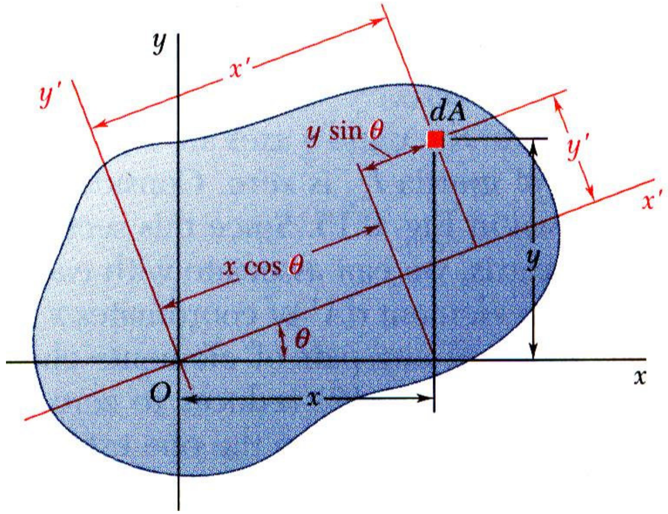


Teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia

$$P_{xy} = \overline{P}_{xy} + \overline{x}\,\overline{y}A$$

// Eixos principais e momentos principais de inércia

- Considere um novo eixo Ox'y' que sofreu uma rotação de θ segundo z relativamente ao eixo Oxy. Recorrendo às relações geométricas, podem-se definir os momentos de inércia e o produto de inércia do novo sistema de eixo em relação ao primeiro.



Sabendo: $I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$

$I_{xy} = \int xy\, dA$

Qual o momento de inércia segundo *x'* e *y'*?

Nota:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

- Para o novo sistema de eixos,

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

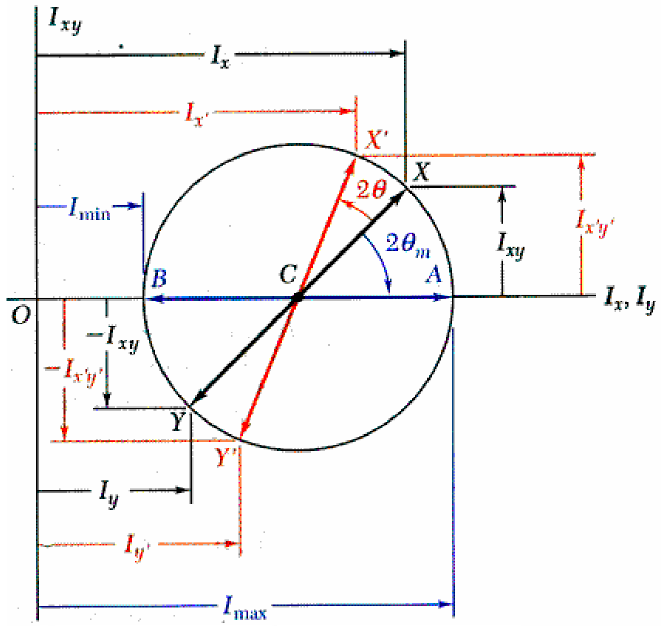
- As equações para $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ são as equações paramétricas de um circulo,

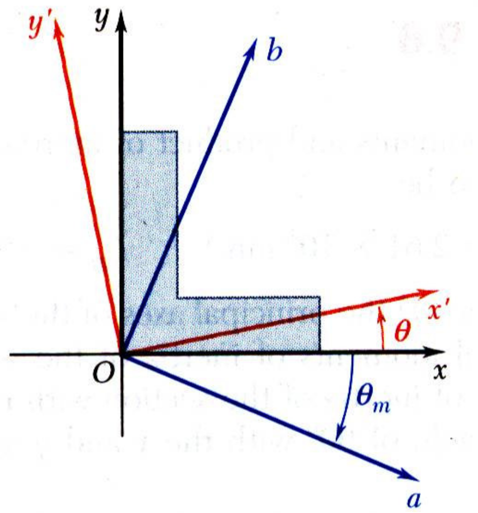
$$(I_{x'} - I_{med})^2 + P_{x'y'}^2 = R^2$$

$$I_{med} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) + P_{xy}^2}$$

// Eixos principais e momentos principais de inércia – Circulo de Mohr

- O círculo referido é designado de **Círculo de Mohr** para momentos e produtos de inércia.





- Nos pontos A e B, $I_{x'y'} = 0$ e $I_{x'}$ é máximo e mínimo, respectivamente.

$$I_{\max,\min} = I_{med} \pm R$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

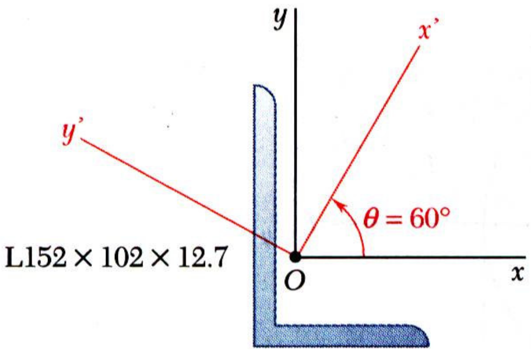
- A equação de θ_m define dois ângulos desfasados de 90º, correspondendo aos eixos principais.

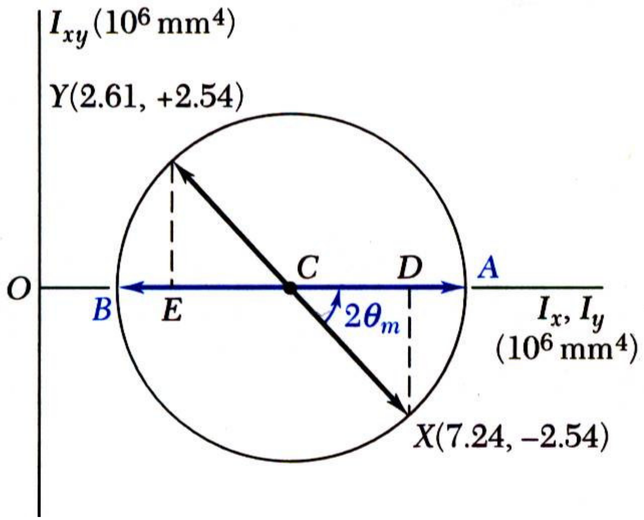
- I_{max} e I_{min} são os momentos principais de inércia.

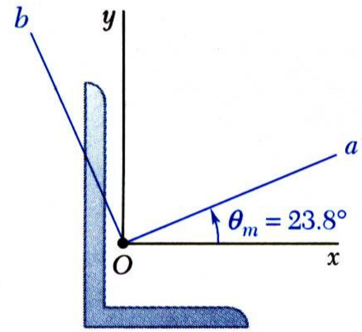
// Exemplo

- Considere a secção apresentada. Calcule os momentos principais de inércia e as direcções principais. Calcule o momentos de inércia e o produto de inércia segundo x'y'.

$I_x = 7.24 \times 10^6$ mm^4 $I_y = 2.61 \times 10^6$ mm^4 $P_{xy} = -2.54 \times 10^6$ mm^4.







Construção do circulo de Mohr

$$OC = I_{med} = \tfrac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) = 4.925 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

$$CD = \tfrac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) = 2.315 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = 3.437 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

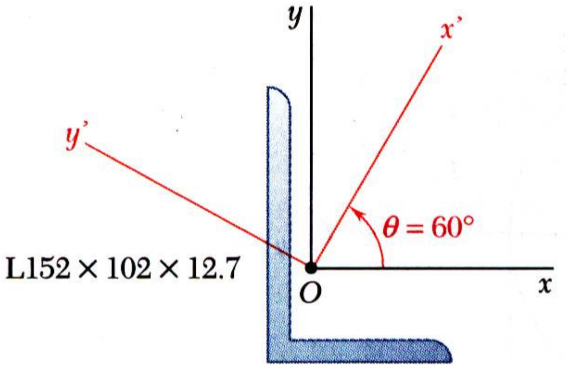
Com base no circulo,

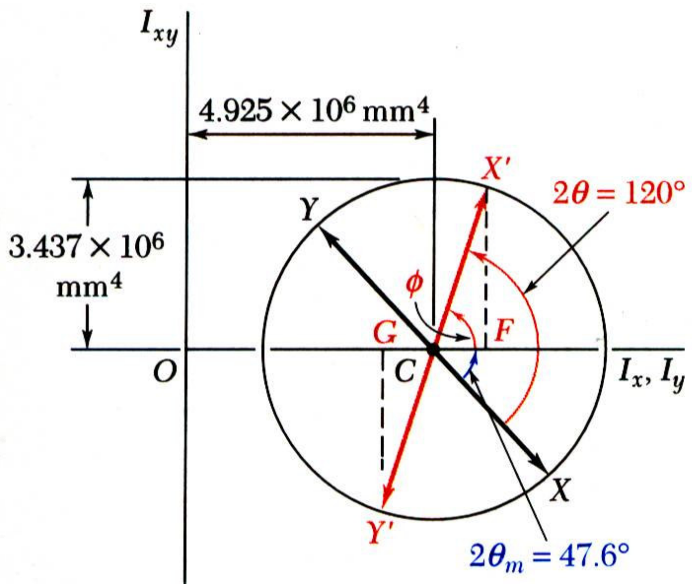
$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = 1.097 \quad 2\theta_m = 47.6° \quad \theta_m = 23.8°$$

$$I_{\max} = I_{med} + R \qquad I_{\max} = 8.36 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

$$I_{\min} = I_{med} - R \qquad I_{\min} = 1.49 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

// Exemplo





$$OC = I_{med} = 4.925\times10^{6}\,\text{mm}^{4}$$

$$R = 3.437\times10^{6}\,\text{mm}^{4}$$

- No circulo de Mohr a rotação é $\theta = 2(60^o) = 120^o$.
- O ângulo que CX' faz com a horizontal é $\phi = 120^o - 47.6^o = 72.4^o$.

$$I_{x'} = OF = OC + CX'\cos\varphi = I_{ave} + R\cos 72.4^o$$

$$I_{x'} = 5.96\times10^{6}\,\text{mm}^{4}$$

$$I_{y'} = OG = OC - CY'\cos\varphi = I_{ave} - R\cos 72.4^o$$

$$I_{y'} = 3.89\times10^{6}\,\text{mm}^{4}$$

$$I_{x'y'} = FX' = CY'\sin\varphi = R\sin 72.4^o$$

$$I_{x'y'} = 3.28\times10^{6}\,\text{mm}^{4}$$

// Exercícios

Determine os momentos de inércia de inércia e as direcções principais