// Equilíbrio de um sistema de partículas

- O objectivo deste capítulo é estudar o efeito das forças aplicadas em partículas ou pontos materiais.
  - Substituir um conjunto de forças por uma única força equivalente, designada por força resultante.
  - Relações entre as forças que actuam numa partícula que se encontra em equilíbrio.

Fazendo uso da 1ª Lei de Newton:

"se a resultante de todas as forças que actuam numa partícula é nula, então a partícula está em equilíbrio"
Sendo a resultante nula, no espaço bidimensional,

$$\vec{R} = \sum \left(Fxi + Fyj \right) = \vec{0}$$

Esta equação vectorial dá origem a duas equações escalares, pelo que, para uma partícula permanecer em equilíbrio basta que:

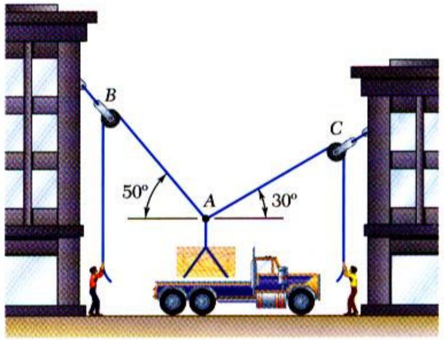
$$\sum Fx = 0 \qquad \sum Fy = 0$$

// Diagrama de corpo livre - DCL

Na prática, os problemas em engenharia derivam de casos físicos reais, que podem ser esquematizadas e por vezes simplificados.

O diagrama de corpo livre consiste em isolar a partícula/corpo ou conjunto de corpos que se pretende analisar e identificar todas as forças aplicadas ou resultantes do contacto com outros corpos.

Esboço do problema a estudar



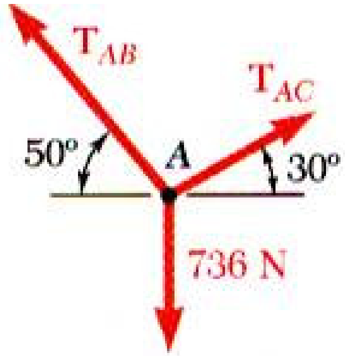
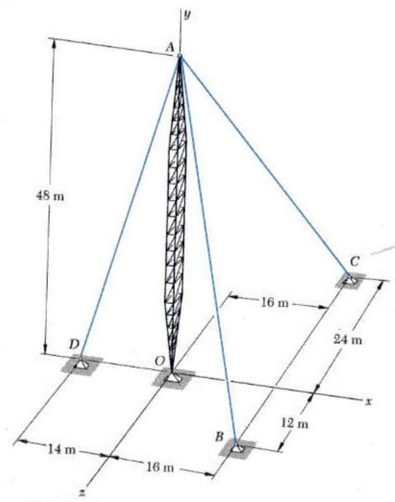
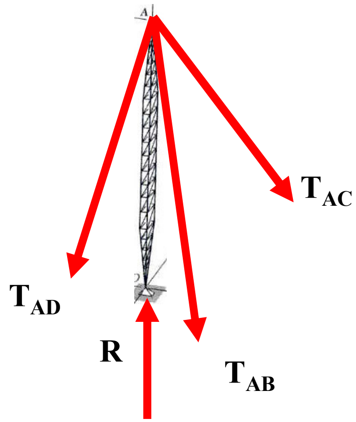


Diagrama de corpo livre da partícula a analisar

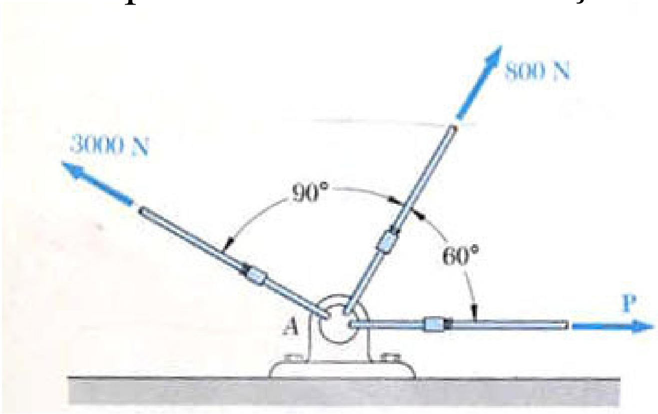




O DCL deve conter a orientação e a intensidade das forças conhecidas

// Exemplo de aplicação

Sabendo que a intensidade da força P é de 4000 N, determine a resultante das três forças aplicadas em A.



Usando as condições de equilíbrio estático para resolver o problema,

$$\sum F_x = R_x \qquad \sum F_y = R_y$$

As componentes são:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_x \\ &= +4000\text{ N} + 800\text{ N}\cos\left(60^\circ\right) + 3000\text{ N}\cos\left(150^\circ\right) \\ &= 1801.924\text{ N} \end{aligned}$$

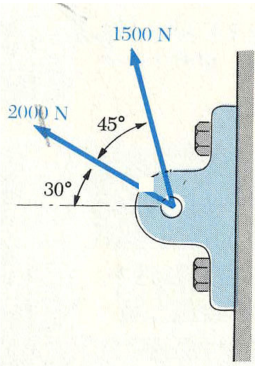
$$\begin{aligned} R_y &= \sum F_y \\ &= +800\text{ N}\sin\left(60^\circ\right) + 3000\text{ N}\sin\left(150^\circ\right) \\ &= 2192.82\text{ N} \end{aligned}$$

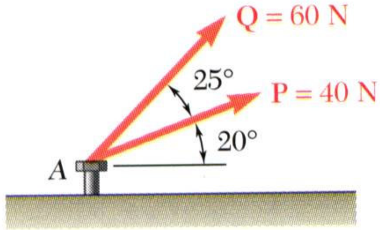
A resultante é:

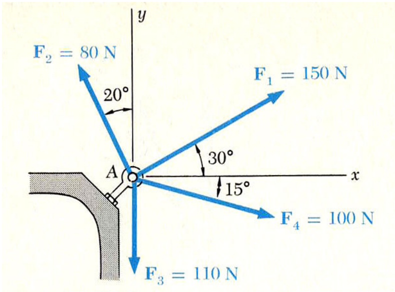
$$\begin{aligned} |R| &= \sqrt{\left(1801.924\text{ N}\right)^2 + \left(2192.82\text{ N}\right)^2} \\ &= 2838.2\text{ N} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{2192.82\text{ N}}{1801.924\text{ N}}\right) = 50.59^\circ \end{aligned}$$

// Exercícios

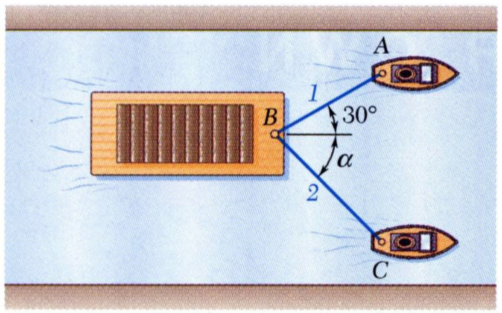
2.1- Determine a intensidade e a direcção da resultante das forças aplicadas.







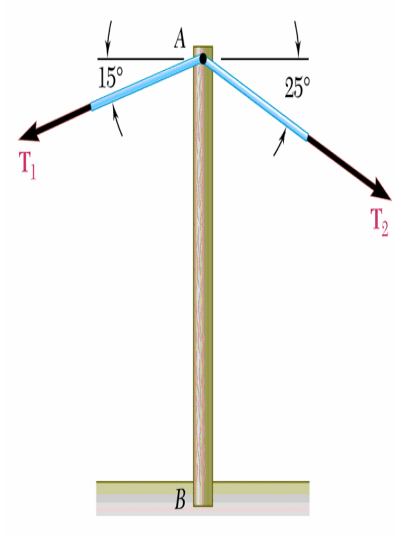
2.2- Uma jangada é puxada por dois rebocadores. Num determinado instante a tensão no cabo AB é de 4500N e a tensão no cabo BC é 2000N. Determine a intensidade e a direcção da resultante das forças aplicadas em B nesse instante.



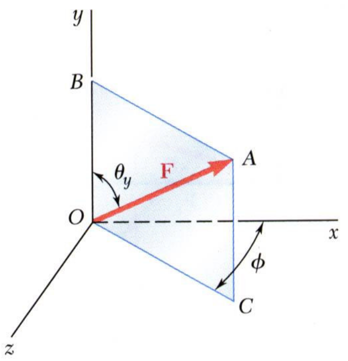
2.3- Um cabo de telefone está preso em A ao mastro AB. Sabendo que a força de tracção instalada na parte esquerda do cabo é T1=3,56KN, determine;

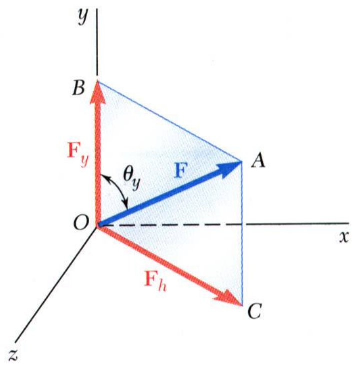
a) A força de tracção T2 requerida na parte direita do cabo, pretendendo-se que a resultante R das forças exercidas pelo cabo em A seja vertical.

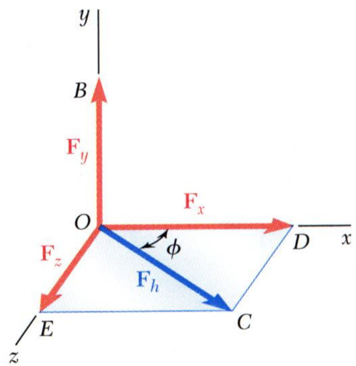
b) A correspondente intensidade de R.



// Componentes cartesianas no espaço tridimensional







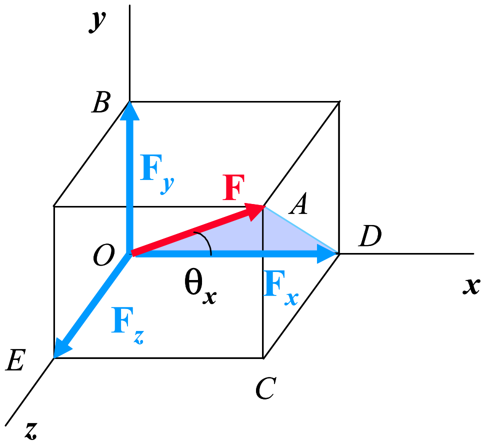
- Considere o vector $\vec{F}$ contido no plano *OBAC*.
- As componentes horizontal e vertical são:

$$F_y = F\cos\theta_y \quad F_h = F\sin\theta_y$$

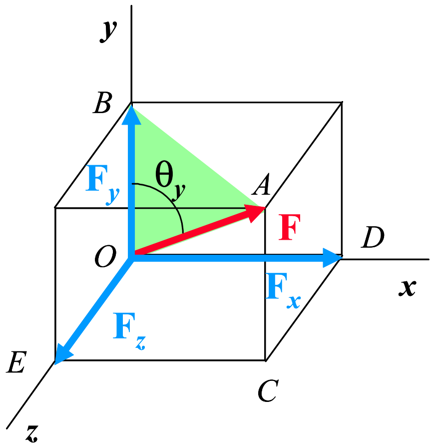
As componentes de F_h são:

$$F_x = F_h\cos\phi$$
$$= F\sin\theta_y\cos\phi$$
$$F_y = F_h\sin\phi$$
$$= F\sin\theta_y\sin\phi$$

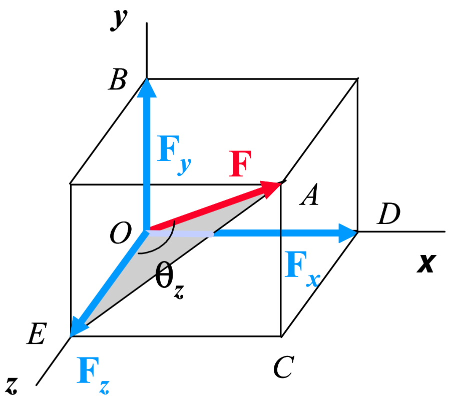
Trabalhando com os ângulos definidos pela força e o semi-eixo positivo:



$F_x = F\cos\theta_x$



$F_y = F\cos\theta_y$



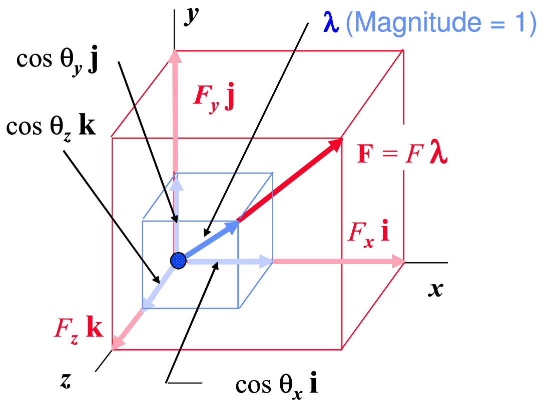
$F_z = F\cos\theta_z$

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F\,(\cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j} + \cos\theta_z\,\mathbf{k})$$

// Componentes cartesianas no espaço tridimensional

Os co-senos de θ_x, θ_y e θ_z são conhecidos como ***Co-senos Directores*** da força **F**.



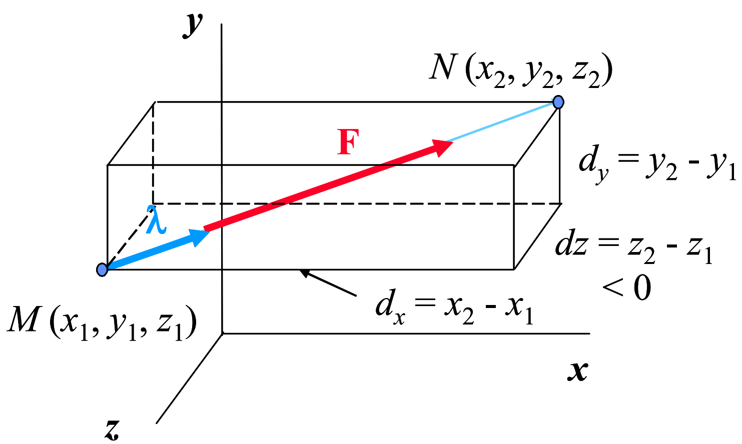
$$\mathbf{F} = F\,\boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j} + \cos\theta_z\,\mathbf{k}$$

Como a intensidade do versor $\boldsymbol{\lambda}$ é unitário tem-se que:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

Uma força a três dimensões é definida pela sua intensidade e por dois pontos da sua linha de acção:



$$\overrightarrow{MN} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$$

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

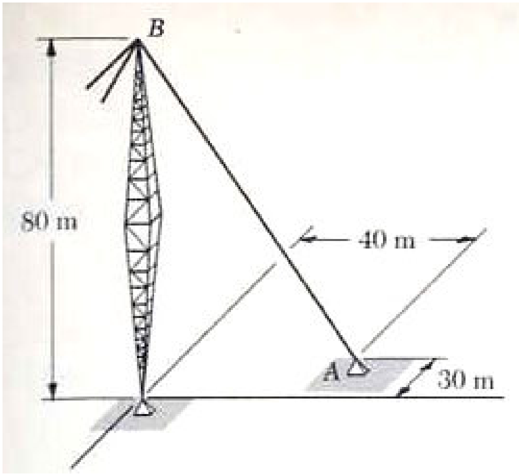
$$\vec{F} = F\vec{\lambda}$$

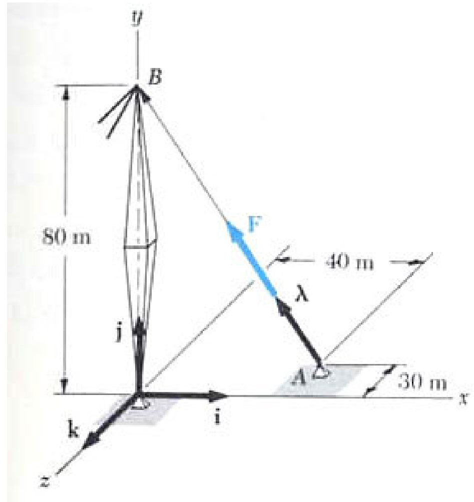
$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}\left(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}\right)$$

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

// Exemplo

Uma espia de uma torre está ancorada num parafuso em A. A força de tracção instalada na espia é de 2500N. determine, a) as componentes Fx, Fy, Fz da força actuante no parafuso, b) os ângulos θx, θy, θz que definem a direcção da força.





a)

A intensidade de d é

$$|\mathrm{d}| = \sqrt{(-40\text{ m})^2 + (80\text{ m})^2 + (30\text{ m})^2} = 94.34\text{ m}$$

O versor é dado por

$$\vec{d} = 94.34\text{ m}\left(\frac{-40\text{ m}}{94.34\text{ m}}\vec{i} + \frac{80\text{ m}}{94.34\text{ m}}\vec{j} + \frac{30\text{ m}}{94.34\text{ m}}\vec{k}\right) = 94.34\text{ m}\left(-0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}\right)$$

$$\vec{\lambda} = -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

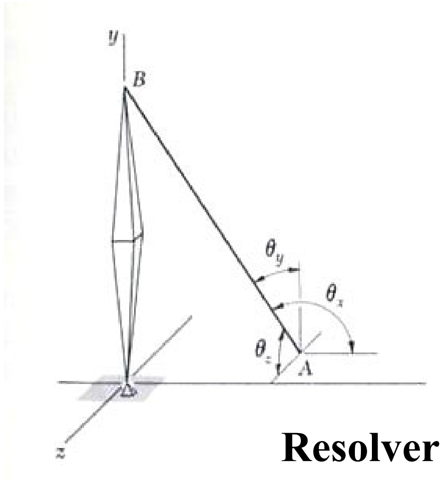
A intensidade da força é 2500 N, pelo que o vector é definido por

$$\vec{F} = |\mathrm{F}|\vec{\lambda} = 2500\text{ N}\left(-0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}\right) = -1060\text{ N }\vec{i} + 2120\text{ N }\vec{j} + 795\text{ N }\vec{k}$$

Fx = -1060 N, Fy = 2120 N e Fz = 795 N.

b) Os ângulos são:

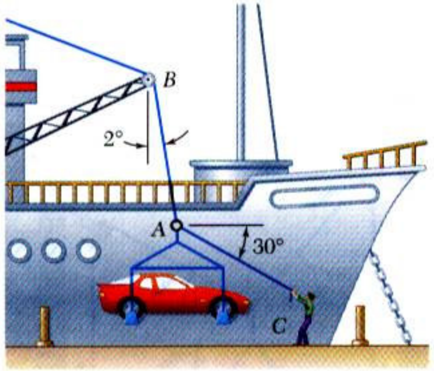
$$\cos\theta_x = -0.424 \Rightarrow \theta_x = 2.009\text{ rad or }115.1^\circ$$
$$\cos\theta_y = 0.848 \Rightarrow \theta_y = 0.559\text{ rad or }32.0^\circ$$
$$\cos\theta_z = 0.318 \Rightarrow \theta_z = 1.247\text{ rad or }71.5^\circ$$



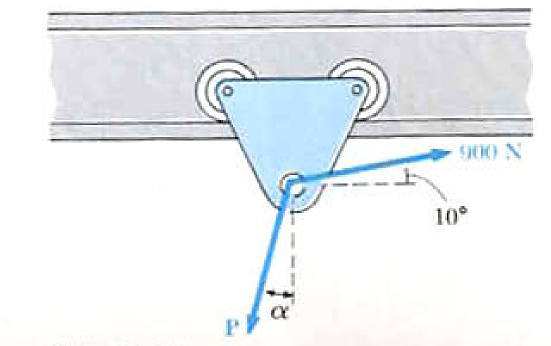
Resolver E2.7

// Exercícios

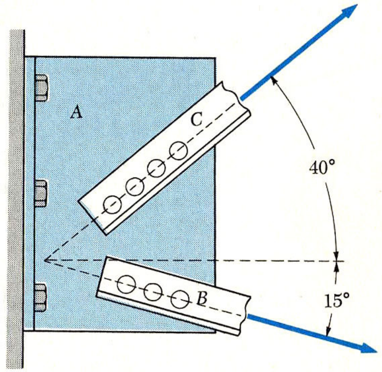
2.4-Numa operação de descarga de um navio, um automóvel de 15000 N é suportado por um cabo. Uma corda ligada ao cabo em A está a ser puxada de modo a centrar o automóvel na posição pretendida. Qual a força de tracção instalada na corda?



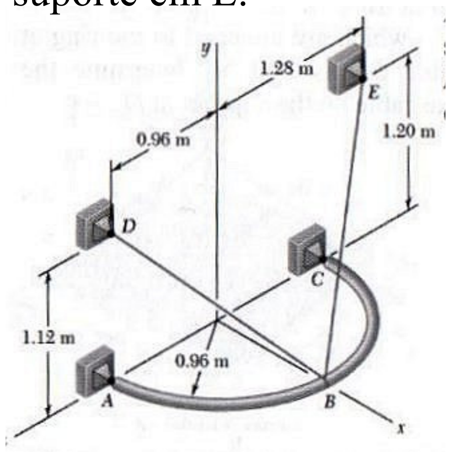
2.5-Determine a intensidade e direcção de P de modo que a resultante de P e da força de 900 N seja uma força vertical de 2700 N direccionada para baixo.



2.6-Dois elementos estruturais B e C estão ligados ao apoio metálico A. Sabendo que a força de tracção em B é de 6 KN e em C é de 10 KN, determine a intensidade e a direcção da força resultante que actua no apoio metálico.



2.7- Uma barra de aço é dobrada num anel semi-circular de raio 0.96m, sendo suportada pelos cabos BD e BE ligados ao anel em B. Sabendo que a tensão no cabo BE é de 250N, determine as componentes da força exercida pelo cabo no suporte em E.

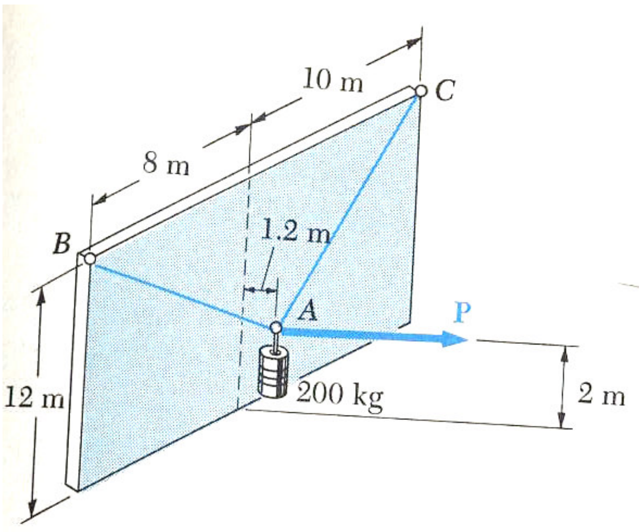


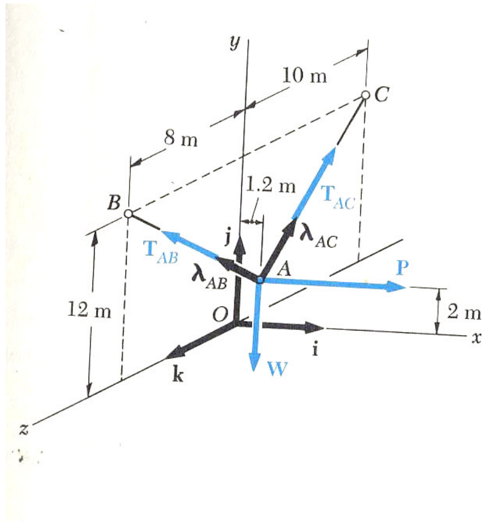
// Equilíbrio de um ponto material em 3D

No espaço tridimensional, as condições de equilíbrio estático são:

$$\sum Fx = 0 \qquad \sum Fy = 0 \qquad \sum Fz = 0$$

Um cilindro de 200Kg é pendurado por meio de dois cabos, AB e AC, amarrados no topo de uma parede vertical. Uma força P, horizontal e perpendicular à Parede, mantém o peso na posição indicada. Determine a intensidade e a tracção em cada cabo.



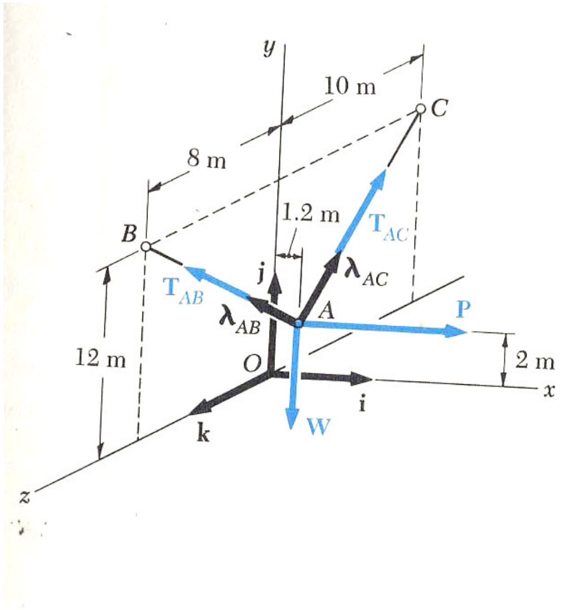


$$W = -mg\,\vec{j} = -(200\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)\,\vec{j}$$

$$= -1962\text{ N}\,\vec{j}$$

$$P = P\,\vec{i}$$

// Exemplo



O vector AB é:

$$d_x = -1.2 \text{ m}$$
$$d_y = 12 \text{ m} - 2 \text{ m} = 10 \text{ m}$$
$$d_z = 8 \text{ m}$$

$$\overrightarrow{AB} = -1.2 \text{ m}\,\vec{i} + 10 \text{ m}\,\vec{j} + 8 \text{ m}\,\vec{k}$$
$$\left|AB\right| = \sqrt{(-1.2 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2 + (8 \text{ m})^2} = 12.86 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|AB\right|} = \frac{-1.2 \text{ m}}{12.86 \text{ m}}\,\vec{i} + \frac{10 \text{ m}}{12.86 \text{ m}}\,\vec{j} + \frac{8 \text{ m}}{12.86 \text{ m}}\,\vec{k}$$
$$= -0.0933\,\vec{i} + 0.778\,\vec{j} + 0.622\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{T_{AB}} = T_{AB}\lambda_{AB}$$
$$= -0.0933T_{AB}\,\vec{i} + 0.778T_{AB}\,\vec{j} + 0.622T_{AB}\,\vec{k}$$

O vector AC é:

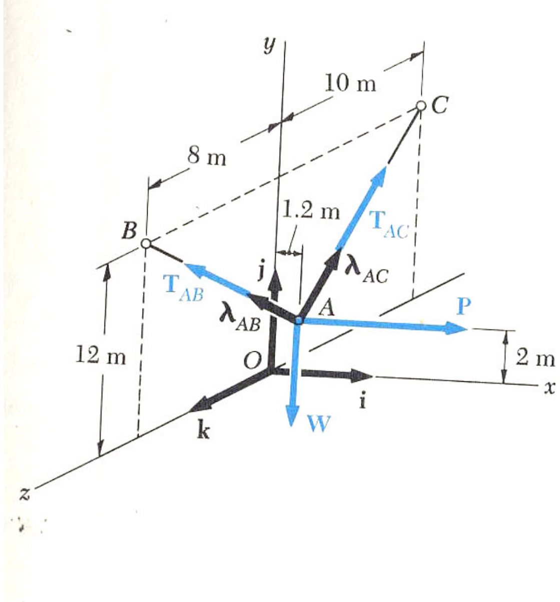
$$d_x = -1.2 \text{ m}$$
$$d_y = 12 \text{ m} - 2 \text{ m} = 10 \text{ m}$$
$$d_z = -10 \text{ m}$$

$$\overrightarrow{AC} = -1.2 \text{ m}\,\vec{i} + 10 \text{ m}\,\vec{j} - 10 \text{ m}\,\vec{k}$$
$$\left|AC\right| = \sqrt{(-1.2 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2 + (-10 \text{ m})^2} = 14.19 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|AC\right|} = \frac{-1.2 \text{ m}}{14.19 \text{ m}}\,\vec{i} + \frac{10 \text{ m}}{14.19 \text{ m}}\,\vec{j} + \frac{-10 \text{ m}}{14.19 \text{ m}}\,\vec{k}$$
$$= -0.0846\,\vec{i} + 0.705\,\vec{j} - 0.705\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{T_{AC}} = T_{AC}\lambda_{AC}$$
$$= -0.0846T_{AC}\,\vec{i} + 0.705T_{AC}\,\vec{j} - 0.705T_{AC}\,\vec{k}$$

// Exemplo



Aplicando as condições de equilíbrio; $\sum F = 0 \Rightarrow \overrightarrow{T_{AB}} + \overrightarrow{T_{AC}} + \vec{W} + \vec{P} = 0$

$$\sum F_x = 0 = -0.0933 T_{AB} - 0.0846 T_{AC} + P \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 = 0.778 T_{AB} + 0.705 T_{AC} - 1962\ \text{N} \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 = 0.622 T_{AB} - 0.705 T_{AC} \qquad (3)$$

Resolvendo a eq. (3) em ordem a T_{AB}: $T_{AB} = \dfrac{0.705}{0.622} T_{AC} = 1.133 T_{AC}$

Substituindo em (3) e resolvendo,

$$0.778(1.133 T_{AC}) + 0.705 T_{AC} = 1962\ \text{N}$$

$$T_{AC} = 1236\ \text{N}$$

$$T_{AB} = 1401\ \text{N}$$

Da equação (1) obtém-se o valor da intensidade de P.

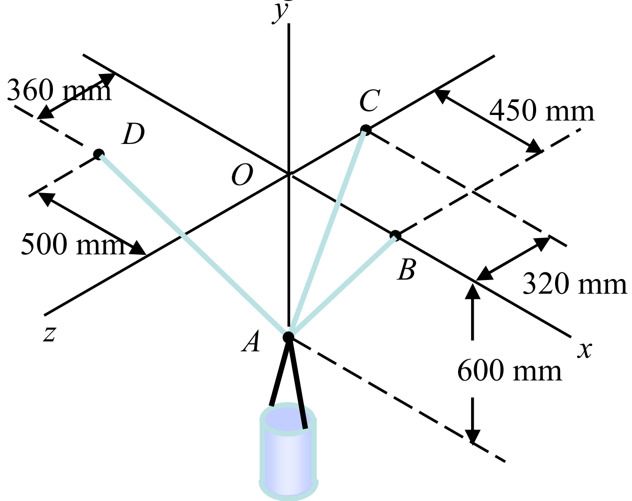
$$P = 0.0933 T_{AB} + 0.0846 T_{AC}$$

$$= 0.0933(1401\ \text{N}) + 0.0846(1236\ \text{N})$$

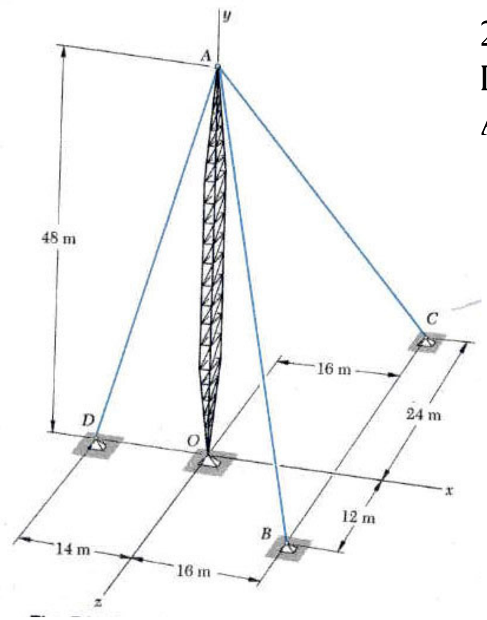
$$= 235\ \text{N}$$

// Exercícios

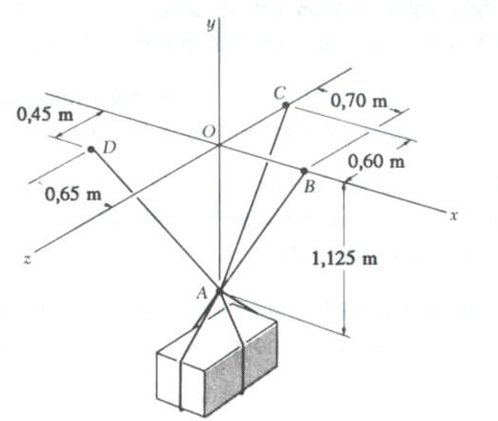
2.8- Um balde contém um peso de 1165N e é suportado por três cabos, conforme mostra a figura. Determine a tensão em cada cabo.



2.9- A força instalada no cabo AC é de 28KN, determine as forças instaladas nos cabos AB e AD de forma a que a força resultante das três forças aplicadas em A seja vertical. Determine a força resultante.



2.10- Uma caixa está suspensa por três cabos, como ilustrado. Determine o peso da caixa sabendo que a força de tracção no cabo AB é de 6890N.



2.11- Uma caixa está suspensa por três cabos, como ilustrado. Determine o peso da caixa sabendo que a força de tracção no cabo AB é de 3KN.