

Unidades fundamentais:

- unidade de massa: Kg
- unidade de comprimento: m
- unidade de tempo: s

Unidade derivada:

- Unidade de força: N

Análise Dimensional:

- massa: Kg ----- M
- comprimento: m ----- L
- tempo: s ----- T

Formando o sistema MLT do Sistema Internacional.

Múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais

Factor multiplicativo	Prefixo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^9	giga	G
1 000 000 = 10^6	mega	M
1 000 = 10^3	quilo	k
100 = 10^2	hecto†	h
10 = 10^1	deca†	da
0,1 = 10^{-1}	deci†	d
0,01 = 10^{-2}	centi†	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	fento	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	ato	a

Unidades usuais Americanas e unidade SI equivalente

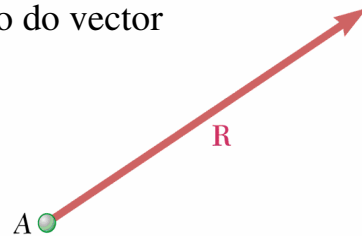
Grandeza	Unidade usual americana	Unidade SI equivalente
Aceleração	ft/s ²	0,3048 m/s ²
	in/s ²	0,0254 m/s ²
Área	ft ²	0,0929 m ²
	in ²	645,2 mm ²
Energia	ft-lb	1,356 J
Força	kip	4,448 kN
	lb	4,448 N
	oz	0,2780 N
Impulso	lb-s	4,448 N-s
Comprimento	ft	0,3048 m
	in	25,40 mm
	mi	1,609 km
Massa	oz mass	28,35 g
	lb mass	0,4536 kg
	slug	14,59 kg
	ton	907,2 kg
Momento de uma força	lb-ft	1,356 N-m
	lb-in	0,1130 N-m
Momento de inércia		
	de uma área	in ⁴
de uma massa	lb-ft-s ²	1,356 kg-m ²
Momentum	lb-s	4,448 kg-m/s
Potência	ft-lb/s	1,356 W
	hp	745,7 W
Pressão ou tensão	lb/ft ²	47,88 Pa
	lb/in ² (psi)	6,895 kPa
Velocidade	ft/s	0,3048 m/s
	in/s	0,0254 m/s
	mi/h (mph)	0,4470 m/s
	mi/h (mph)	1,609 km/h
Volume	ft ³	0,02832 m ³
	in ³	16,39 cm ³
Líquidos	gal	3,785 L
	qt	0,9464 L
Trabalho	ft-lb	1,356 J

Uma **grandeza escalar** é **totalmente definida por um valor real**:

Ex: Volume, tempo, massa, etc.

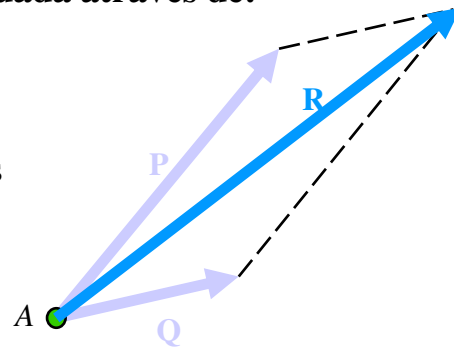
Definição de um vector:

- indicação da norma ou módulo do vector
- direcção (ângulo)
- sentido (seta)



A soma de vectores pode ser efectuada através de:

- Regra do Paralelogramo
- Componentes cartesianas



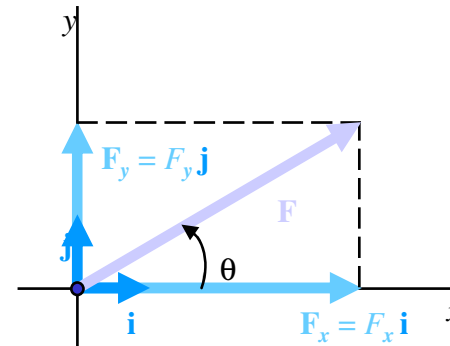
Propriedades da adição:

- Comutativa $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$
- Associativa $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = (\vec{Q} + \vec{P}) + \vec{S} = \vec{S} + (\vec{Q} + \vec{P}) = \vec{S} + \vec{Q} + \vec{P}$

A subtracção de um vector = à adição do vector oposto:

$$\vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} + (-\vec{Q})$$

Uma Força **F** (no espaço bidimensional) pode ser decomposta em duas **componentes cartesianas**. A direcção destas componentes corresponde aos eixos coordenados.



$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

Introduzindo os **vectores unitários** (versores) **i** e **j** segundo o eixo **x** e **y**:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

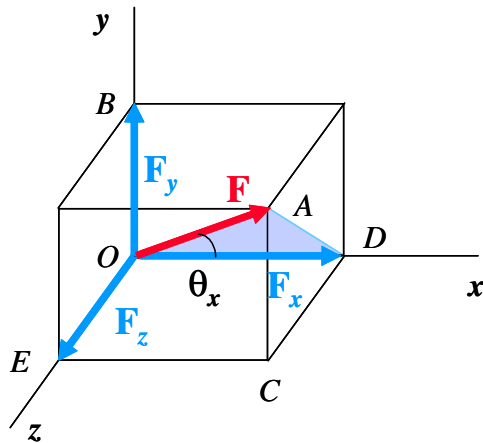
Quando há mais do que uma força aplicada numa partícula, as componentes da **força resultante** são:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

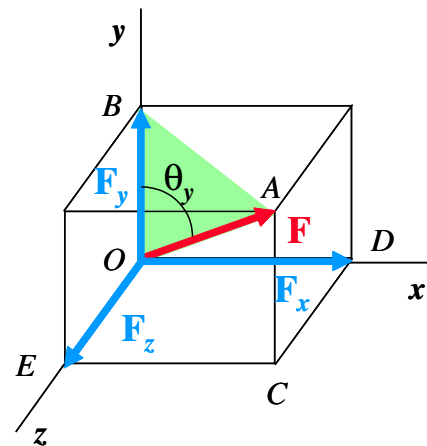
$$R_x = \Sigma R_x \quad R_y = \Sigma R_y$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$$

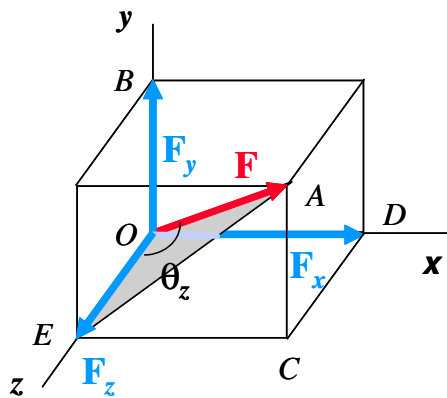
Componentes no espaço tridimensional:



$$F_x = F \cos \theta_x$$



$$F_y = F \cos \theta_y$$

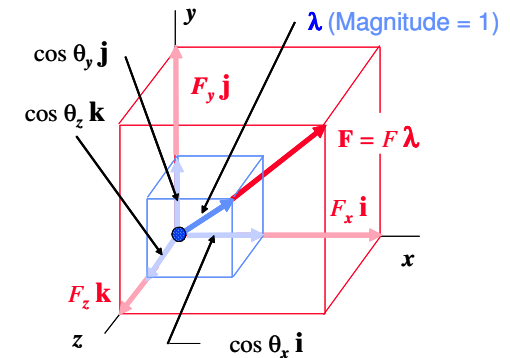


$$F_z = F \cos \theta_z$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F (\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k})$$

Os co-senos de θ_x , θ_y e θ_z são conhecidos como **Co-senos Directores** da força $\mathbf{F}$.

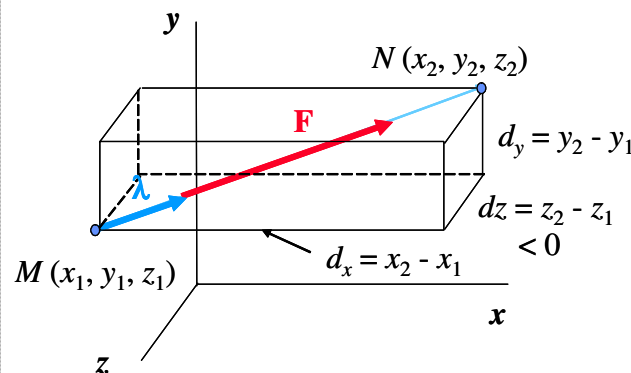


$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}$$

Como a intensidade do versor $\boldsymbol{\lambda}$ é unitário tem-se que:

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

Uma força a três dimensões é definida pela sua intensidade e por dois pontos da sua linha de acção:



$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k})$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

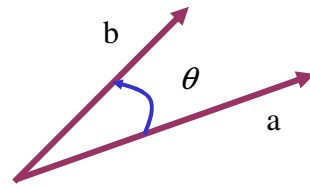
Produto de um escalar por um vector

O produto $k\vec{P}$ de um escalar k por um vector $\vec{P}$, é definido como um vector tendo a direcção de $\vec{P}$, o mesmo sentido de $\vec{P}$ (se k for positivo) e intensidade igual ao produto de $\vec{P}$ pelo valor absoluto de k .

Produto escalar de dois vectores (dá origem a um escalar)

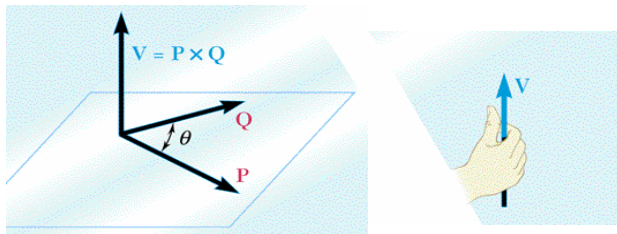
$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$



Produto vectorial (ou externo) de dois vectores (dá origem a um vector perpendicular)

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{P} \times \vec{Q} \\ &= \|\vec{P}\| \|\vec{Q}\| \sin(\theta) \end{aligned}$$



A direcção e sentido são dadas pela regra do saca-rolhas ou da mão direita.

$$(\vec{P} \times \vec{Q}) = -(\vec{Q} \times \vec{P})$$

Exemplo: o vector $\vec{V}$ é obtido pela expansão do determinante que contem as componentes de $\vec{P}$ e $\vec{Q}$.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k} & \vec{Q} &= Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k} \\ \vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned}$$

Quanto ao produto escalar pode-se concluir que:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 & \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 & \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 & \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 & \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \\ \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 & \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 & \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{array}$$

Quanto ao produto vectorial:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{array}$$

Produto misto de três vectores

O produto misto de três vectores dá origem a um escalar, através do produto interno do vector $\vec{S}$ pelo vector produto externo de $\vec{P}$ e $\vec{Q}$

$$E = \vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

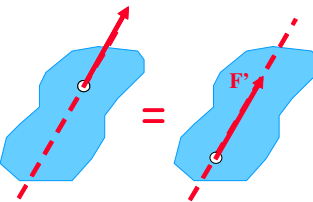
Forças

Forças exteriores – representam a acção de outros corpos sobre o corpo em análise.

Forças interiores – mantêm unidas as diferentes partículas que constituem o corpo.

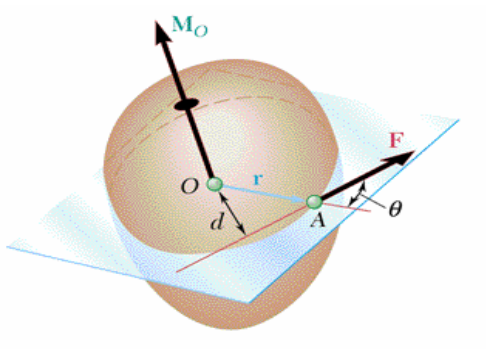
Princípio da transmissibilidade

De acordo com o princípio da transmissibilidade as condições de equilíbrio ou de movimento não se alteram se a força F for substituída por outra na mesma linha de acção.



Momento de uma força em relação a um ponto [Nm]

Considere a força $\vec{F}$, definida pela intensidade, direcção e sentido, que actua num corpo. Sendo o seu ponto de aplicação definido pelo vector $\vec{r}$, o momento da força $\vec{F}$ em relação ao ponto O será obtido pelo produto externo de $\vec{r}$ por $\vec{F}$.

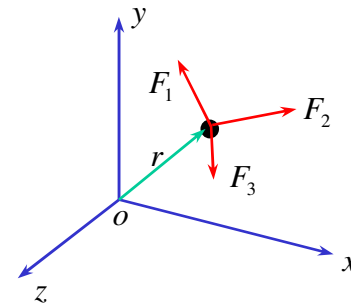


$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\|\vec{M}_o\| = \|\vec{r}\| \|\vec{F}\| \sin(\Theta) = d \|\vec{F}\|$$

Teorema de Varignon (matemático Francês 1654-1722)

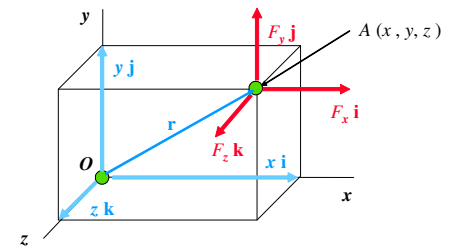
“o momento em relação a um ponto O da resultante de várias forças concorrentes é igual à soma dos momentos das diversas forças em relação ao mesmo ponto O”.



$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

Componentes cartesianas do momento

As componentes cartesianas do momento $\vec{M}_o$ da força $\vec{F}$ são obtidas pelo produto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$.

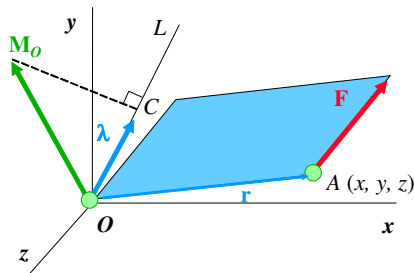


$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

$$M_x = y F_z - z F_y \quad M_y = z F_x - x F_z \quad M_z = x F_y - y F_x$$

Momento de uma força em relação a um eixo

O momento de uma força $\vec{F}$ relativamente a um eixo OL é a projecção do momento $\vec{M}_O$ no eixo OL, isto é, será o produto misto de:

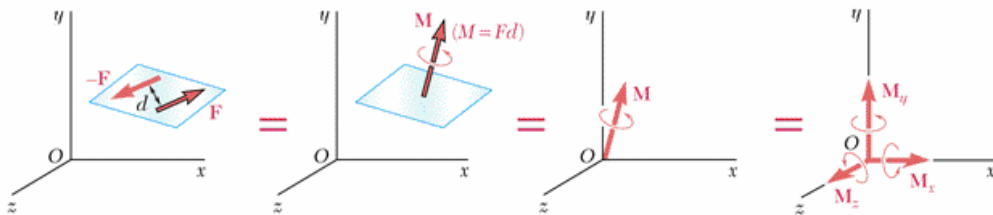


$$\vec{M}_{OL} = \lambda \cdot \vec{M}_O = \lambda \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

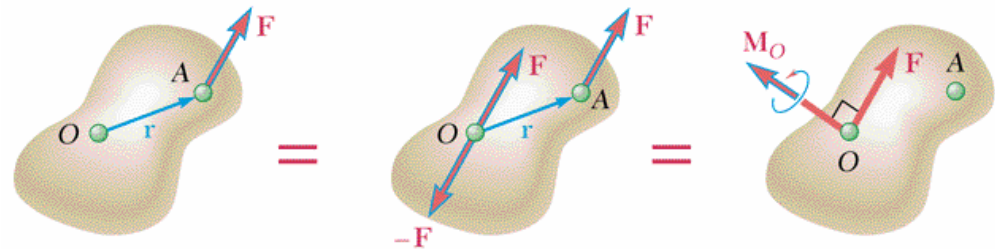
Momento de um binário

Duas forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, com a mesma intensidade, linhas de acção paralelas e sentidos opostos formam um binário.

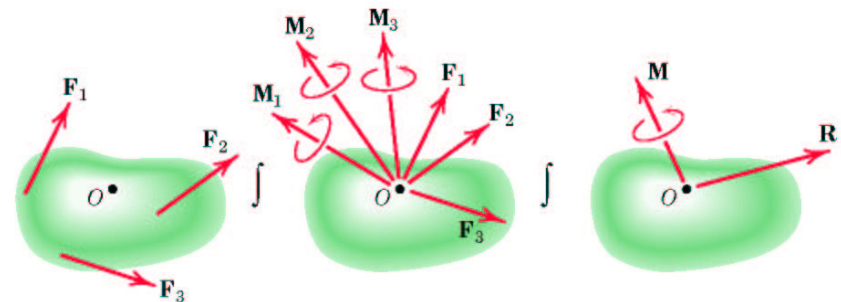


Redução a um sistema Força/Binário

Qualquer força $\vec{F}$ aplicada a um ponto A de um corpo rígido pode ser substituído por um sistema força/binário num ponto arbitrário O.



Por mais complexo que seja o sistema de forças, este pode ser reduzido a um sistema Força/Binário.



$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$