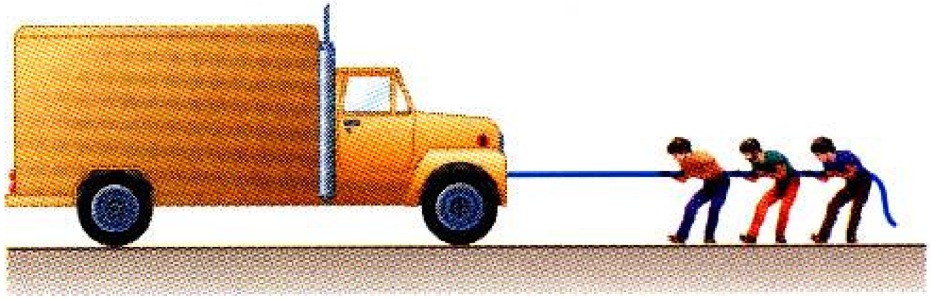
## // Introdução

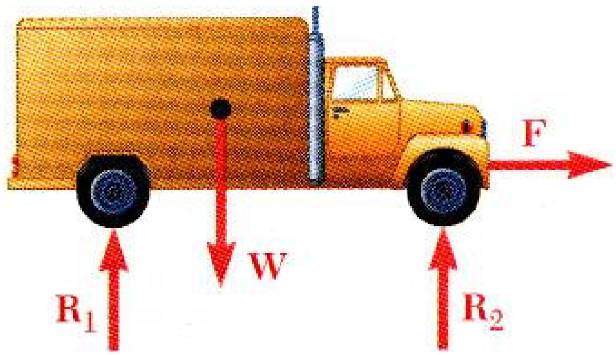
- Considerar um corpo como uma única partícula nem sempre é possível. Genericamente, a dimensão do corpo e o ponto de aplicação das cargas devem ser consideradas.

- Nesta secção será feito o estudo de forças aplicadas a um corpo rígido. Estudar-se-á a substituição de um dado sistema de forças por um sistema de forças equivalente mais simples, cálculo de produtos externos ou vectoriais e produtos internos ou escalares para a quantificação do momento de uma força em relação a um ponto e a um eixo.

*Forças exteriores* – representam a acção de outros corpos sobre o corpo rígido em análise. São representadas no DCL.



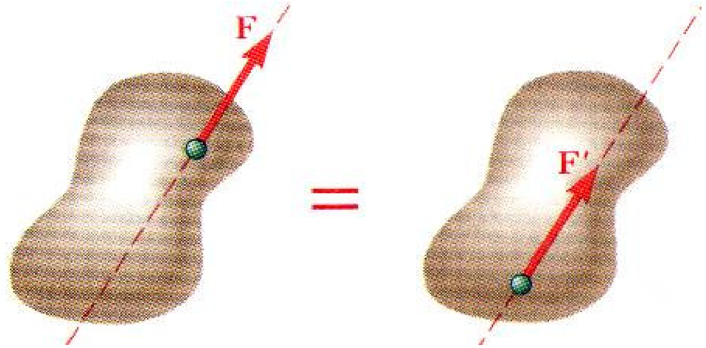
*Forças interiores* – mantêm unidas as diferentes partículas que constituem o corpo rígido.

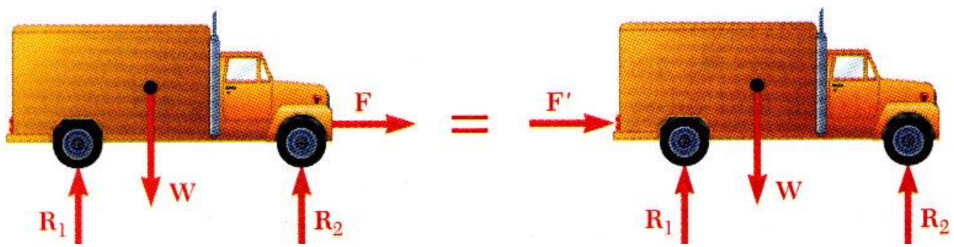


## // Princípio da Transmissibilidade

- O ponto de aplicação de uma força aplicada num corpo rígido não é relevante, mas sim a sua linha de acção.

- *Principio da transmissibilidade* – as condições de equilíbrio ou de movimento não se alteram com a deslocação de uma força ao longo da sua linha de acção.
- As forças F e F' são forças equivalentes.



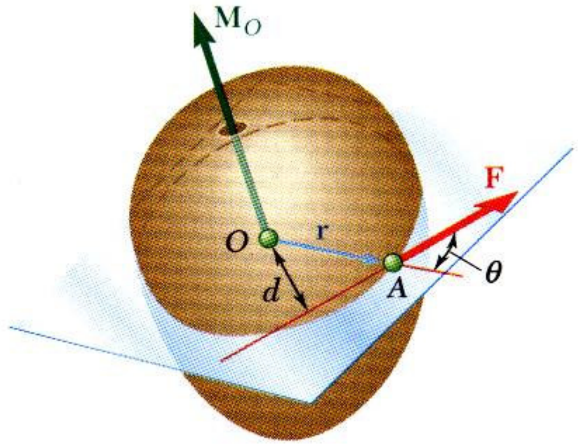




- A deslocação do ponto de aplicação da força F para o pára-choques traseiro não altera o movimento ou as restantes forças que actuam na carrinha.

## // Momento de uma força em relação a um ponto

Considere a força $\vec{F}$, definida pela intensidade, direcção e sentido, que actua num corpo rígido. O efeito que a força provoca no corpo rígido depende também do seu ponto de aplicação. Sendo o seu ponto de aplicação definido pelo vector $\vec{r}$, o momento da força $\vec{F}$ em relação ao ponto O será obtido pelo produto externo de $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

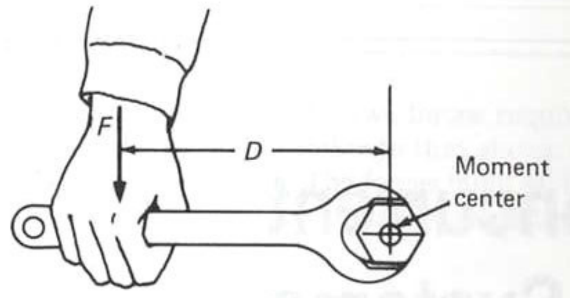
$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$



(a)

- O vector momento $\boldsymbol{M_O}$ é perpendicular ao plano que contém O e a força F.
- A intensidade de $\boldsymbol{M_O}$ mede a tendência da força provocar um movimento de rotação segundo o eixo do momento.

$$M_O = rF\sin\theta = Fd$$

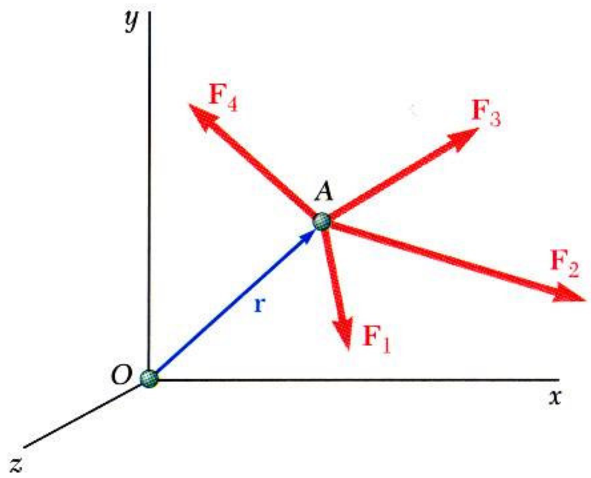



(b)

- O sentido é determinado pela regra da mão direita.

## // Teorema de Varignon (matemático Francês 1654-1722)

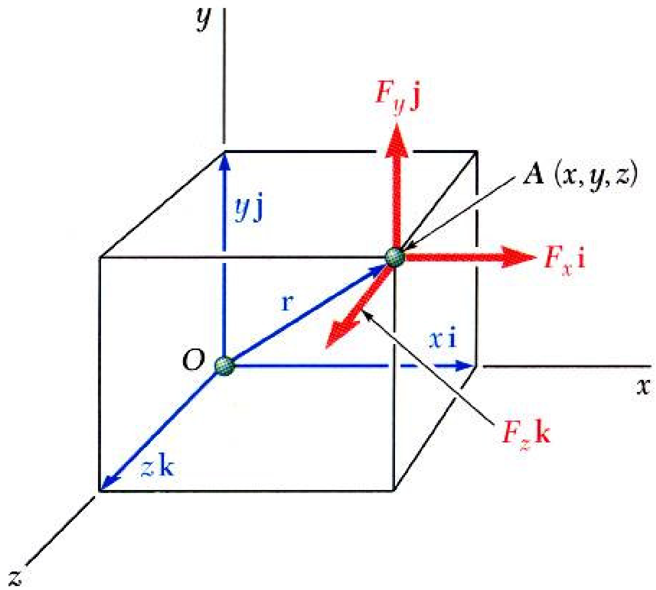
- "o momento em relação a um ponto O da resultante de várias forças concorrentes é igual à soma dos momentos das diversas forças em relação ao mesmo ponto O".




$$\vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots\right) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots$$

## // Componentes cartesianas do momento de uma força

O momento $\vec{M}_o$, em relação ao ponto O, produzido pela força $\vec{F}$, de componentes $F_x$, $F_y$ e $F_z$ aplicada no ponto A de coordenadas x, y e z, pode ser apresentado da seguinte forma:




$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

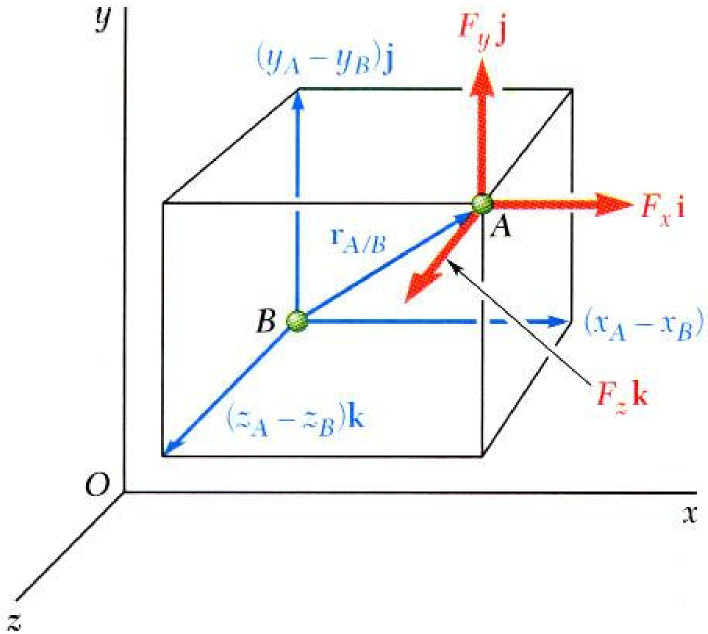
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

## // Componentes cartesianas do momento de uma força

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}$$

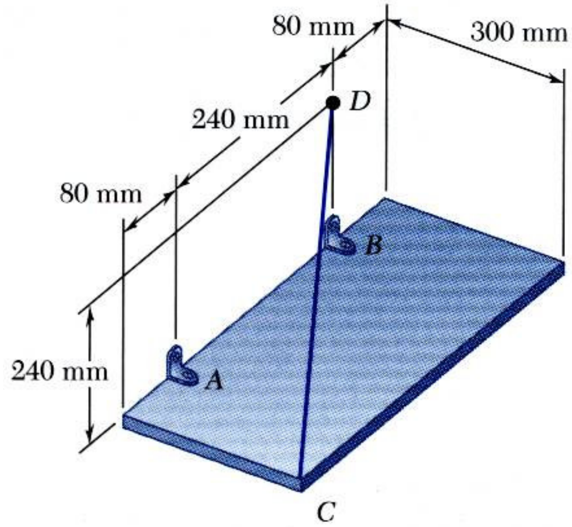



- O momento em relação ao ponto B é dado por,

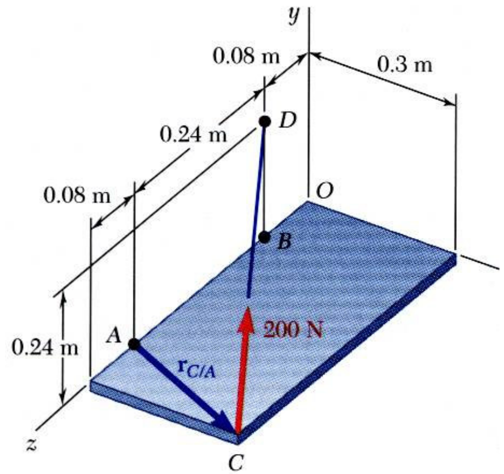
$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

## // Exemplo

Uma placa rectangular é apoiada em dois suportes em A e B, e suspensa por um fio CD. Sabendo que a força de tracção no fio vale 200N, calcule o momento em relação ao ponto A da força exercida pelo fio no ponto C.




$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

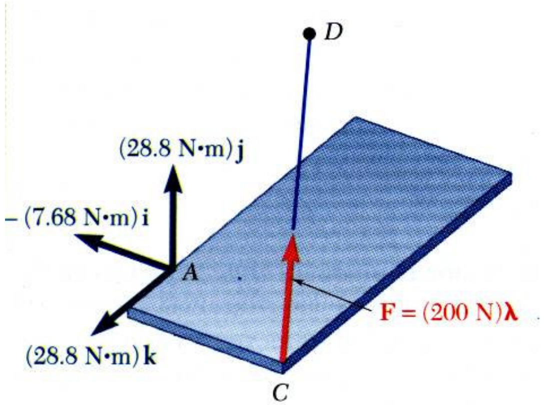



$$\vec{r}_{C/A} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (0.3\text{ m})\vec{i} + (0.08\text{ m})\vec{k}$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = (200\text{ N})\frac{\vec{r}_{D/C}}{r_{D/C}}$$

$$= (200\text{ N})\frac{-(0.3\text{ m})\vec{i} + (0.24\text{ m})\vec{j} - (0.32\text{ m})\vec{k}}{0.5\text{ m}}$$

$$= -(120\text{ N})\ \vec{i} + (96\text{ N})\vec{j} - (128\text{ N})\vec{k}$$




$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

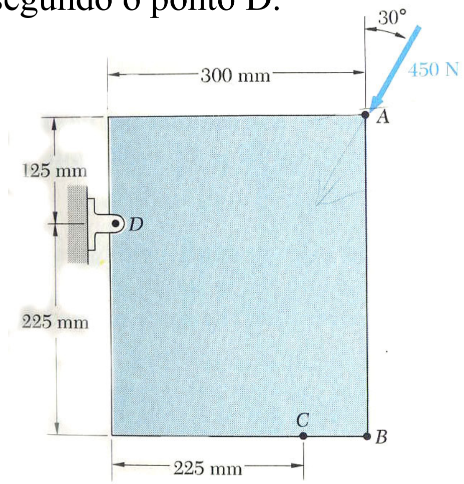
$$\vec{M}_A = -(7.68\text{ N}\cdot\text{m})\vec{i} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\vec{j} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$

# // Exercícios

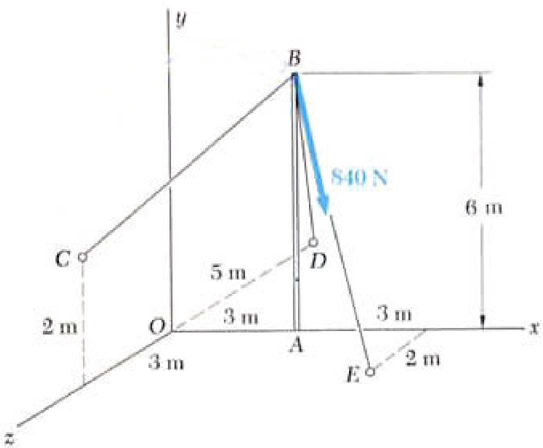
3.1- Uma força de 450N é aplicada em A. Determine,

a) o momento da força em relação ao ponto D.

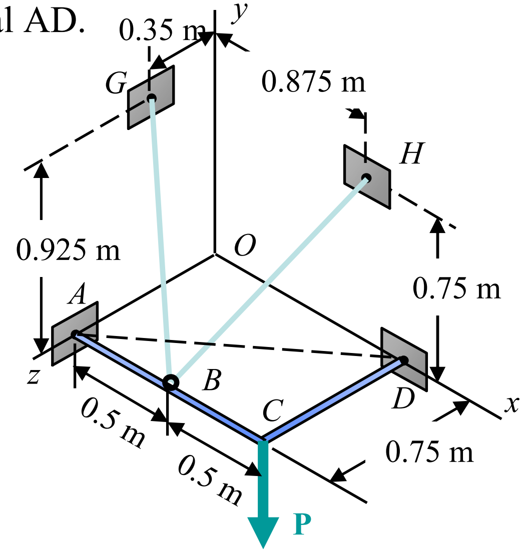
b) A menor força aplicada em B que produz o mesmo momento segundo o ponto D.



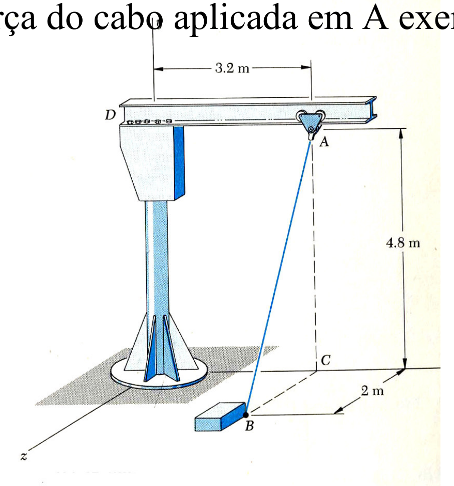

3.2- O poste AB de 6m de comprimento é suportada por três cabos. Determine o momento que a força do cabo BE no ponto B produz relativamente ao ponto C. a tensão do cabo BE é de 840N.




3.3- A barra ACD é articulada em A e D, sendo suportada por um cabo que passa num anel em B. sabendo que a tensão no cabo é de 450N, determine o momento que a componente da força BH do cabo exerce na diagonal AD.

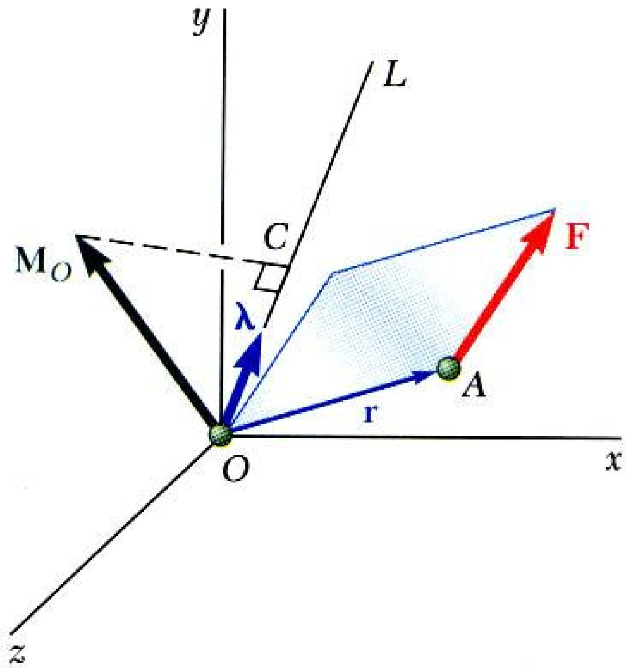



3.4- A viga DA encontra-se orientada segundo o eixo x. no instante ilustrado a tensão no cabo AB é de 13KN. Determine o momento que a força do cabo aplicada em A exerce no ponto D.



## // Momento de uma força em relação a um eixo

O momento de uma força $\vec{F}$ em relação a um eixo OL é definido como sendo a projecção do momento $\vec{M}o$ sobre OL, isto é, será o produto misto do versor $\underline{\lambda}$ pelo vector posição $\vec{r}$ e pela força $\vec{F}$.

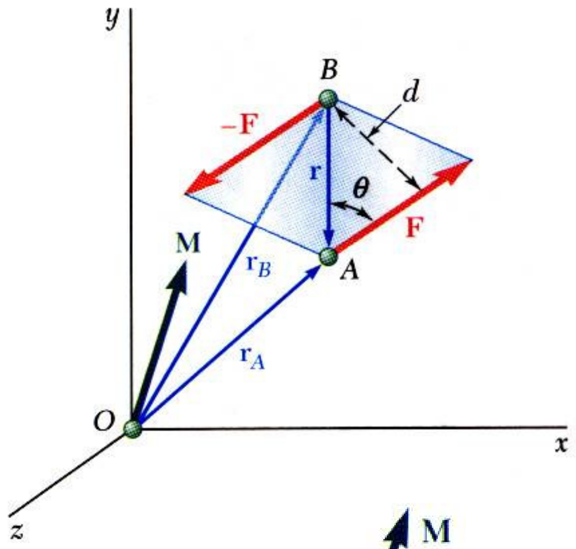



$$M_{OL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_{O} = \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$$

Significado físico: o momento $\vec{M}_{ol}$ de $\vec{F}$ em relação ao eixo OL mede a tendência da força $\vec{F}$ produzir no corpo rígido um movimento de rotação em torno do eixo fixo OL.

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

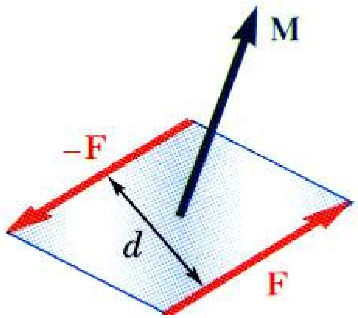
## // Momento de um binário



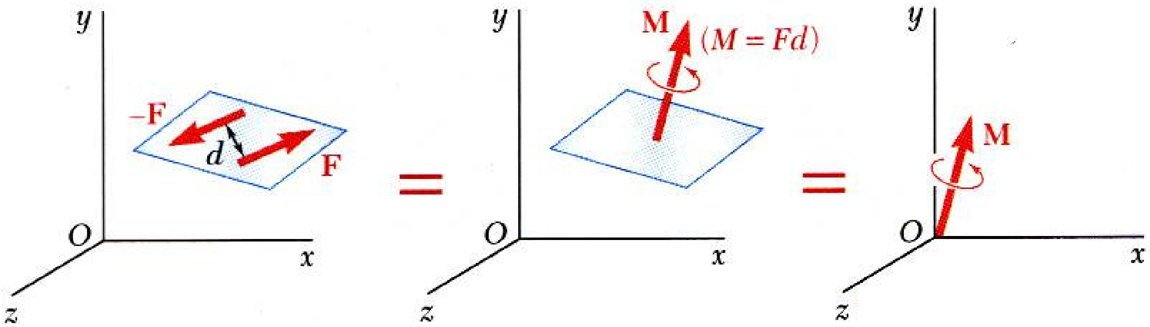

- Duas forças ***F*** e ***-F*** com a mesma intensidade, linhas de a paralelas e sentidos opostos formam um binário.

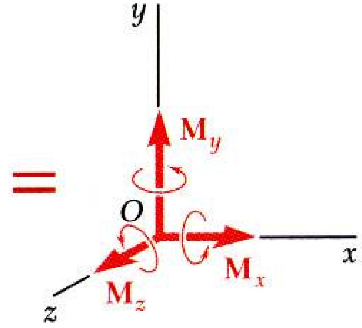
- Momento de um binário,

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}\right)$$
$$= \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F}$$
$$= \vec{r} \times \vec{F}$$
$$M = rF\sin\theta = Fd$$




- Os binários podem ser representados por vectores.

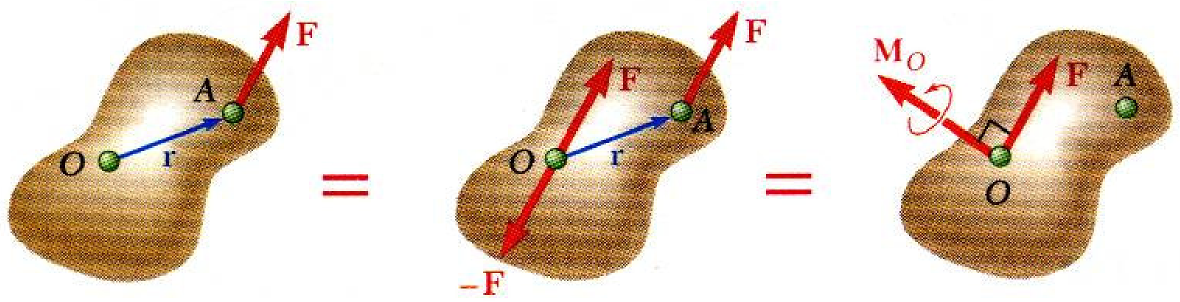


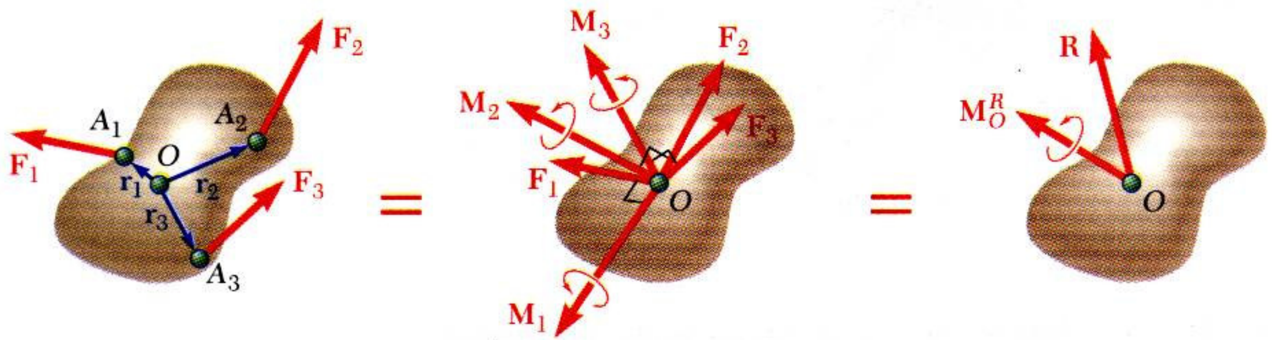

- Os binários são vectores livres, isto é, o ponto de aplicação não é significativo.

## // Redução de uma força a um Sistema Força/Binário

- Qualquer força **F** aplicada num ponto A de um corpo rígido pode ser substituído por um sistema força/binário num ponto arbitrário O.




- Um conjunto de forças aplicadas num corpo rígido pode ser substituído por vários sistemas força/binário num ponto O.

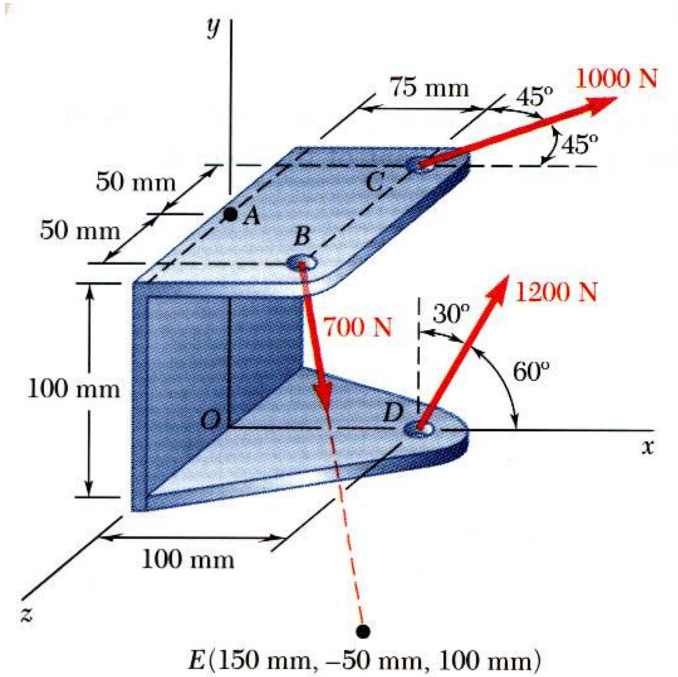



- As forças e os binários podem ser combinados para formarem um único sistema força/binário resultante.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \qquad \vec{M}_O^R = \sum \left( \vec{r} \times \vec{F} \right)$$

## // Exemplo

Três cabos são ligados ao apoio mostrado. Substitua as forças por um sistema força binário equivalente em A.




Solução:

- Vectores posição em relação a $A$.

$$\vec{r}_{B/A} = 0.075\vec{i} + 0.050\vec{k}\ (\mathrm{m})$$

$$\vec{r}_{C/A} = 0.075\vec{i} - 0.050\vec{k}\ (\mathrm{m})$$

$$\vec{r}_{D/A} = 0.100\vec{i} - 0.100\vec{j}\ (\mathrm{m})$$

Componentes cartesianas das forças

$$\vec{F}_B = (700\ \mathrm{N})\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{E/B}}{r_{E/B}} = \frac{75\vec{i} - 150\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0.429\vec{i} - 0.857\vec{j} + 0.289\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k}\ \ (\mathrm{N})$$

$$\vec{F}_C = (1000\ \mathrm{N})\left(\cos 45\vec{i} - \cos 45\vec{k}\right)$$

$$= 707\vec{i} - 707\vec{k}\ \ (\mathrm{N})$$

$$\vec{F}_D = (1200\ \mathrm{N})\left(\cos 60\vec{i} + \cos 30\vec{j}\right)$$

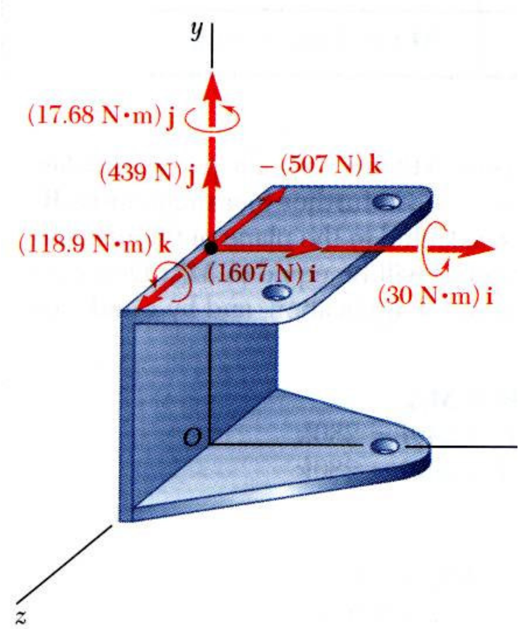
$$= 600\vec{i} + 1039\vec{j}\ \ (\mathrm{N})$$

// **Exemplo**

- A força resultante será,

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$
$$= (300 + 707 + 600)\vec{i} + (-600 + 1039)\vec{j} + (200 - 707)\vec{k}$$

$$\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\vec{j} - 507\vec{k} \ \ (\mathrm{N})$$




- Binário Equivalente,

$$\vec{M}_A^R = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$$

$$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 45\vec{k}$$

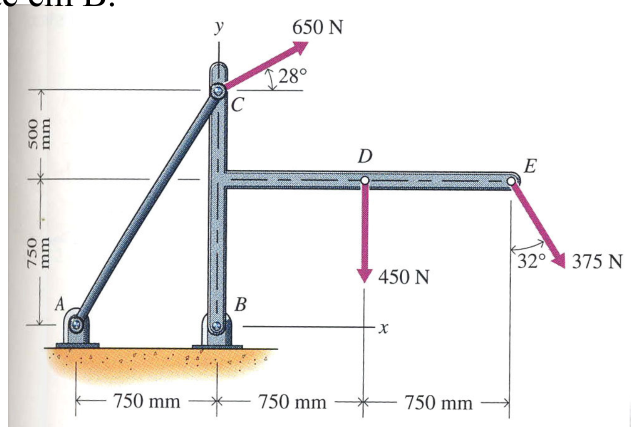
$$\vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\vec{j}$$

$$\vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\vec{k}$$

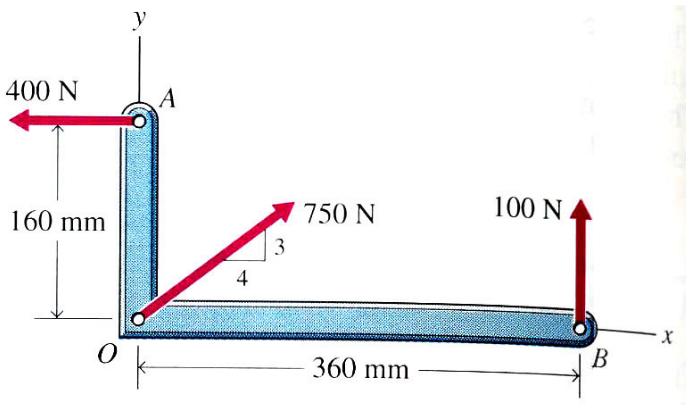
$$\vec{M}_A^R = 30\vec{i} + 17.68\vec{j} + 118.9\vec{k}$$

# // Exercícios

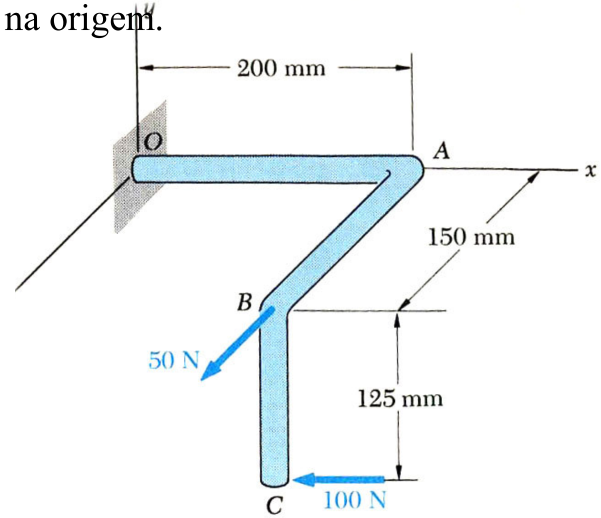
3.5- Substitua as três forças por um sistema força binário equivalente em B.




3.6- Substitua as três forças por um sistema força binário equivalente em A.




3.7- Substitua as três forças por um sistema força binário equivalente na origem.




3.8- Para a viga apresentada, substitua as forças por um sistema força binário equivalente em A. b) um sistema força binário equivalente em B. c) uma única força resultante.

Nota: não considere as força dos apoios.