



Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Teoria do Sinal

Orlando Ferreira Soares

Bragança, 2000

Índice

Introdução	1
Exemplo 1: Remoção de ruído de sinais audio.....	1
Exemplo 2: Previsão das cotações da bolsa.....	2
Exemplo 3: Revisão do exemplo 1	4
Exemplo 4: Processamento de imagem.....	6
Exemplo 5: Sistema de controlo de posição	7
Caracterização de Sinais.....	11
Sinais Contínuos e Sinais Discretos	11
Operações básicas sobre sinais.....	13
Escalonamento da Amplitude.....	13
Escalonamento no tempo	14
Reflexão e Deslocamento no tempo	15
Adição e Subtracção de sinais	18
Exemplos.....	19
Duas propriedades dos sinais	20
Sinais Pares e Impares.....	20
Exemplo	21
Periodicidade.....	22

Alguns Sinais Básicos	23
Sinal Exponencial.....	23
Sinal Sinusoidal.....	25
Exponencial Complexa	29
Exemplo	34
O Degrau Unitário e o Impulso Unitário	35
Caracterização de Sistemas	45
Modelo de Sistemas	45
Classificação de Sistemas.....	47
Sistemas Contínuos/Discretos	47
Sistemas Lineares/Não-lineares	48
Sistemas Invariantes/Variantes no tempo.....	49
Sistemas Instantâneos/Não-instantâneos	49
Sistemas Causais/Não-causais.....	51
Sistemas Estáveis/Não-estáveis.....	51
Sistemas de Múltiplas Entradas – Múltiplas Saídas	53
Exemplo	54
Sistemas Lineares e Invariantes no tempo.....	57
Sistemas LIT Discretos – O Somatório de Convolução	58
Sistemas LIT Contínuos – O Integral de Convolução	65

Propriedades de Sistemas LIT	75
Propriedade Comutativa	75
Propriedade Distributiva	76
Propriedade Associativa	77
Série de Fourier em Tempo Contínuo	79
Aproximação de Funções Periódicas	80
Formas da Série de Fourier	81
Coeficientes de Fourier	85
Exemplo	89
Efeitos de Simetria	90
Simetria Par	90
Simetria Impar	93
Propriedades da Série de Fourier	95
Determinação da Forma Exponencial por Derivação	98
Exemplo	101
Transformada de Fourier em Tempo Contínuo	103
Definição de Transformada de Fourier	103
Propriedades da Transformada de Fourier	108
Linearidade	108
Escalonamento no tempo	109

Deslocamento no tempo	110
Transformação no tempo.....	111
Dualidade	112
Convolução	113
Deslocamento nas frequências	114
Derivação no tempo	114
Integração no tempo	116
Derivação na frequência.....	117
Cálculo da Transformada a partir da Série de Fourier.....	119
Transformada de Laplace	121
Definição de Transformada de Laplace.....	122
Exemplo	125
Exemplo	126
Transformada Inversa de Laplace	127
Exemplo	128
Propriedades da Transformada de Laplace.....	129
Linearidade.....	129
Deslocamento no tempo	130
Deslocamento no Domínio – s	130
Escalonamento no tempo	131
Conjugação.....	132
Convolução	133

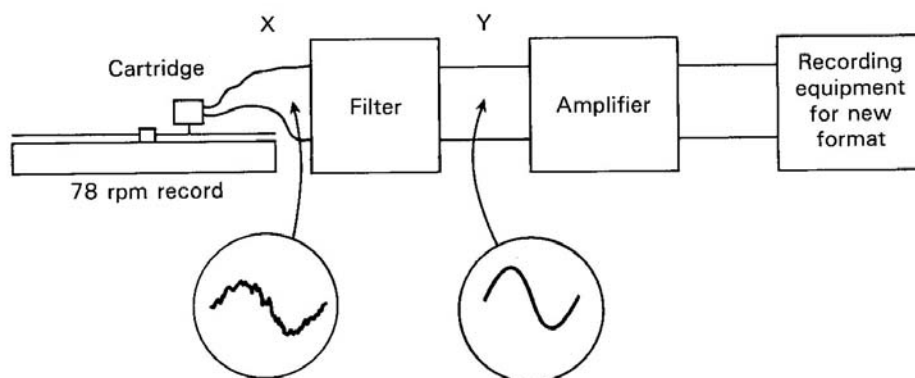
Derivação no tempo	134
Derivação no Domínio – s.....	135
Integração no tempo	135
Teorema do Valor Inicial	137
Teorema do Valor Final	137
Anexo A – Identidades Trigonométricas.....	139
Anexo B – Somatório de Séries Geométricas.....	140
Anexo C – Propriedades da Transformada Contínua de Fourier	141
Anexo D – Propriedades da Transformada de Laplace	142
Bibliografia	143

Introdução

A seguir são apresentados alguns exemplos que se enquadram no estudo desta disciplina e que mostram a importância de se estudarem os sinais e sistemas.

Exemplo 1: Remoção de ruído de sinais audio

Consideremos o problema de um gravador de passagem de um disco de vinil de 78 rpm para um formato mais moderno, Compact Disc (CD). Isto é conseguido através da obtenção da tensão do disco a 78 rpm, que depois de amplificado é utilizado para gravar o CD. No entanto, o disco a 78 rpm apresenta um ruído de fundo que se pretende eliminar na nova gravação. Por isso, é necessário aplicar um filtro como mostra a seguinte figura:

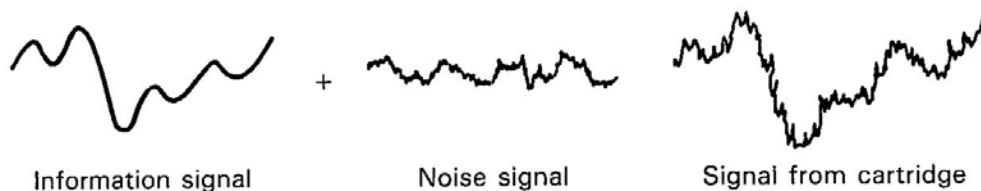


Teoria do Sinal

As tensões dos sinais X e Y que transportam a informação vão variando consoante a variação da posição da agulha no disco. A posição da agulha é um sinal assim como as tensões dos sinais X e Y sendo a variável envolvida mecânica. Assim, a agulha transforma a variação de posição numa variação de tensão X – esta constitui um **Sistema** electromecânico.

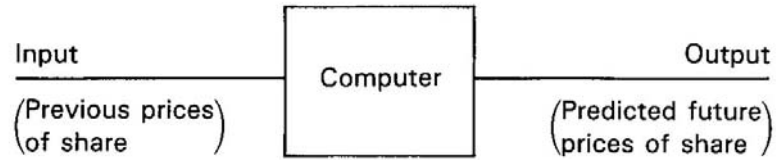
Neste exemplo todos os sinais têm a propriedade de possuírem um valor em cada instante de tempo; estes sinais são designados de **Sinais Contínuos**.

O sinal retirado do disco pode ser considerado como sendo constituído por duas componentes: uma componente constitui o sinal com a informação e outra constitui o sinal de ruído, o qual se pretende eliminar com o filtro e cuja frequência é normalmente superior ao sinal da informação.

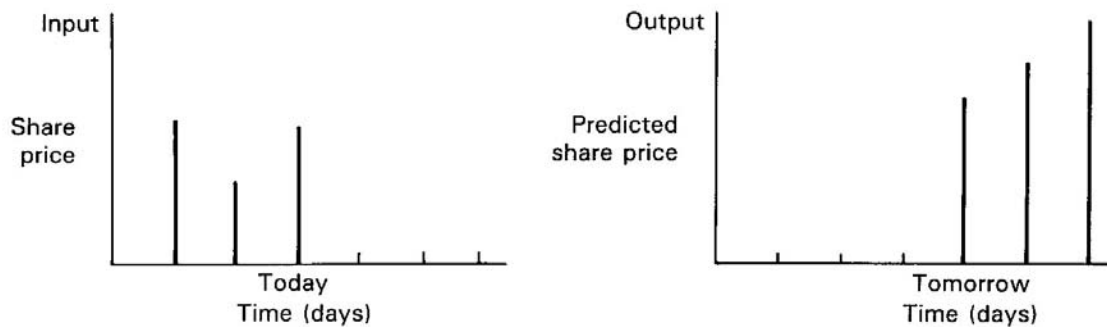


Exemplo 2: Previsão das cotações da bolsa

Este exemplo mostra as cotações da bolsa de mercados em cada dia. Será que as cotações futuras podem ser previstas? Se for suposto que um computador é usado para prever os resultados, então teremos o seguinte:



Estes sinais tem uma característica diferente dos sinais do exemplo anterior; em vez de terem um valor para todos os instantes de tempo, só dispõem de valor em instantes descontínuos (discretos); este sinais são conhecidos como **Sinais Discretos**.



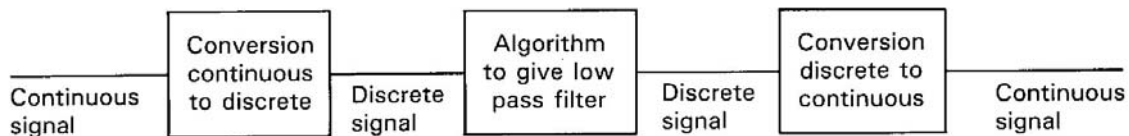
Neste exemplo, o computador pega no sinal discreto do sinal de entrada e a partir dele determina o valor discreto do sinal de saída – transforma um sinal de entrada num sinal de saída. Isto é a definição de um **Sistema**.

No exemplo anterior o sistema era implementado através de “hardware”, i.é., através de dispositivos eléctrico e mecânicos. Neste exemplo a transformação da entrada na saída é conseguida através de “software”, i.é., através de um algoritmo.

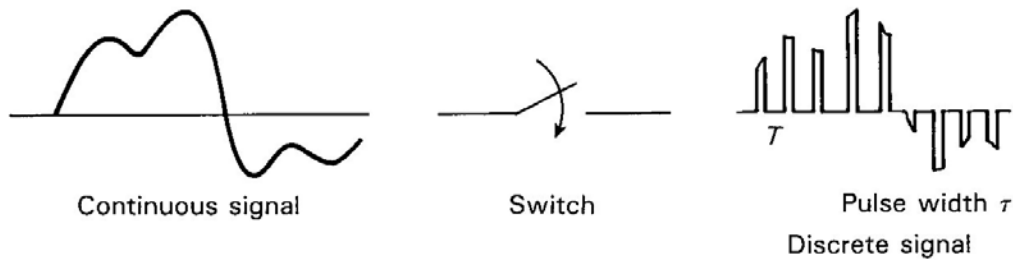
Exemplo 3: Revisão do exemplo 1

No exemplo 1 o filtro pode ser implementado através de componentes electrónicas e representa uma relação entre duas variáveis eléctricas (tensão ou corrente) nos terminais das componentes. No exemplo 2, é usado um computador para transformar o sinal de entrada.

Se os sinais no exemplo 1 forem discretos é possível utilizar um computador para executar a filtragem. Um filtro utilizado em sinais discretos é designado de ***filtro digital***. No entanto, torna-se necessário converter os sinais contínuos para discretos sem grandes perdas de informação. Depois, na saída, torna-se necessário reconverter os sinais para sinais contínuos.

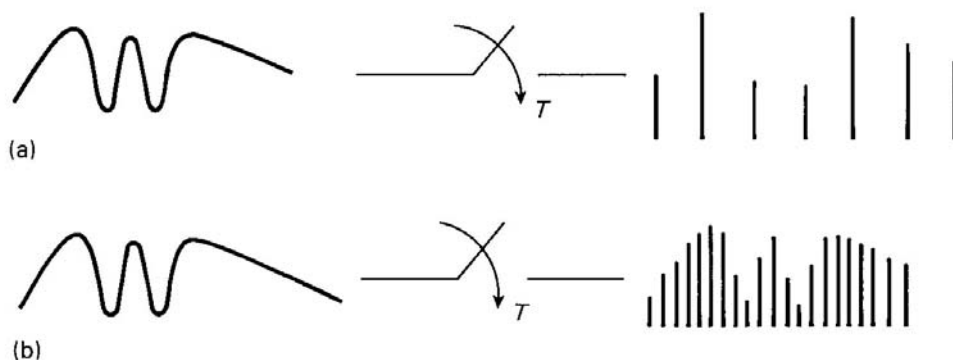


A conversão de sinais contínuos para sinais discretos pode ser explicada através da seguinte figura:



O sinal contínuo é ligado a um *switch* que abre e fecha repetidamente, sendo o intervalo de tempo em que se encontra fechado τ inferior ao intervalo de tempo em que se encontra fechado ($T-\tau$). Diminuído o intervalo de tempo τ , o sinal aproxima-se de um sinal discreto. Esta acção é conhecida por **Amostragem**; T é o período de amostragem, $1/T$ a taxa de amostragem e, neste contexto, o sinal discreto é designado por sinal amostrado.

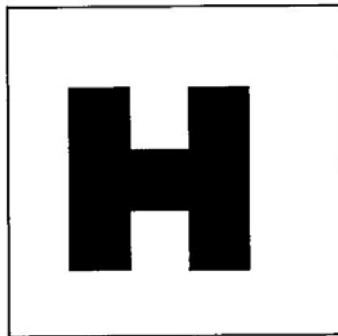
Para perceber como um sinal discreto pode representar bem ou não um sinal contínuo vejamos os seguintes exemplos de amostragem do mesmo sinal:



Exemplo 4: Processamento de imagens

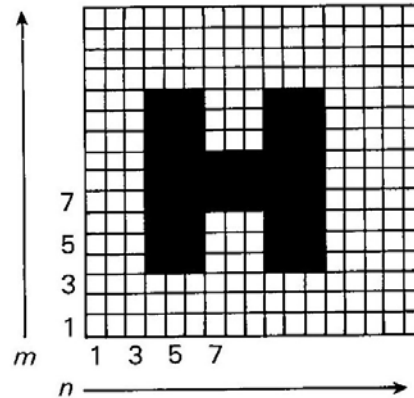
Hoje em dia é muito frequente a transmissão de imagens. Para além do exemplo das transmissões televisivas, são tiradas imagens por satélites da Terra e que são transmitidos para serem usados na meteorologia e para fins militares. Imagens de planetas e astros distantes também são frequentemente transmitidas.

Consideremos a seguinte imagem:



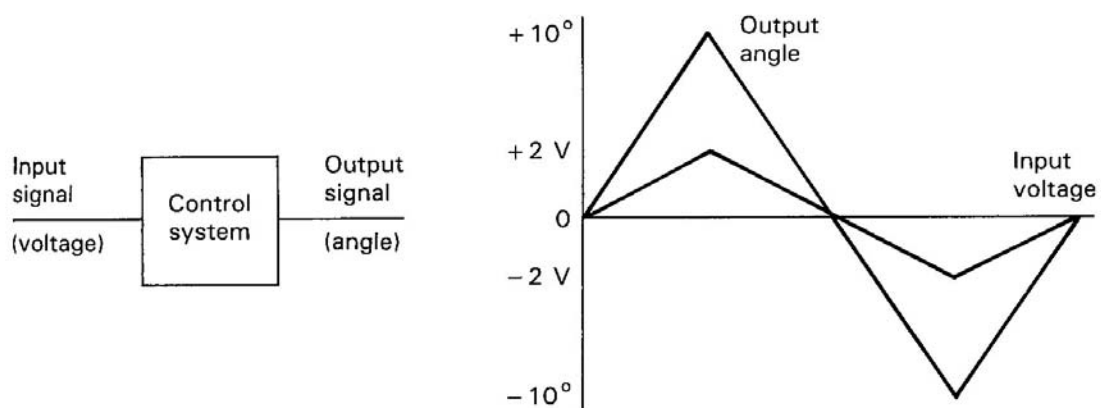
Para transmitir esta imagem o sinal tem de ser construído de forma a dar a sua intensidade (e cor para imagens não monocromáticas) em cada ponto da sua superfície. Na prática, todas as formas de imagens são de natureza discreta e a sua representação é feita através de sinais discretos.

A imagem é dividida num número finito de pequenas áreas (*pixels*) e o sinal representa a intensidade de cada pixel. Cada pixel é identificado através de um sistema de coordenadas n e m . Assim, a intensidade de um determinado pixel será representada por $I(n,m)$. Este sinal, ao contrário dos exemplos anteriores não é função do tempo mas da distância, é um *senal espacial*.



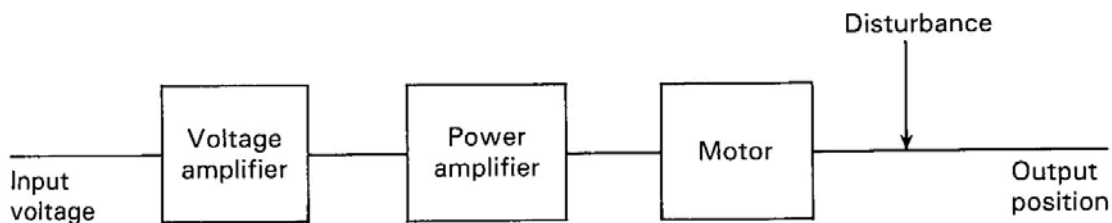
Exemplo 5: Sistema de controlo de posição

O exemplo aqui considerado é o de controlar a posição de uma carga através de um pequeno sinal eléctrico. Por exemplo, pode ser necessário controlar a posição de uma antena de rádio telescópica com algumas toneladas de peso através de um sinal eléctrico de amplitude máxima igual a um ou dois volts.



Teoria do Sinal

O problema aqui representado é diferente dos exemplos anteriores. Nos exemplos anteriores, os sistemas envolvidos transformavam o sinal de entrada num sinal de saída diferente. Neste exemplo, as formas dos sinais de entrada e saída são idênticas; no entanto elas representam diferentes variáveis (eléctricas e mecânicas), e os níveis das grandezas eléctricas associadas ao sinais são muito diferentes (miliwatts na entrada, kilowatts na saída). Uma representação possível de um sistema de controlo deste tipo pode ser a seguinte:



Para resumir, os exemplo mostrados foram apresentador de forma qualitativa para introduzir alguns dos conceitos básicos para o estudo de sinais e sistemas. Também foram usados para dar uma indicação dos objectivos da disciplina. Outros exemplos poderiam ser mostrados, como por exemplo:

1. O processamento de sinais para identificar a posição e velocidade de um alvo num sistema de radar.
2. A análise de sinais produzidos pela reflexão de ondas de choque (através de um controlador de explosão) numa explosão geofísica.
3. O processamento de uma grande variedade de sinais usados em aplicações biomédicas.

De facto, qualquer área onde a informação pode ser representada sob a forma de um sinal pode ser considerada como um campo de aplicação desta disciplina.

Para podermos expandir o material aqui mostrado para formar uma base científica de estudo, as ideias devem ser expressas e desenvolvidas numa forma quantitativa. Isto irá ser realizado neste semestre sendo os principais objectivos os seguintes:

1. Fazer uma descrição matemática dos sinais considerados. Também serão mostradas várias descrições possíveis e as vantagens e desvantagens de representações alternativas também serão investigadas.
2. Obter uma formulação matemática para a transmissão de sinais através de um dado sistema e, a partir disso, formular uma descrição ou modelo do sistema. Assim como pode ser utilizada mais do que uma descrição possível dos sinais, também, mais do que um modelo de sistema é possível utilizar.
3. Combinar o objectivo 1 e 2 de modo que para um determinado modelo de sistema e um sinal de entrada se possa calcular o sinal de saída.
4. Combinar os sistemas mais simples de modo a obter sistemas mais complexos e investigar a propriedades gerais de tais combinações de sistemas.

Caracterização de Sinais

O conceito de sinal já foi apresentado na aula anterior. Matematicamente um sinal é uma função com uma variável dependente e uma ou mais variáveis independentes. No entanto os sinais que iremos estudar nesta disciplina apenas têm uma variável independente que será restringida ao tempo.

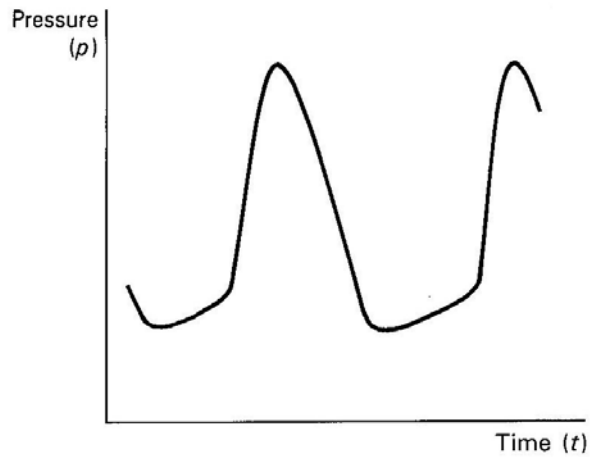
Embora na aula anterior tenhamos visto a diferença entre sinais contínuos e sinais discretos, agora vamos começar por analisar essa divisão com mais detalhe. Estes sinais terão uma evolução paralela no estudo ao longo da disciplina.

Sinais Contínuos e Sinais Discretos

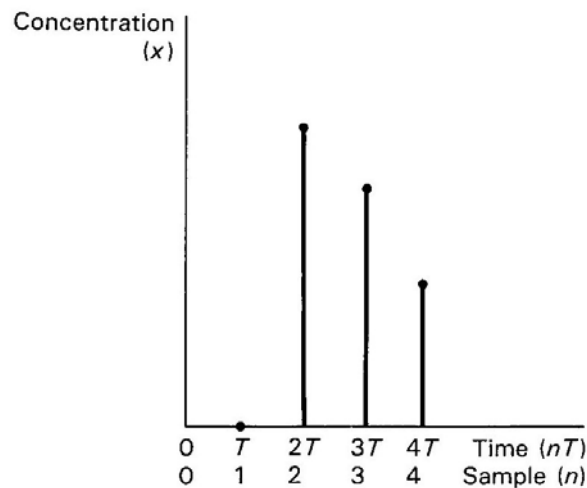
Alguns exemplos de sinais temporais:

1. A variação da tensão no colector de um transístor num amplificador de áudio.
2. A variação da temperatura num ponto de um forno durante o processo de fundição.
3. A variação de pressão num cilindro de um motor combustão interna durante o funcionamento.

Teoria do Sinal



4. A variação do número de sapatos vendidos numa certa loja durante um mês.
5. A variação da temperatura ao meio-dia numa sucessão de dias num lugar de veraneio.
6. A concentração de anticorpos no sangue após uma injeção de vacinação. As amostras de sangue são retiradas e analisadas todos os quinze minutos.



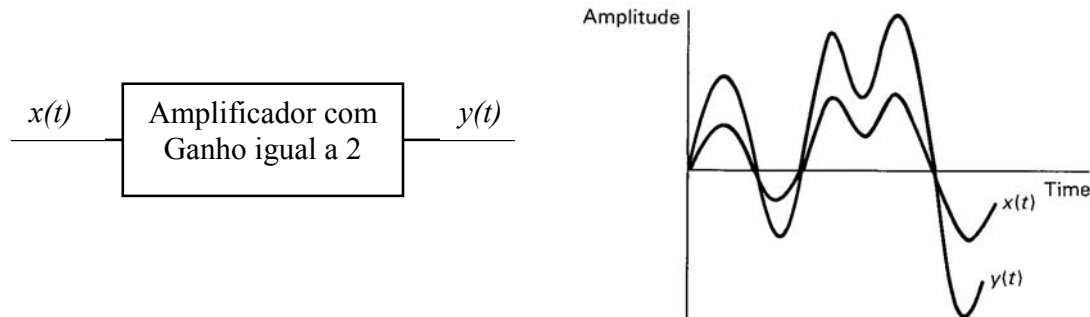
Apesar destes sinais terem o tempo como variável independente, os sinais no exemplo 1, 2 e 3 são basicamente diferentes dos exemplos 4, 5 e 6. Nos primeiros, os sinais que representam as variáveis existem em todos os instantes de tempo; estes são designados por **Sinais Contínuos**. Nos últimos, as variáveis só estão disponíveis em alguns intervalos discretos de tempo; estes são designados por **Sinais Discretos**. A descontinuidade pode ocorrer quer por natureza do processo (exemplo 4) quer pela natureza das medições (exemplo 5 e 6). Nestes, os processos que produzem as variáveis são processos contínuos, embora as medições sejam feitas em intervalos de tempo discretos.

Operações básicas sobre sinais

Estas operações consistem em transformar quer as variáveis dependentes quer as variáveis independentes.

↳ Escalonamento da Amplitude

Esta operação é sobre a variável dependente. Consideremos um sinal $x(t)$ ligado a um amplificador e que resulta numa saída $y(t)$. Assumindo que o amplificador altera a amplitude do sinal de entrada, em cada instante, através de um ganho como mostra a figura seguinte.



A forma do sinal de saída $y(t)$ é idêntica à do sinal de entrada, mas com o dobro da amplitude. É de notar que o sinal de entrada $x(t)$ pode ser representado pelo sinal de saída $y(t)$ se a escala no eixo vertical for alterado – daí escalonamento da amplitude.

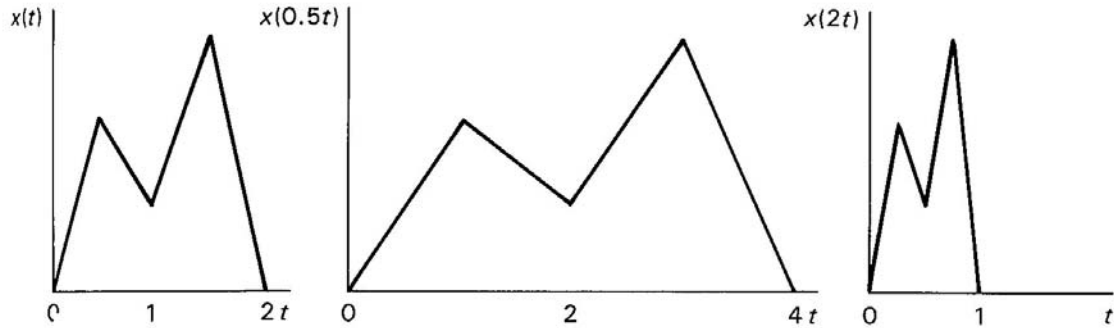
Genericamente, a relação entre $x(t)$ e $y(t)$ pode ser expressa por:

$$y(t) = a \cdot x(t)$$

onde a é uma constante.

↳ Escalonamento no tempo

Consideremos uma musica gravada numa cassette em que esta é tocada à velocidade errada. É obvia a diferença no som, o sinal foi expandido ou comprimido no tempo.



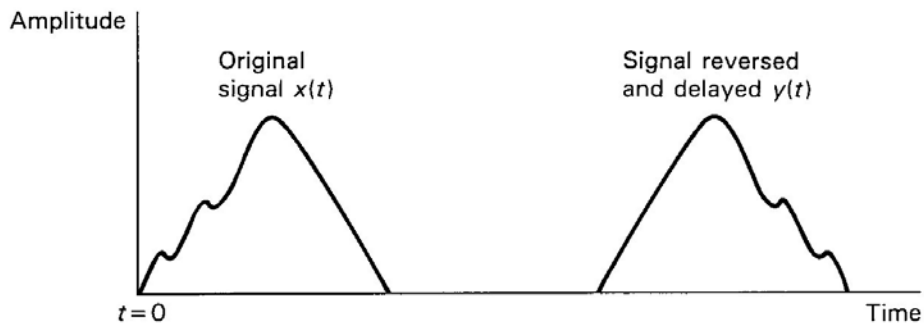
Genericamente a relação entre $y(t)$ e $x(t)$ pode ser expressa por:

$$y(t) = x(a.t)$$

em que a é um número constante positivo.

↳ Reflexão e Deslocamento no tempo

Suponhamos um sinal que depois de gravado numa cassete é tocado em modo reverso num instante posterior.

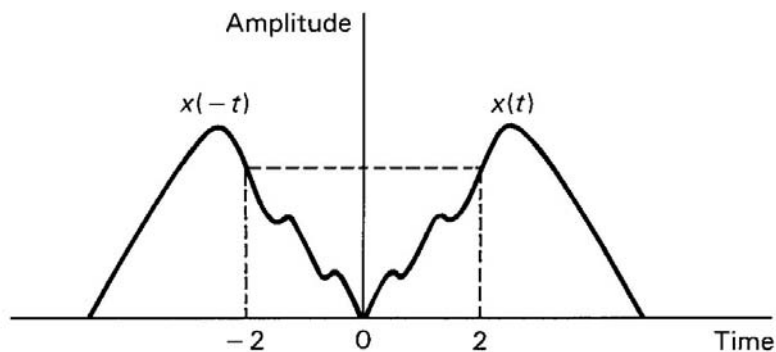


Teoria do Sinal

O sinal $y(t)$ pode ser obtido através de duas operações sobre o sinal $x(t)$:

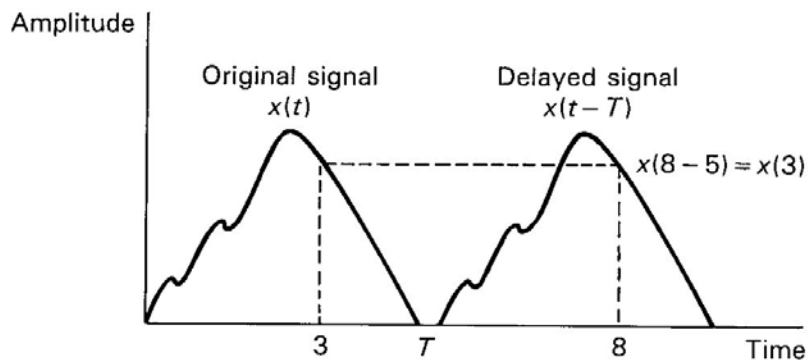
1. A escala de tempo de $x(t)$ é invertida.
2. O sinal invertido sofre um atraso no tempo.

É conveniente considerar estas duas operações separadas. A inversão da escala de tempos é designada por *reflexão do sinal*.



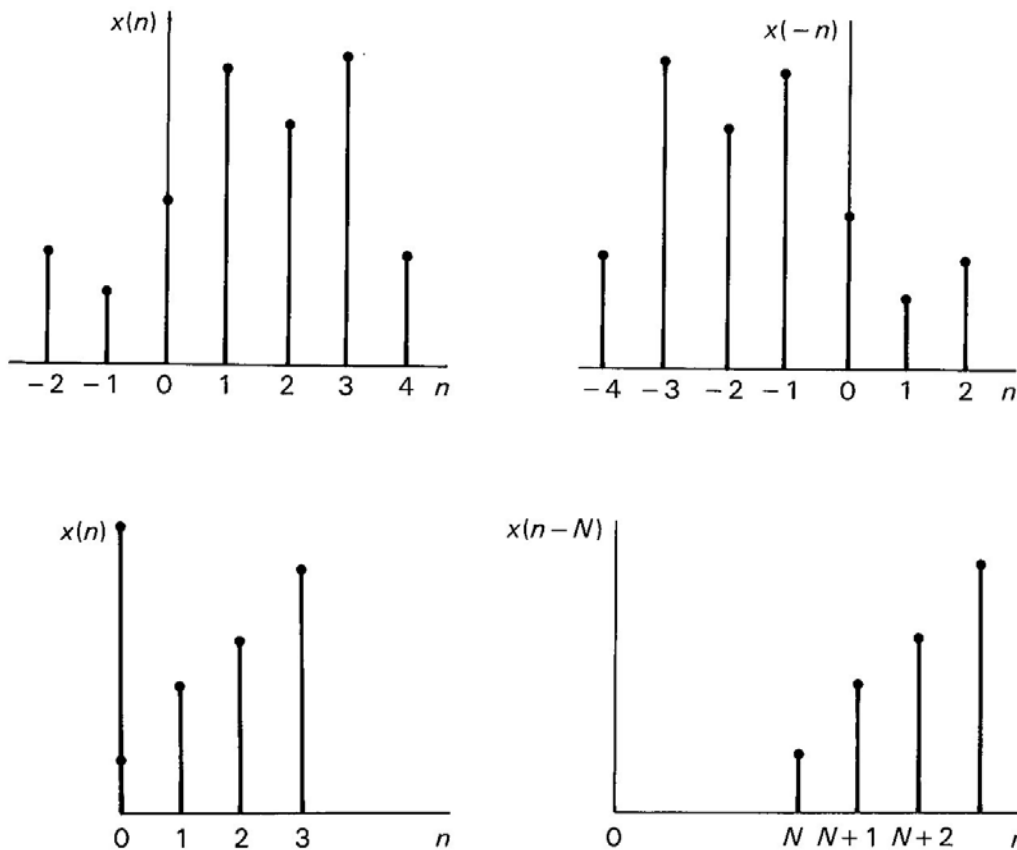
O sinal reflectido pode ser obtido através da colocação do valor do sinal no instante t igual no instante $-t$, é então definido como sinal $x(-t)$.

O atraso no tempo consiste em colocar o valor que originalmente estava no instante t no instante $(t-T)$. O atraso é representado por $x(t-T)$.



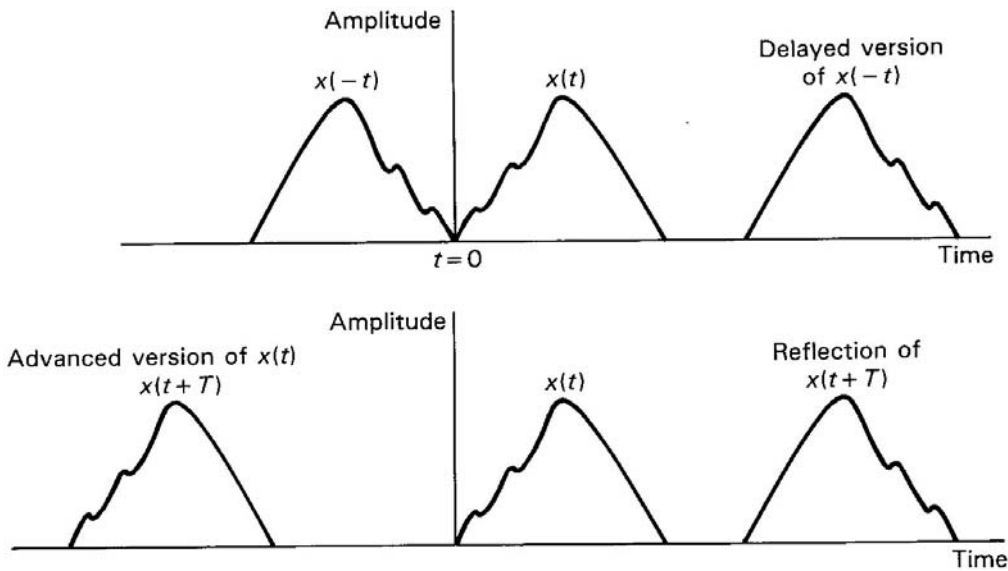
Uma operação em avanço no tempo será representada pelo sinal $x(t+T)$. As operações de avanço no tempo e de reflexão não são fisicamente possíveis em sinais em tempo real (isto suporia a previsão do futuro). Mas, como veremos, estas operações básicas serão utilizadas para descrever algumas propriedades úteis dos sinais.

As operações de reflexão e de deslocamento no tempo também podem ser efectuadas sobre sinais discretos.



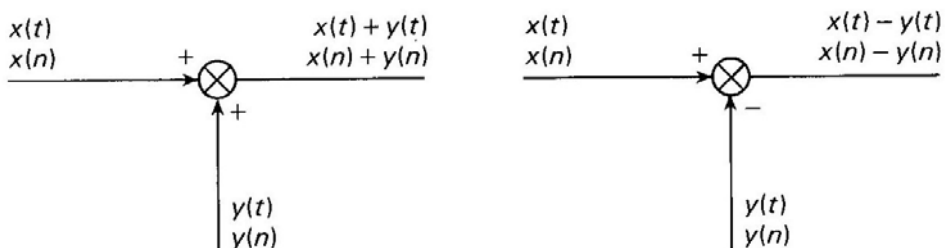
Teoria do Sinal

As operações de reflexão e deslocamento no tempo também podem ser combinadas para produzir o atraso de um sinal reflectido.



↳ Adição e Subtração de sinais

Se dois sinais contínuos são adicionados, os seus valores em cada instante são adicionados para formar a soma em cada instante. Para sinais discretos a definição é similar e só pode ser executada em números inteiros para cada sinal definido.



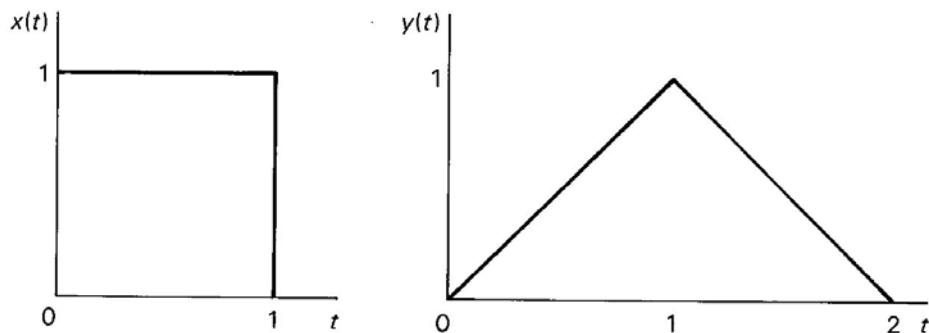
A subtração é análoga à adição.

As operações aqui apresentadas são básicas para a Teoria do Sinal.

Exemplos

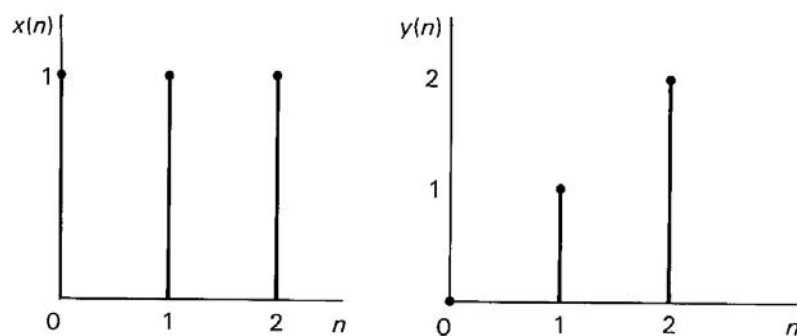
1. Considere os seguintes sinais e obtenha o sinal:

$$z(t) = 2x(t-2) + 3y(t-1)$$



2. Considere os seguintes sinais e obtenha o sinal:

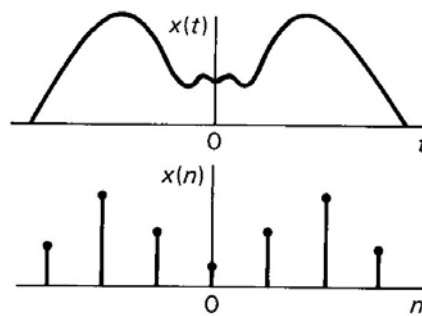
$$z(n) = 2x(n+2) + 0,5y(-n)$$



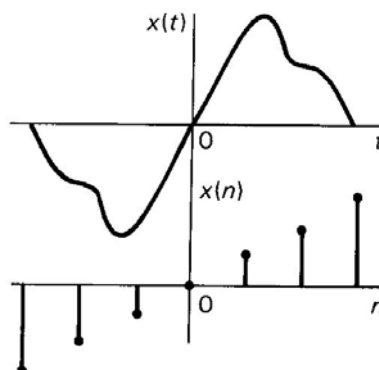
Duas propriedades dos sinais

↪ Sinais Pares e Impares

Estas propriedades são baseadas nas simetrias que os sinais possuem em torno da abscissa $t=0$ ($n=0$). Estas simetrias podem ser convenientemente expressas através do uso de operações de reflexão.



Estes sinais possuem a propriedade de $x(t)=x(-t)$, $x(n)=x(-n)$; estes sinais são designados por *sinais pares*.



Os sinais que têm a propriedade de $x(t)=-x(-t)$, $x(n)=-x(-n)$ são designados por *sinais ímpares*.

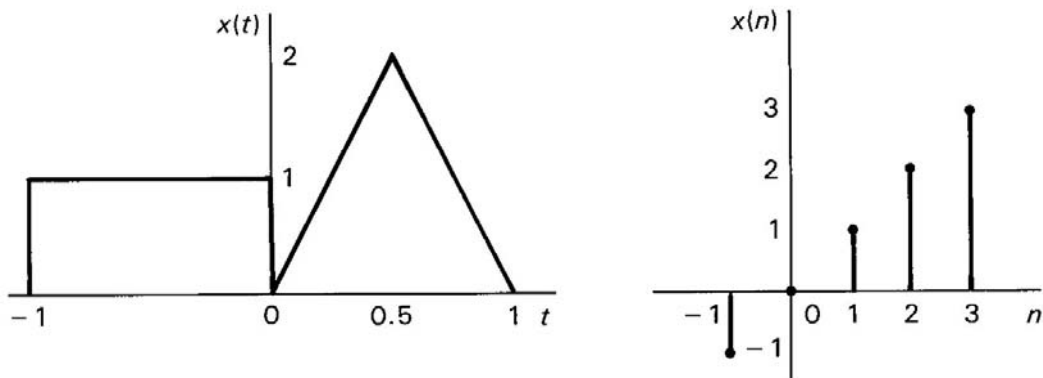
Também é fácil demonstrar que os sinais podem ser expressos em termos de dois sinais: um par e um ímpar. Ou seja, um sinal arbitrário pode ser escrito por:

$$x(t) = \frac{[x(t) + x(-t)]}{2} + \frac{[x(t) - x(-t)]}{2}$$

O termo $[x(t)+x(-t)]$ é par e o termo $[x(t)-x(-t)]$ é ímpar.

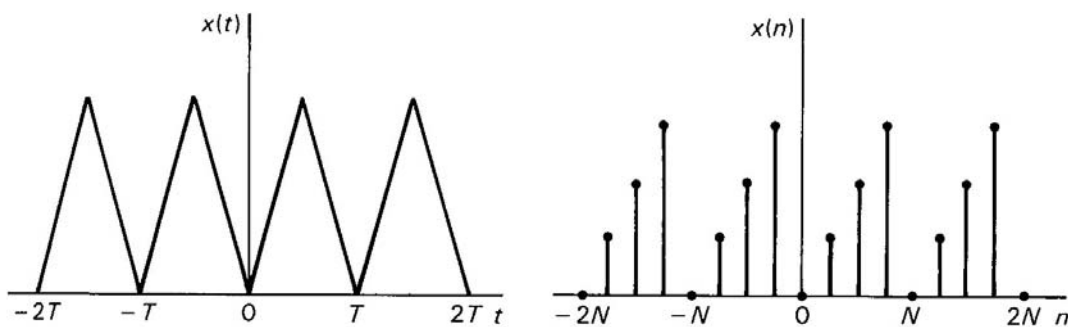
Exemplo

Exprima os seguintes sinais como a soma de uma componente par e uma ímpar.



↳ Periodicidade

A seguinte figura mostra um sinal contínuo e um sinal discreto periódicos.



A característica que torna um sinal periódico é a propriedade de o sinal se repetir indefinidamente no futuro e que se tenha repetido no passado. Esta propriedade pode ser convenientemente expressa através da operação de deslocamento no tempo.

Um sinal periódico $x(t)$, $x(n)$ tem a propriedade de:

$$\begin{aligned}x(t+T) &= x(t) \quad \text{para todo o } t \\x(n+N) &= x(n) \quad \text{para todo o } n\end{aligned}$$

O tempo T (ou número inteiro N) é designado de período da forma de onda. É de notar que se o sinal é periódico para o período T , também é periódico para qualquer múltiplo de T (identicamente para N).

Alguns Sinais Básicos

↳ Sinal Exponencial

O sinal exponencial contínuo é da forma

$$x(t) = A.e^{at}$$

onde A e a são constantes.

A propriedade que torna este sinal frequentemente utilizado em sistemas está relacionada com a sua variação e o seu declive.

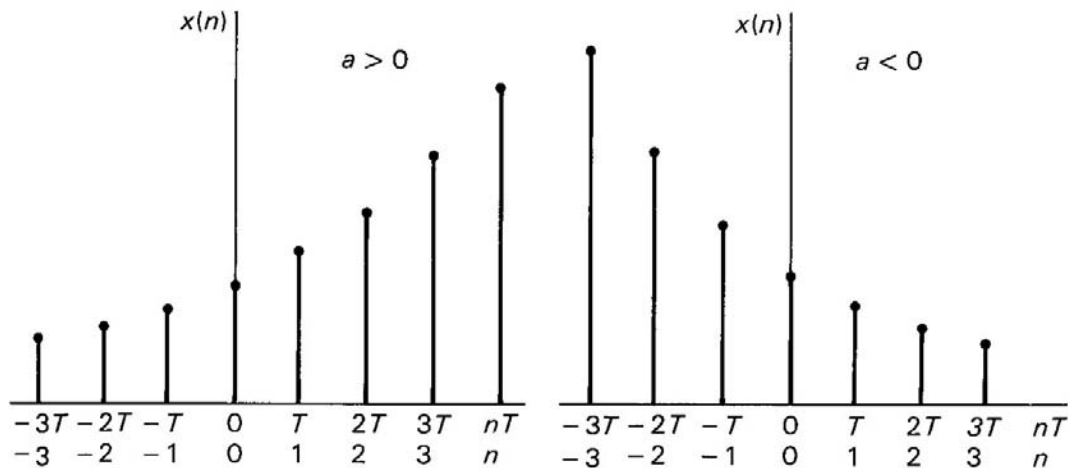
$$\frac{dx}{dt} = a.A.e^{at} = a.x(t)$$

O sinal tem a propriedade de que o seu declive, em qualquer instante, ser proporcional ao valor nesse instante.

A forma discreta do sinal é do tipo

$$x(n) = A.e^{anT}$$

onde A e a são constantes.



Como o sinal é um sinal temporal, a variável independente é o instante de tempo nT .

O sinal também pode ser escrito como

$$x(n) = A.e^{anT} = A(e^{aT})^n = A.(z)^n$$

onde $z = e^{aT}$

Nesta forma é fácil ver que

$$x(n+1) = A.z^{n+1} = A.z^n .z = x(n).z$$

Em cada instante, o sinal é formado pela multiplicação do sinal no instante anterior por uma constante z , i.é., os valores formam uma progressão geométrica.

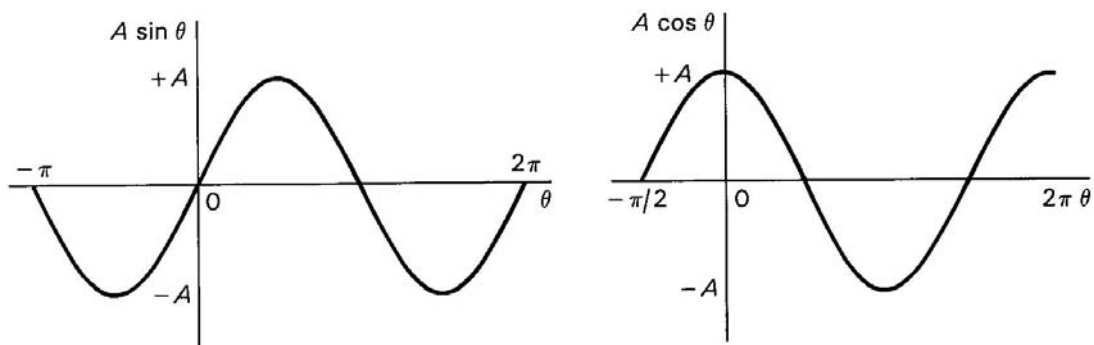
Nos sinais discretos não tem significado falar em inclinação. No entanto, uma propriedade semelhante é baseada na diferença entre amostras sucessivas:

$$\mathbf{x(n+1) - x(n) = x(n).z - x(n) = (z - 1).x(n)}$$

Como $(z-1)$ é uma constante, a diferença entre duas amostras sucessivas é a constante vezes a n -ésima amostra.

↳ Sinal Sinusoidal

Os sinais sinusoidais já conhecidos são do tipo:



Mas, se os sinais temporais são traduzidos por estes sinais, torna-se conveniente converter a variável independente de ângulo para tempo, ou seja:

$$\mathbf{\theta = Constante \times t}$$

Teoria do Sinal

A constante pode ser determinada por observação da função que é periódica e pela relação do período T com o ângulo correspondente de 2π . Isto dá uma constante igual a $\frac{2\pi}{T}$, que é conhecida por **Frequência angular** e cujas unidades são **rad./s**.

No entanto, $\frac{1}{T}$ é o número de ciclos por unidade de tempo e é definida como a **Frequência f** medida em Hertz (**Hz**). Assim, a relação entre θ e t pode ser escrita como:

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot t = 2\pi f \cdot t$$

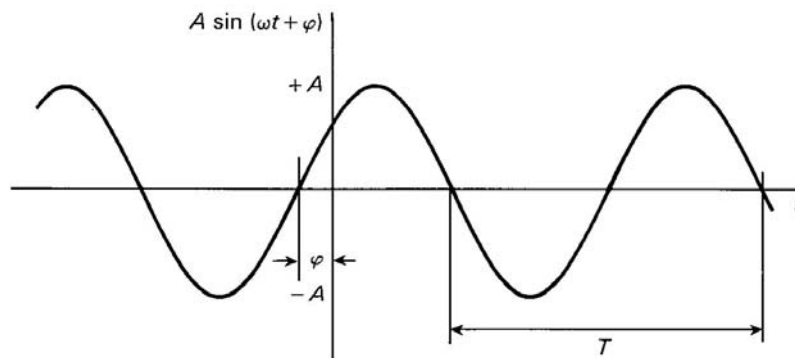
e os sinais *seno* e *coseno* podem ser representados por:

$$x(t) = A \cdot \text{sen } 2\pi f t \quad \text{e} \quad x(t) = A \cdot \text{cos } 2\pi f t$$

Como o valor máximo das funções *seno* e *co-seno* são a unidade, a constante A serve como um factor de escala dando às funções um valor máximo e mínimo de $\pm A$.

Usando a propriedade de deslocamento no tempo podemos notar que o *co-seno* pode ser obtido através do deslocamento no tempo do *seno* de $\frac{T}{4}$ (ângulo de $\frac{\pi}{2}$). Na generalidade, um sinal deste tipo pode ser obtido por avanço no tempo de um determinado ângulo φ .

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$



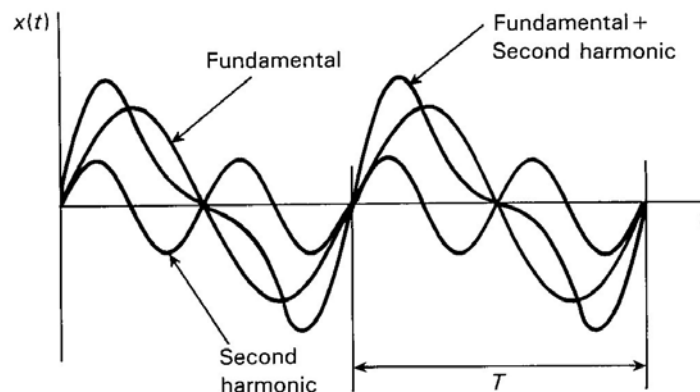
Aplicando a fórmula trigonométrica para $\text{sen}(A+B)$, este sinal pode ainda ser expresso:

$$x(t) = A \cdot \text{sen } \omega t \cdot \cos \varphi + A \cdot \cos \omega t \cdot \text{sen } \varphi$$

O sinal também pode ser obtido pela soma de uma onda sinusoidal e uma co-sinusoidal com factores de escala $A \cdot \cos \varphi$ e $A \cdot \text{sen } \varphi$, respectivamente.

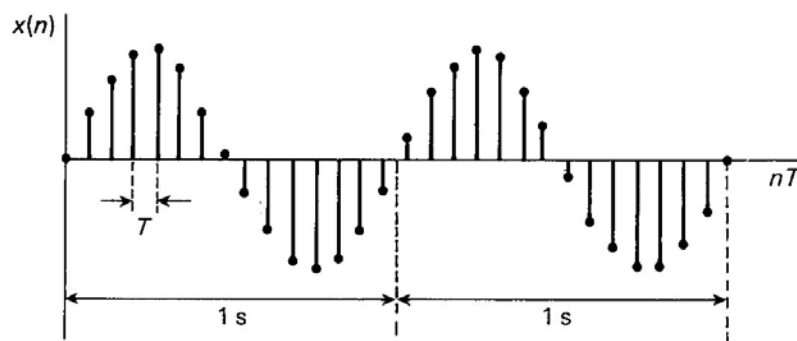
Uma propriedade que estes sinais têm é que a soma de dois sinais sinusoidais e de igual frequência produzem um sinal sinusoidal com a mesma frequência.

Se uma das sinusóides tiver uma frequência que é um múltiplo inteiro da frequência do outro sinal, esse sinal é designado por harmónico.



Os sinais sinusoidais discretos podem ser descritos pela relação:

$$x(n) = A \cdot \text{sen}(n\omega T + \varphi)$$



Nos sinais discretos é preciso ter cuidado na escolha do período porque a periodicidade de um sinal discreto é definida como $x(n) = x(n + N)$ em que N é um número inteiro.

Como o período de um sinal discreto é um número inteiro não possui unidade ao contrário dos sinais contínuos em que o período tem unidade de tempo.

Os sinais sinusoidais discretos ainda podem ser expressos da forma:

$$x(n) = A \cdot \text{sen}(n\theta)$$

onde $\theta = \omega T$ é designado como **Frequência normalizada** e é igual à frequência angular do sinal não amostrado a dividir pela frequência de amostragem.

$$\theta = \omega T = \frac{\omega}{f_s}$$

θ é o número de ângulos, radianos, e pode ser interpretado como o número de radianos/amostra. Como um ciclo completo é 2π radianos então o número de amostras por ciclo é dado por $\frac{2\pi}{\theta}$. O uso da frequência normalizada torna-se por vezes mais conveniente e útil no projecto de filtros digitais.

↳ Exponencial Complexa

Usando números complexos, os sinais exponenciais e sinusoidais podem ser expressos como casos especiais de um sinal generalizado – a exponencial complexa.

A exponencial já vista é

$$x(t) = A.e^{at}$$

Se a for imaginário $a = j\omega$

$$x(t) = A.e^{j\omega t}$$

$$x(t) = A.\cos \omega t + jA.\sen \omega t$$

Assim, o sinal $x(t)$ representa um sinal real e que pode ser associado a um processo real. Embora $x(t)$ contenha uma parte imaginária, a soma de um número complexo com o seu conjugado é real.

Assim, o sinal

$$x(t) = A.e^{j\omega t} + A.e^{-j\omega t} = 2A.\cos \omega t$$

é real e pode representar um sinal num sistema físico.

A principal razão do uso das formas exponenciais é porque é matematicamente mais fácil de trabalhar do que as formas trigonométricas e também resulta em expressões mais compactas.

Genericamente, os sinais para representar uma sinusóide com fase arbitrária podem ser descritos por:

$$x(t) = A.e^{j(\omega t + \varphi)} = A.e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

$$x(n) = A.e^{j(n\theta + \varphi)} = A.e^{jn\theta} e^{j\varphi}$$

Uma grande diferença entre sinais contínuos e discretos está relacionada com os harmónicos de um sinal. A definição de harmónico para os sinais contínuos também se aplica aos sinais discretos.

Assim, se o sinal discreto for dado por $x(n) = A.\text{sen } n\theta$, o seu harmónico de ordem k será dado por $x_k(n) = A.\text{sen } nk\theta$. No caso contínuo o número de harmónicos de um sinal sinusoidal são infinitos o que não se verifica com os sinais discretos.

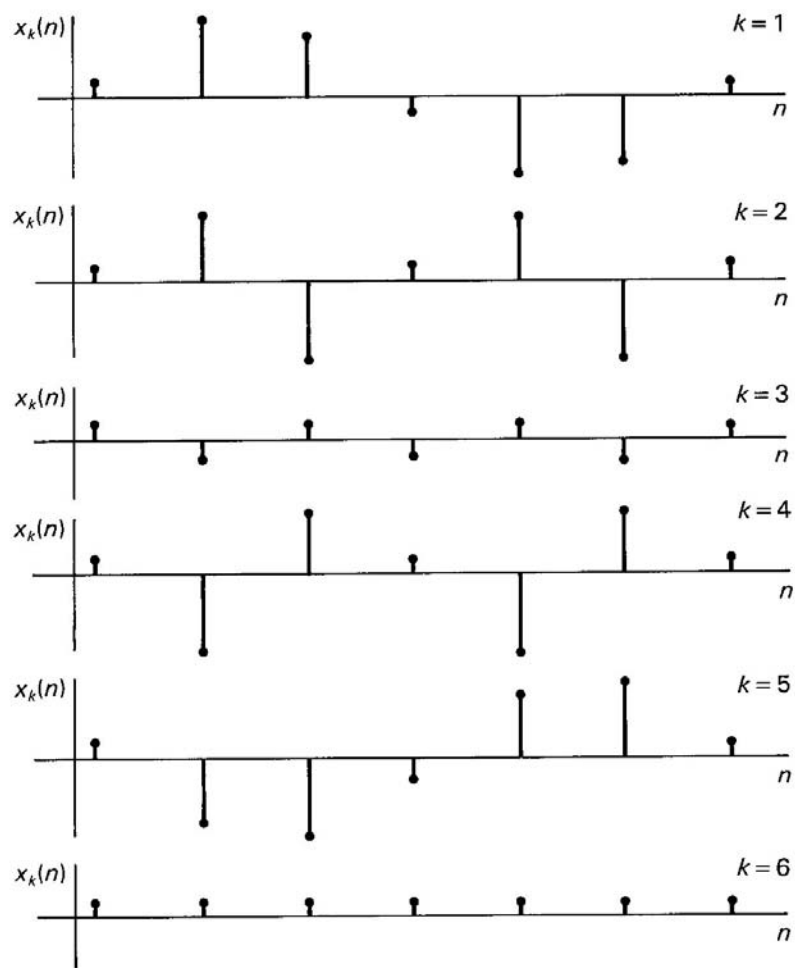
Consideremos o seguinte exemplo em que o sinal $x(n)$ é dado por

$$x(n) = \text{sen}\left(n\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{18}\right)$$

Os harmônicos do sinal serão dados por

$$x_k(t) = \text{sen}\left(nk \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{18}\right)$$

Os harmônicos de ordem $k=1-6$ são mostrados na seguinte figura.



Podemos verificar que para $k=1,2,3$ a frequência dos harmônicos é crescente e a partir de $k=4$ a frequência diminuí até que para $k=6$ o harmônico é constante.

Este fenómeno é fácil de demonstrar através da forma exponencial de uma sinusóide

$$x(t) = A.e^{j(n\theta + \varphi)}$$

usando a relação $N = \frac{2\pi}{\theta}$ podemos escrever

$$x(n) = A.e^{jn\frac{2\pi}{N}} e^{j\varphi}$$

O harmónico de ordem k é dado por

$$x_k(n) = A.e^{jnk\frac{2\pi}{N}} e^{j\varphi}$$

e o harmónico $(N-k)$,

$$x_{N-k}(n) = A.e^{jn(N-k)\frac{2\pi}{N}} e^{j\varphi}$$
$$x_{N-k}(n) = A.e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} e^{jn2\pi} e^{j\varphi}$$

Como $e^{jn2\pi} = 1$ a frequência do harmónico $(N-k)$ é idêntica à frequência do harmónico k . No entanto, devido ao sinal ‘-’ da expoente, a fase não será idêntica.

Se o k for aumentado para $(N+k)$ então por analogia o harmónico de ordem $(N+k)$ será idêntico ao harmónico de ordem k . Para o caso especial de $k=N$, vem

$$x_N(n) = A.e^{j\varphi}$$

Assim, está demonstrado que os sinais discretos não possuem um número infinito de harmônicos, ao contrário dos sinais contínuos. Esta propriedade será mais importante no estudo da Séries de Fourier de sinais discretos.

A exponencial complexa geralmente tem um expoente que é complexo. Isto resulta nos sinais

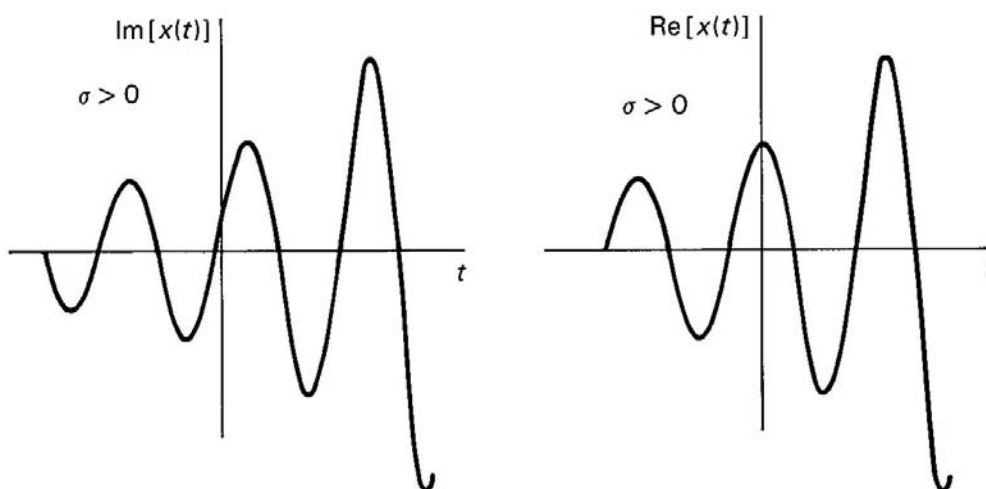
$$\mathbf{x(t) = A.e^{(\sigma + j\omega)t}}$$

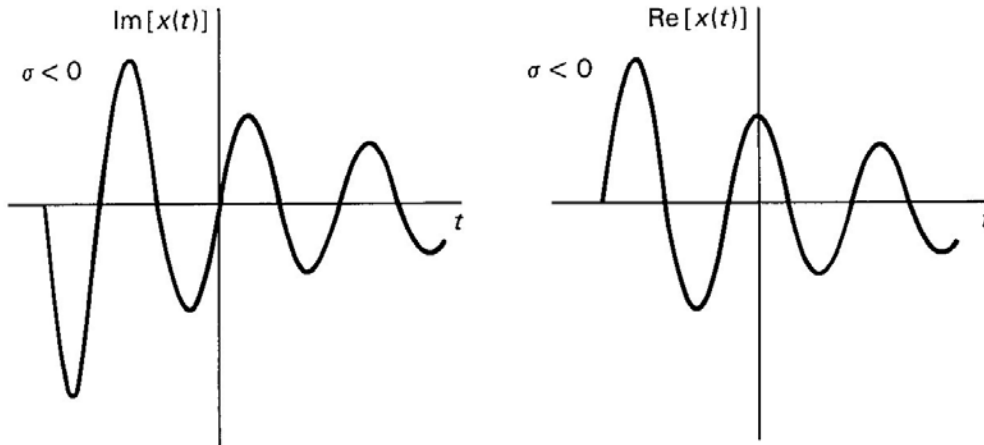
$$\mathbf{x(n) = A.e^{n(\sigma + j\omega)T}}$$

Consideremos o sinal contínuo que pode ser traduzido por

$$\mathbf{x(t) = A.e^{\sigma t} e^{j\omega t}}$$

Os sinais $e^{j\omega t}$ e $e^{\sigma t}$ já são conhecidos e o sinal $\mathbf{x(t)}$ que resulta pode ser considerado como uma sinusóide cuja a amplitude varia exponencialmente.





Exemplo

Duas sinusóides $x(t)$ e $y(t)$ são expressas da seguinte forma

$$x(t) = A.e^{j100t} + A^*.e^{-j100t}$$

$$y(t) = 5 \cos\left(100t + \frac{\pi}{4}\right)$$

onde $A = 2 + j3$.

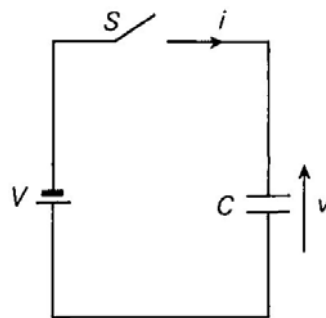
Se o sinal $z(t) = x(t) + y(t)$ for representado por

$$z(t) = R \operatorname{sen}(100t + \varphi)$$

determine o valor de R e φ .

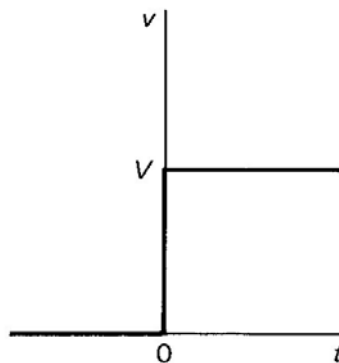
↳ O Degrau Unitário e o Impulso Unitário

Estes dois sinais são diferentes dos anteriores. Para introduzir estes sinais vamos considerar o circuito eléctrico da figura seguinte



O condensador está inicialmente descarregado e o problema coloca-se em determinar um sinal que represente a tensão v aos terminais do condensador e a corrente i no circuito após a fecho do *switch* em $t=0$.

$$v = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & t > 0 \end{cases}$$



Teoria do Sinal

A corrente pode ser obtida através da carga q no condensador usando a relação $q = Cv$,

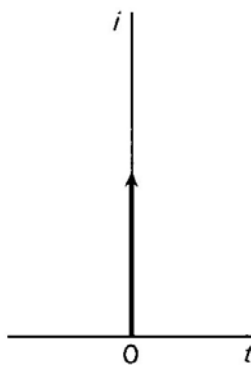
$$q = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ CV & t > 0 \end{cases}$$

Para obter a corrente usa-se a expressão da variação de carga

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

A corrente é proporcional à inclinação da curva tensão/tempo, de onde se conclui que

$$i = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$



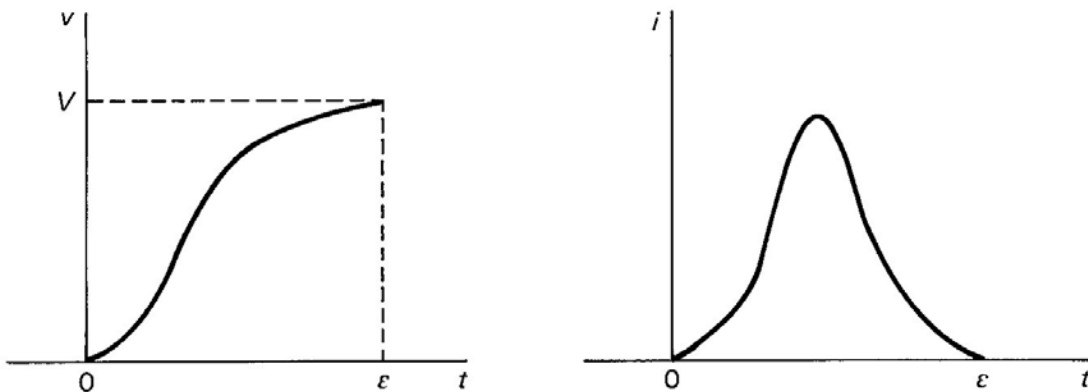
Os sinais da tensão e da corrente são exemplos das funções **Degrau** e **Impulso**, respectivamente.

No entanto, estes sinais servem para descrever estas funções de uma forma pouco rigorosa. Estes sinais servem como uma aproximação e devem ser vistos como uma situação limite das respectivas funções.

Na prática, o *switch* não é ideal e as formas de onda da tensão e corrente apresentadas não seriam as obtidas. Supondo que a resistência do *switch* varia num tempo finito, ou seja,

$$r_{switch} = \begin{cases} \infty & t < 0 \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

Assim, os sinais obtidos da tensão e da corrente serão os seguintes:

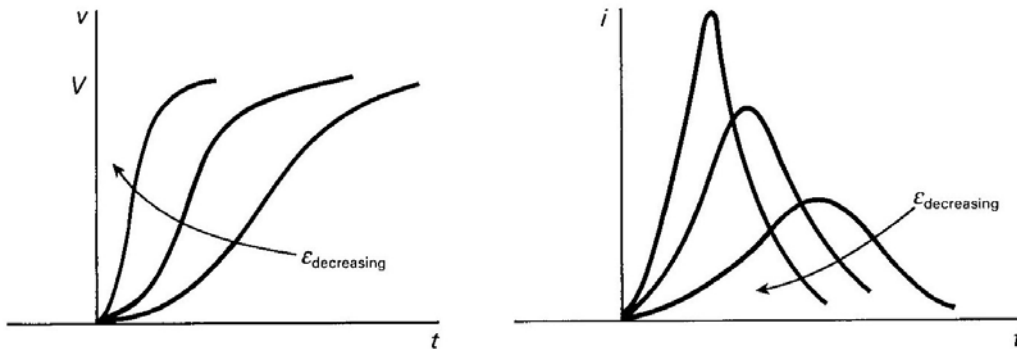


Como não é especificado como varia a resistência do *switch*, as formas detalhadas das curvas são desconhecidas. No entanto, se assumirmos que a tensão V e o condensador C tem um valor unitário, as relações

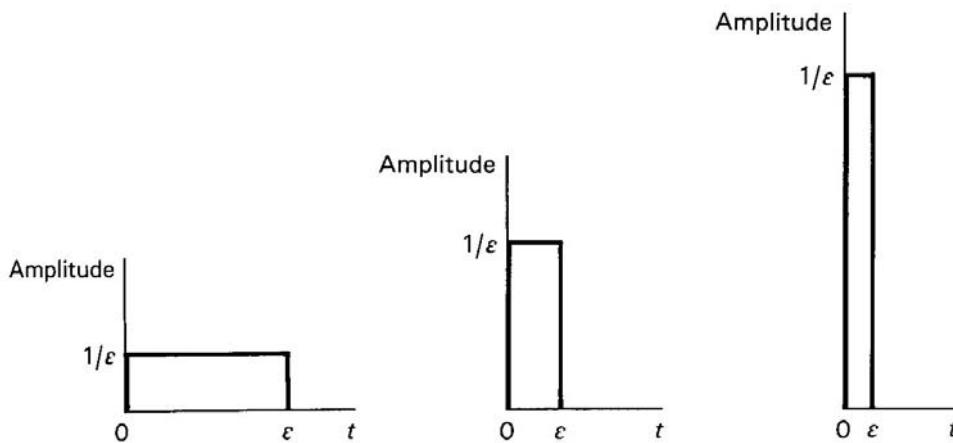
$$i = \frac{dv}{dt} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} i \cdot dt = 1$$

Teoria do Sinal

Supondo agora que ε varia e é muito pequeno, os resultados obtidos serão os seguintes:



No limite, para $\varepsilon \rightarrow 0$, são obtidas as funções Degrau e Impulso; no entanto, uma propriedade adicional da função Impulso é a de que a sua área é igual a um. Se usarmos uma função simples, um pulso rectangular, para descrever a variação da corrente provocada pela redução de ε obtemos as seguintes situações:



Se a amplitude do pulso for multiplicada por uma constante k , vai resultar num impulso de área k .

Podemos usar as seguintes definições para descrever as funções **Degrau Unitário** e **Impulso Unitário**:

Degrau unitário contínuo

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

A função não está definida para $t=0$.

Impulso unitário contínuo

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

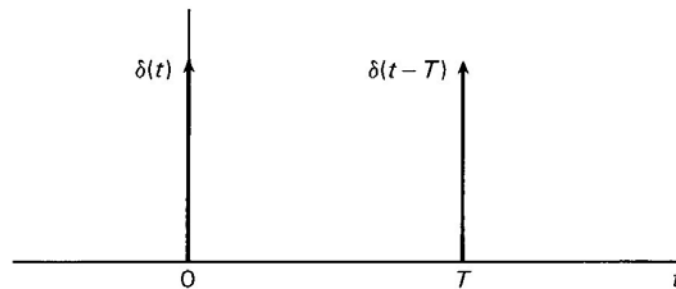
A área limitada pela função é unitária.

É de salientar que estas formas não são rigorosas e servem como casos limite de outras funções convencionais.

Na prática, a função Degrau pode ser obtida com bastante aproximação. A função Impulso não pode ser obtida porque teria que ter uma amplitude infinita.

Como veremos, esta função será útil no caso de aplicarmos pulsos de curta duração a um sistema e este responder invariavelmente com a largura do pulso; então podemos aproximar a entrada a um Impulso ideal. Além disso, esta função é um valor teórico muito utilizado na definição das respostas de sistemas.

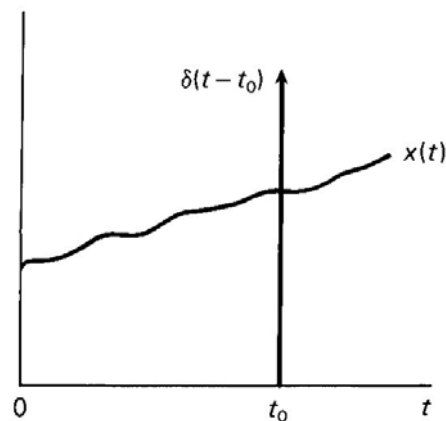
O Impulso também pode ser também deslocado no tempo, tal como as outras funções.



Uma das características mais importantes do Impulso é o seu comportamento quando combinado com outro sinal numa operação de integração. Genericamente pode-se escrever:

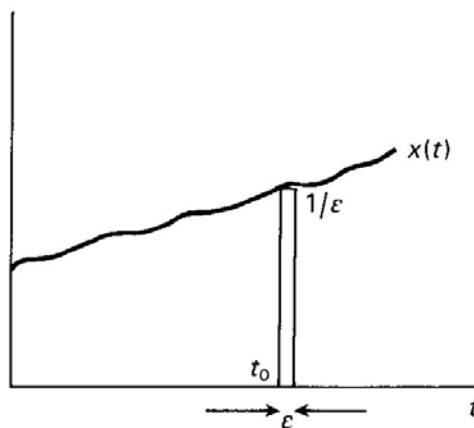
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt$$

Consideremos as funções $x(t)$ e $\delta(t - t_0)$ representadas na figura



A multiplicação e integração destes sinais têm pouco significado.

Para percebermos o integral, o Impulso deve ser traduzido por uma função mais convencional, ou seja, o Impulso deve ser substituído por um pulso curto de duração igual a ε e amplitude variável $\frac{x(t)}{\varepsilon}$. O integral dá a área deste pulso.



Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o pulso tende para uma amplitude constante $\frac{x(t_0)}{\varepsilon}$ e a área desta aproximação é

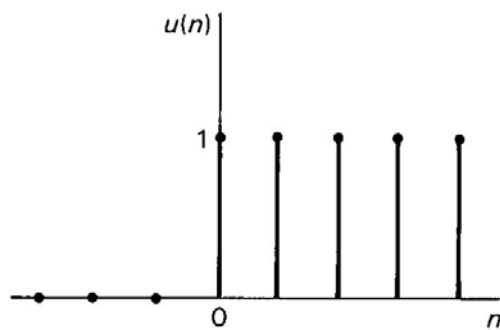
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

O integral toma o valor do sinal $x(t)$ no instante t_0 quando o pulso ocorre.

Os sinais Degrau e Impulso contínuos também têm a versão no tempo discreto como **Degrau unitário discreto** e **Impulso unitário discreto**.

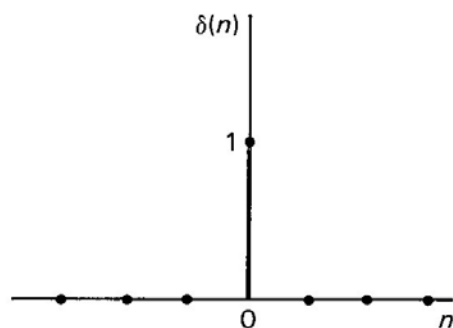
Degrau unitário discreto

$$u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



Impulso unitário discreto

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$



Estas funções têm propriedades análogas às dos sinais contínuos. Em particular,

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^n \delta(k)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \delta(n - n_0) = x(n_0)$$

Caracterização de Sistemas

Neste Capítulo iremos fazer uma descrição matemática dos sistemas. A maior parte das descrições de sistemas relaciona a entrada e a saída através de equações diferenciais. Dependendo da escolha das componentes, uma equação pode descrever muitos sistemas físicos, tais como sistemas contínuos eléctricos, mecânicos, electromecânicos e electrónicos.

Os sistemas discretos também podem ser descritos por equações diferenciais e são facilmente resolvidas através de um computador.

Modelo de Sistemas

Normalmente, os sistemas podem ser traduzidos por subsistemas mais simples. Os subsistemas são descritos de forma a que o sinal de saída seja relacionado com o sinal de entrada.

Um exemplo simples é aquele que relaciona o sinal de saída $y(t)$ com o sinal de entrada $x(t)$ de acordo com a relação:

$$y(t) = 2.x(t)$$

Isto implica que o sistema amplifica o sinal de entrada e dá uma saída que é o dobro do sinal de entrada em todos os instantes.

As equações que descrevem um sistema são idealizações, i. é., são modelos matemáticos que se aproximam ao processo verdadeiro.

Neste Capítulo vamos considerar o sistema como uma “caixa negra” em que apenas só está disponível o modelo matemático que relaciona a entrada com a saída.

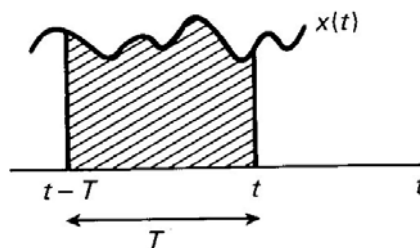
Um exemplo de um sistema discreto é o de um filtro digital:

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)}{4}$$

Esta equação traduz que a saída do sistema, em cada instante discreto, é igual à média da entrada nesse instante e nos três instantes anteriores.

A versão contínua de um sistema deste tipo poderia ser:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) . d\tau$$



Classificação dos Sistemas

A classificação dos sistemas é útil porque depois de feita a classificação de um sistema podemos utilizar as suas propriedades sem termos que as demonstrar.

↳ Sistemas Contínuos/Discretos

Os conceitos de contínuo/discreto usado na classificação de sinais também se estende aos sistemas.

Os sistemas que têm sinais de entrada e de saída contínuos são **Sistemas Contínuos**.

Os sistemas que têm sinais de entrada e de saída discretos são **Sistemas Discretos**.

Também existem sistemas que têm um sinal de entrada de um tipo e o sinal de saída de outro, estes sistemas são **Sistemas Híbridos** e normalmente é possível representar estes sistemas por combinações de subsistemas que são contínuos ou discretos.

↳ Sistemas Lineares/Não-lineares

Um Sistema é Linear

se um sinal de entrada $x_1(t)$ produz uma saída $y_1(t)$

e se um sinal de entrada $x_2(t)$ produz uma saída $y_2(t)$

então se o sistema é linear

$[x_1(t) + x_2(t)]$ produzirá uma saída $[y_1(t) + y_2(t)]$

Esta propriedade é a da **Sobreposição**.

A propriedade da **Homogeneidade** pode ser definida da seguinte forma:

um sinal de entrada $a.x(t)$ produz uma saída $a.y(t)$

Estas duas propriedades podem ainda ser combinadas para melhor definir a linearidade de sistemas, ou seja, para um sistema linear

$[a.x_1(t) + b.x_2(t)]$ produzirá uma saída $[a.y_1(t) + b.y_2(t)]$

em que **a** e **b** são constantes.

Na prática, em todos os sistemas a propriedade da linearidade só se aplica para uma gama limitada de valores de entrada e os sistemas deixam de ser lineares para valores fora dessa gama.

Um Sistema Não-linear é um sistema que não é linear.

↳ Sistemas Invariantes/Variantes no tempo

Vamos supor que uma cassete é tocada às 10h da manhã. Se for novamente tocada às 2h da tarde não é de esperar alguma diferença da tocada de manhã. A propriedade de invariância no tempo verifica-se se um atraso no tempo do sinal de entrada provoca apenas um atraso no tempo do sinal de saída. Matematicamente um **Sistema é Invariante no tempo**:

se um sinal de entrada $x(t)$ provoca uma saída no sistema $y(t)$ então,

$$x(t-T) \text{ provoca uma saída no sistema } y(t-T)$$

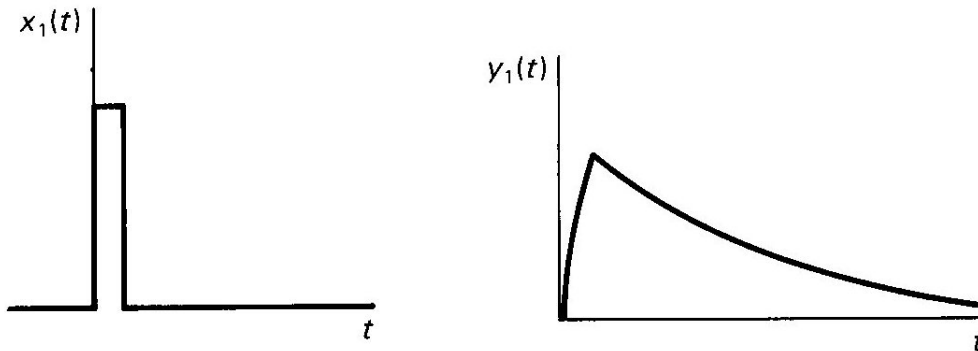
para todos os valores de t e qualquer valor arbitrário de T .

Se um sistema é invariante no tempo e linear é designado por Sistema Linear Invariante no Tempo (LIT). Isto é importante pois muitas vezes um sinal complexo pode ser representado pela combinação linear de vários sinais deslocados no tempo.

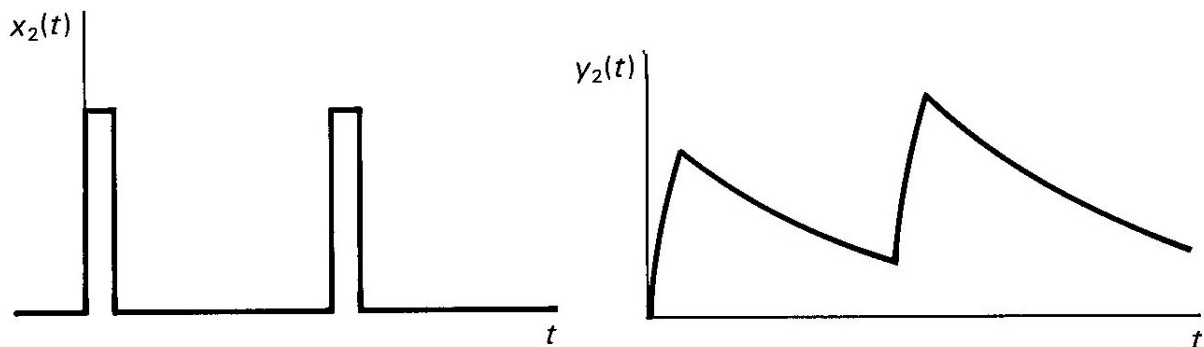
↳ Sistemas Instantâneos/Não-instantâneos

Um **Sistema é Instantâneos** se o sinal de saída em cada instante depende apenas do sinal de entrada nesse mesmo instante.

Consideremos um sistema LIT que origina o sinal de saída mostrado na figura seguinte quando é aplicado um pulso na entrada:



Vamos agora considerar que é aplicado um segundo pulso, e devido à propriedade do sistema ser invariante no tempo, a resposta do segundo pulso será igual à do primeiro mas com um deslocamento no tempo. No entanto a resposta do primeiro pulso ainda está a decrescer e devido à propriedade da linearidade, o sistema soma e dá uma resposta que é a combinação das respostas aos dois pulsos.



Este sistema é obviamente não-instantâneo senão a resposta ao segundo pulso seria igual à do primeiro, trata-se de um **Sistema Não-instantâneo**.

Outra forma de verificar que o sistema é não-instantâneo é que ele “lembra-se” do efeito da entrada anterior. Assim, pode dizer-se que um sistema não-instantâneo tem “memória” e um sistema instantâneo “não tem memória”.

Matematicamente, esta propriedade de “memória” pode ser expressa da seguinte forma:

uma saída $y(t)$ depende de uma entrada $x(t-T)$ para pelo menos um valor de T .

↳ Sistemas Causais/Não-causais

Se um sistema é não-instantâneo, podemos aplicar a definição anterior e dizer que uma saída $y(t)$ pode depender de uma entrada $x(t+T)$, o que, fisicamente, não parece fazer muito sentido visto tornar-se necessário prever o futuro. Assim, os sistemas cujas saídas não dependem de valores de entradas futuras são designados de **Sistemas Causais**.

Um **Sistema Não-causal** é um sistema que não é causal.

Em algumas aplicações, onde a variável independente é o tempo, os dados são guardados para serem processados “off-line”, como por exemplo, em análises económicas e dados sísmicos. Os “futuros” dados podem ser usados para determinar a saída.

↳ Sistemas Estáveis/Não-estáveis

Teoria do Sinal

Este conceito é ilustrado através dos seguintes exemplos de sistemas discretos. Os sistemas discretos têm a vantagem de ser possível obter numericamente o valor do sinal de saída para uma determinada entrada.

Consideremos dois sistemas discretos descrito pelas seguintes equações:

$$\text{Sistema 1} \quad y_1(n) = x(n) + 0,5y_1(n-1)$$

$$\text{Sistema 2} \quad y_2(n) = x(n) + 2,0y_2(n-1)$$

Supondo que é aplicado o sinal de entrada impulso unitário $x(n) = \delta(n)$ aos dois sistemas obteríamos os seguintes resultados:

n	$x(n)$	$y_1(n-1)$	$y_1(n)$	$y_2(n-1)$	$y_2(n)$
0	1	0,0000	1,0000	0	1
1	0	1,0000	0,5000	1	2
2	0	0,5000	0,2500	2	4
3	0	0,2500	0,1250	4	8
4	0	0,1250	0,0625	8	16

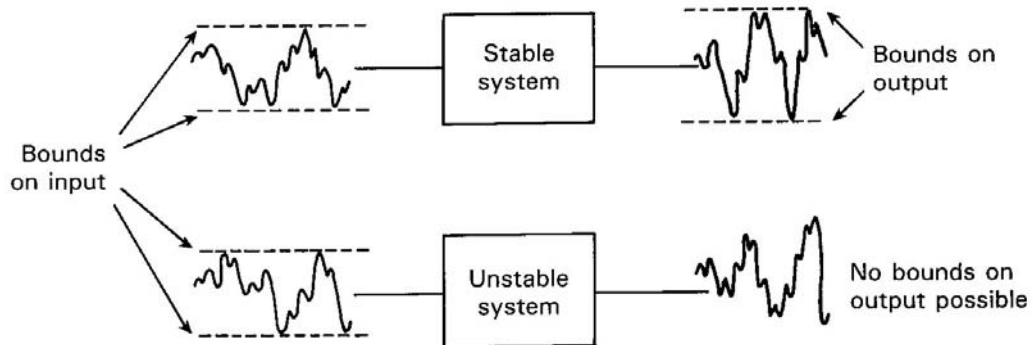
Pelos resultados podemos ver que após desaparecer o sinal de entrada, a saída do Sistema 1 persiste (o sistema tem memória), mas cada saída é igual a metade da sua anterior e quando $n \rightarrow \infty$, $y_1(n) \rightarrow 0$.

No Sistema 2 a saída também persiste após o desaparecimento do sinal de entrada, mas cada saída é igual ao dobro da sua anterior e quando $n \rightarrow \infty$, $y_2(n) \rightarrow \infty$.

O primeiro sistema é estável e o segundo é instável.

Um **Sistema é Estável** se uma entrada limitada produzir uma saída limitada.

Um **Sistema é Instável** se uma entrada limitada produzir uma saída não-limitada.



↳ Sistema de Múltiplas Entradas – Múltiplas Saídas

Um sistema ainda pode ter várias entradas e várias saídas, trata-se de um **Sistema de múltiplas entradas – múltiplas saídas**.



Normalmente este tipo de sistema é mais complexo do que aqueles que apenas têm uma entrada e uma saída.

Teoria do Sinal

As equações que servem para representar os modelos destes sistemas são geralmente apresentadas sob a forma matricial.

Exemplos

1. Considere os três sistemas a seguir apresentados:

a) Um circuito retificador de onda completa cuja saída é o módulo do sinal de entrada:

$$y(t) = |x(t)|$$

b) Um circuito modulador cuja frequência da portadora é ω_c , dá a seguinte saída:

$$y(t) = x(t) \cdot \cos \omega_c t$$

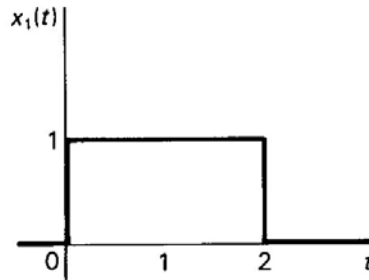
c) Um sistema cuja saída é a média do sinal de entrada durante o período de tempo anterior T_1 :

$$y(t) = \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t x(t) \cdot dt$$

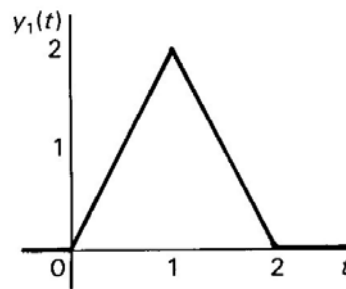
Determine se cada um destes três sistemas é ou não:

- i. Linear
- ii. Invariante no tempo
- iii. Instantâneo

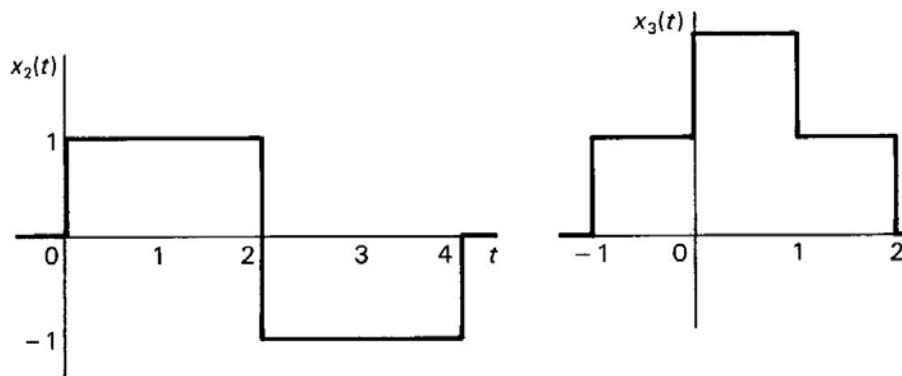
2. Quando o seguinte sinal $x_1(t)$,



é aplicado a um Sistema LTI, a resposta é a seguinte $y_1(t)$



Determine as saídas quando os sinal $x_2(t)$ e $x_3(t)$ são aplicados ao mesmo sistema.



Sistemas Lineares e Invariantes no tempo

No capítulo anterior foram introduzidas e analisadas várias propriedades básicas dos sistemas. Duas delas, Linearidade e Invariância no tempo, assumem um papel importante na análise de sinais e sistemas por duas razões: a primeira é o facto de muitos processos físicos possuírem estas duas propriedades e poderem ser modelados por sistemas Lineares e Invariantes no tempo. Além disso, os sistemas Lineares e Invariantes no tempo (LIT) podem ser analisados em grande pormenor fornecendo um conjunto de ferramentas para análise de sinais e sistemas.

Uma das principais razões da análise de sistemas LIT é devido à propriedade da sobreposição que estes sistema possuem. Uma consequência disto é o facto de podermos representar a entrada de um sistema LIT em termos de uma combinação linear de vários sinais que são básicos. Assim, podemos usar a propriedade da sobreposição para determinar a saída do sistema em função das suas respostas a esses sinais básicos.

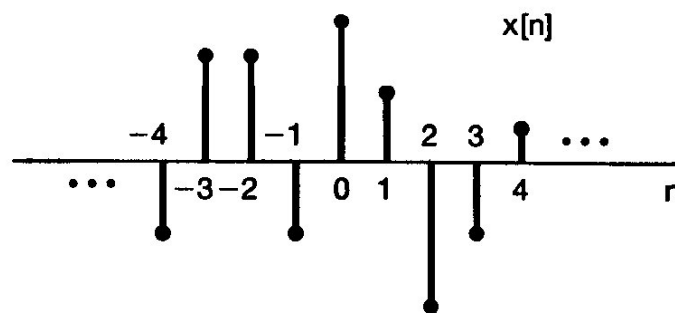
Como veremos a seguir, uma característica importante do Impulso unitário, quer no tempo discreto quer no tempo contínuo, é o facto de qualquer sinal poder ser representado pela combinação linear de vários impulsos deslocados no tempo. Este facto, juntamente com a propriedade da sobreposição e invariância no tempo, permitirão desenvolver uma caracterização de qualquer sistema LIT em função da sua resposta ao Impulso unitário.

Esta representação, designada por **Somatório de Convolução** no caso do tempo discreto e **Integral de Convolução** no caso do tempo contínuo, proporciona uma considerável utilidade analítica no tratamento de sistema LIT.

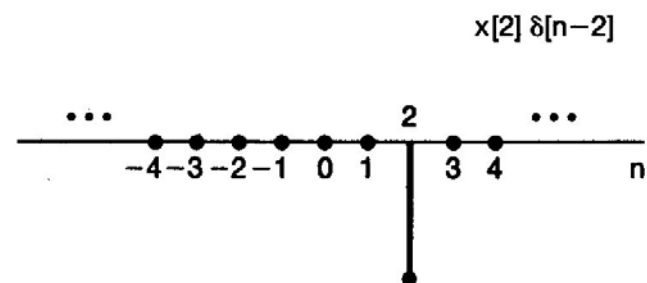
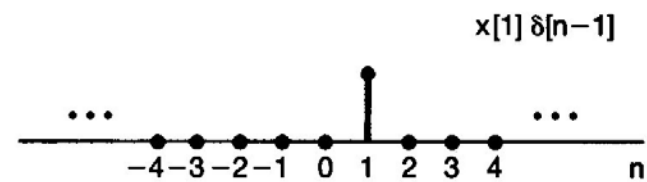
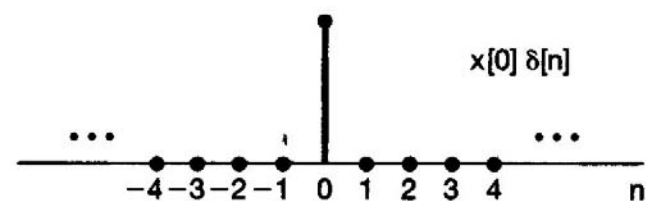
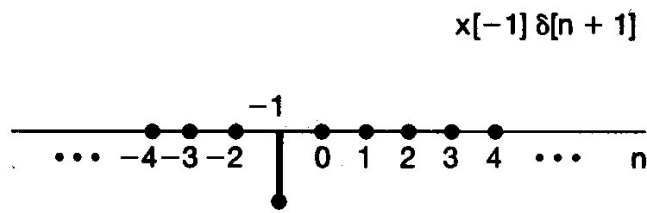
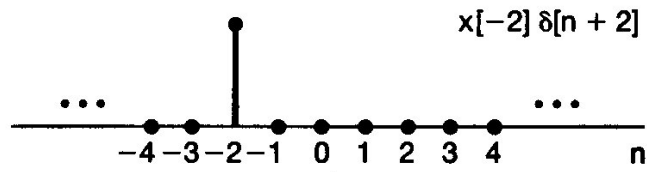
Sistema LIT Discretos – O Somatório de Convolução

A ideia chave de que um Impulso unitário discreto pode ser usado para construir qualquer sinal discreto é pensar num sinal discreto qualquer como uma sequência de impulsos individuais.

Para ver como esta ideia pode ser representada matematicamente vamos considerar o sinal $x(n)$ representado na figura seguinte:



As figuras seguintes representam cinco impulsos que são deslocados no tempo e cuja amplitude é escalonada de modo a que cada impulso tenha o valor de $x(n)$ para o instante particular em que o impulso ocorre.



Ou seja, por exemplo,

$$x(-1).\delta(n+1) = \begin{cases} x(-1), & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x(0).\delta(n) = \begin{cases} x(0), & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x(1).\delta(n-1) = \begin{cases} x(1), & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

Assim, a soma das cinco seqüências da figura é igual ao sinal $x(n)$ para $-2 \leq n \leq 2$. Genericamente, adicionando outros impulsos deslocado no tempo e escalonados em amplitude, podemos escrever:

$$x(n) = \dots + x(-3).\delta(n+3) + x(-2).\delta(n+2) + x(-1).\delta(n+1) + x(0).\delta(n) + \\ + x(1).\delta(n-1) + x(2).\delta(n-2) + x(3).\delta(n-3) + \dots$$

Escrevendo este somatório numa forma mais compacta, obtemos:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).\delta(n-k) \quad (1)$$

Isto corresponde à representação de uma seqüência arbitrária como uma combinação linear de impulsos deslocados no tempo $\delta(n-k)$, cuja peso nesta combinação linear é $x(k)$.

Consideremos a resposta de um sistema linear (que poderá ser variante no tempo) a uma entrada $x(t)$ em que podemos representar a entrada pela expressão (1). Vamos representar por $h_k(n)$ a resposta do sistema linear a um impulso unitário deslocado no tempo $\delta(n-k)$. Assim, a partir da propriedade da sobreposição para sistemas lineares, isto é,

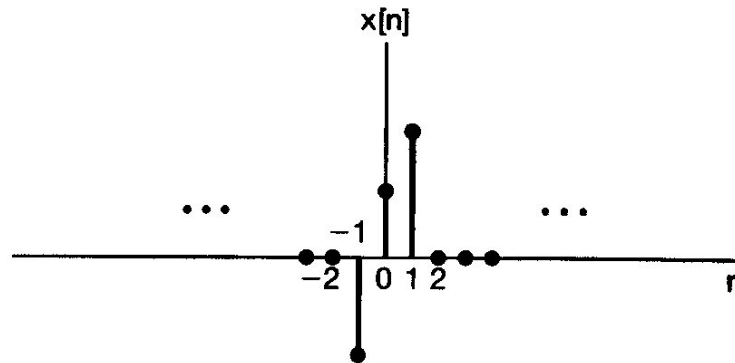
$$\begin{aligned}x(n) &= \sum_k a_k x_k(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + a_3 x_3(n) + \dots \\ \Downarrow \\ y(n) &= \sum_k a_k y_k(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) + a_3 y_3(n) + \dots\end{aligned}$$

a resposta $y(n)$ do sistema linear à entrada $x(n)$ da equação (1) é simplesmente a combinação linear pesada destas respostas básicas. Isto é, com a entrada $x(n)$ num sistema linear expresso pela expressão (1), a saída $y(n)$ pode ser expressa pela expressão:

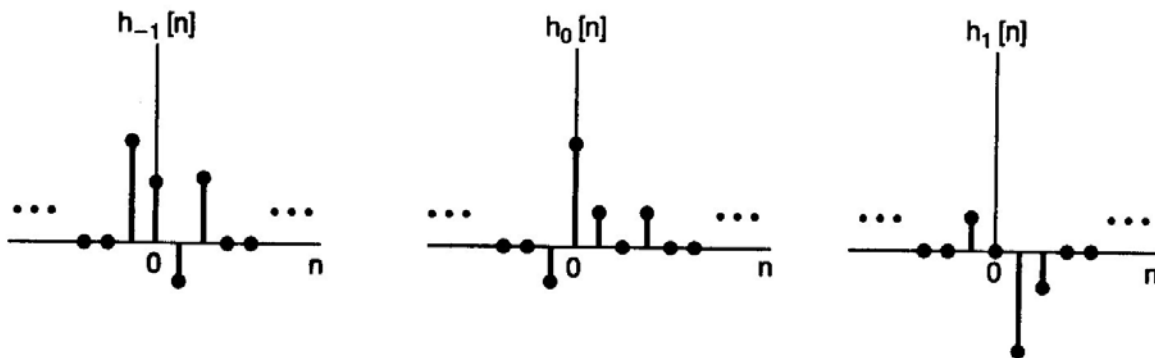
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h_k(n) \quad (2)$$

De acordo com a expressão (2), se soubermos a resposta de um sistema linear a uma conjunto de impulsos unitários deslocados no tempo, podemos construir a resposta a uma entrada arbitrária. Uma interpretação da expressão (2) é apresentada a seguir.

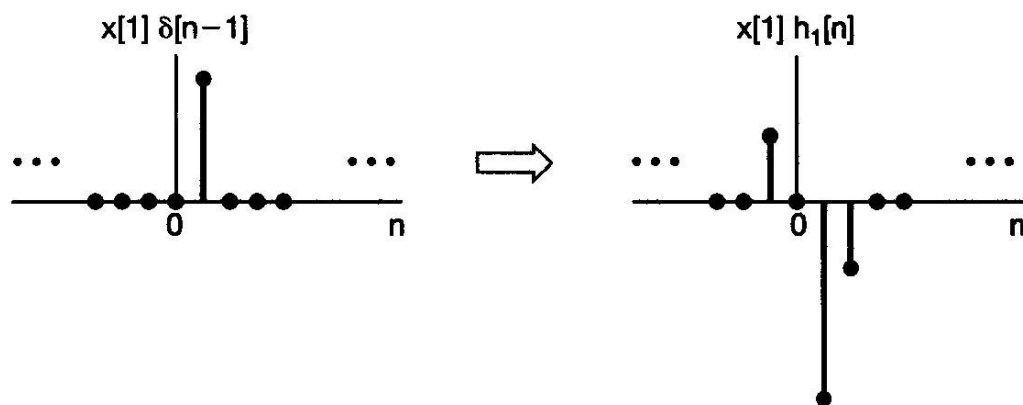
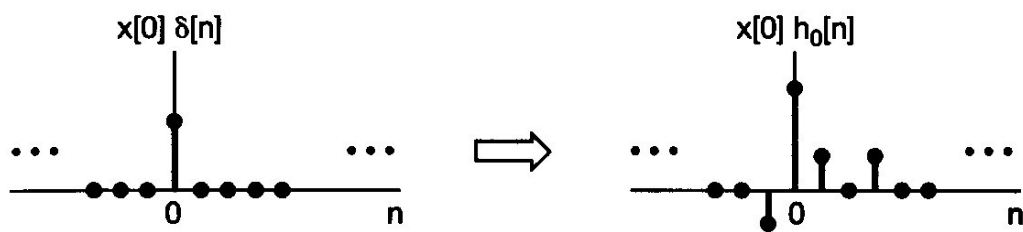
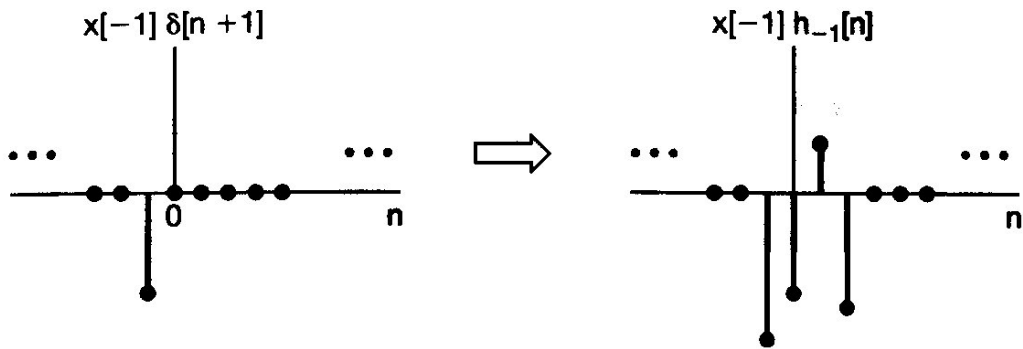
Consideremos o sinal $x(n)$ que é aplicado a um sistema linear



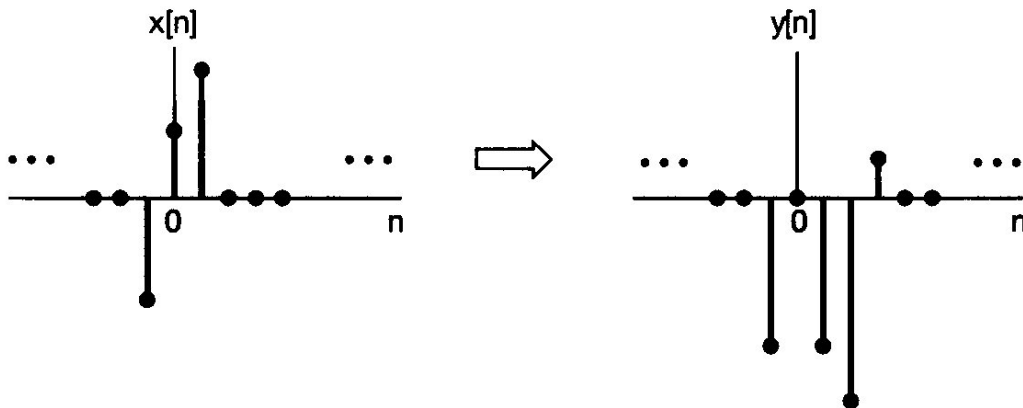
cujas respostas aos sinais $\delta(n+1)$, $\delta(n)$ e $\delta(n-1)$ são $h_{-1}(n)$, $h_0(n)$ e $h_1(n)$, respectivamente,



Como o sinal $x(n)$ pode ser representado como uma combinação linear dos sinais $\delta(n+1)$, $\delta(n)$ e $\delta(n-1)$, a propriedade da sobreposição permite-nos escrever a resposta de $x(n)$ como uma combinação linear das respostas individuais a cada impulso deslocado no tempo. As respostas individuais a estes impulsos com a amplitude escalonada são



O sinal $x(n)$ é a soma das componentes do lado esquerdo das figuras e a saída $y(n)$, pelo propriedade da sobreposição, é a soma das componentes do lado direito da figura, ou seja:



Geralmente, as respostas $h_k(n)$ necessitam ser relacionadas umas com as outras para diferentes valores de k . No entanto, se o sistema linear é também Invariante no tempo, então estas respostas podem ser obtidas umas das outras através do deslocamento no tempo. Especificamente, como $\delta(n-k)$ é uma versão deslocada de $\delta(n)$, a resposta $h_k(n)$ é uma versão deslocada de $h_0(n)$; i.é.,

$$h_k(n) = h_0(n - k)$$

Uma notação mais conveniente é representar $h_0(n)$ por $h(n)$ a que designamos por **Resposta Impulsional Unitária**:

$$h(n) = h_0(n)$$

Isto é, $h(n)$ é a resposta de um sistema LIT quando $\delta(n)$ é a entrada. Assim, para um sistema LIT, a equação (2) torna-se

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).h(n-k)$$



Somatório de Convolução

Esta expressão é conhecida como a Convolução da sequência $x(n)$ e $h(n)$. Simbolicamente, a operação de convolução é representada por:

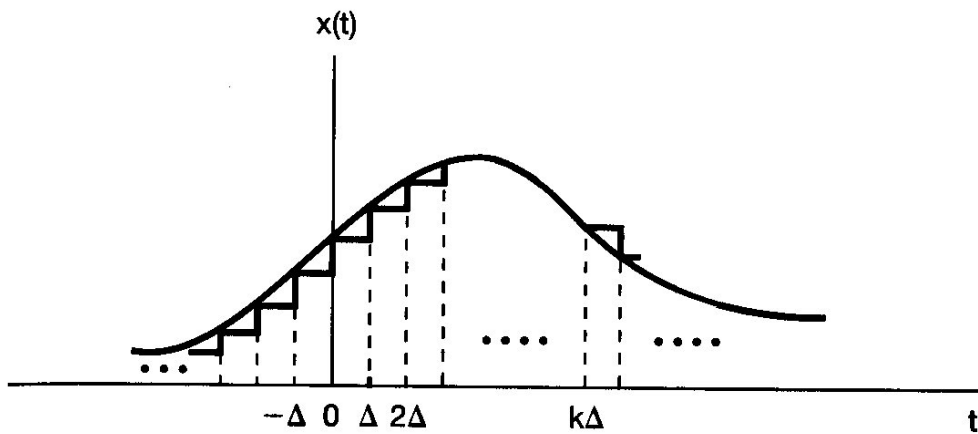
$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Sistema LIT Contínuos – O Integral de Convolução

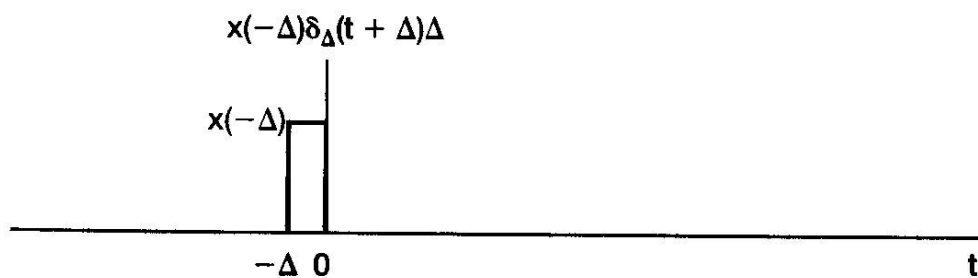
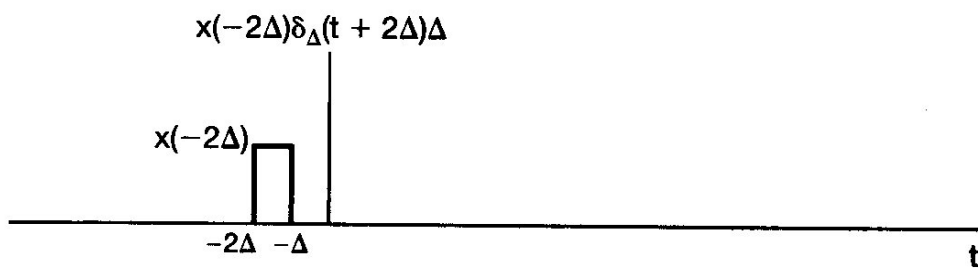
Em analogia com o resultado obtido na secção anterior, o objectivo desta secção é obter uma caracterização completa de um sistema contínuo LIT em função da resposta impulsional unitária.

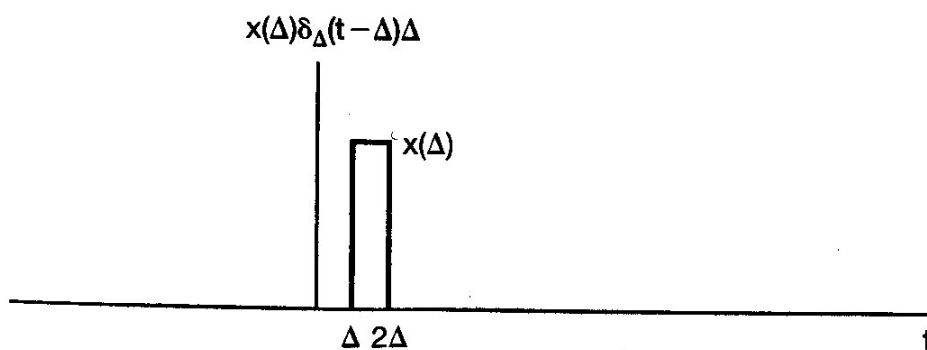
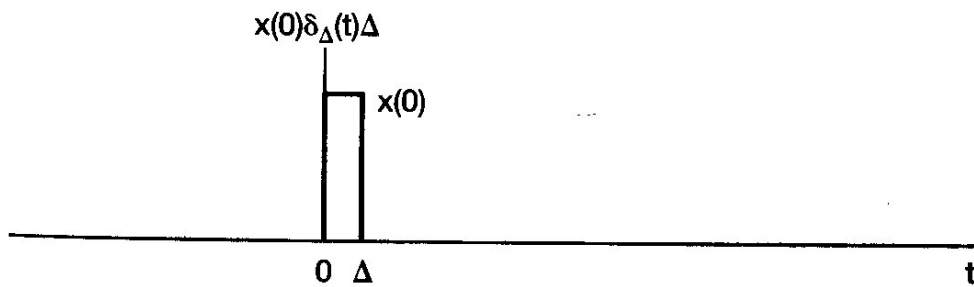
No caso contínuo não podemos exprimir um sinal em função de uma sequências de impulsos pois não existem tempos discretos. No entanto podemos pensar num impulso unitário como a idealização de um pulso curto de modo que a sua duração seja inconsequente para qualquer sistema real.

Para desenvolver a versão contínua da propriedade de deslocamento expressa na expressão (1), vamos considerar um pulso ou uma aproximação “escada”, $\hat{x}(t)$, ao sinal contínuo $x(t)$, como é ilustrado na seguinte figura:



De uma forma análoga à utilizada no caso discreto, esta aproximação pode ser expressa como uma combinação linear de pulsos deslocados no tempo.





Se definirmos

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{outro valor de } t \end{cases}$$

então, desde que $\Delta\delta_{\Delta}(t)$ tenha uma amplitude unitária, tiramos a expressão:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad (3)$$

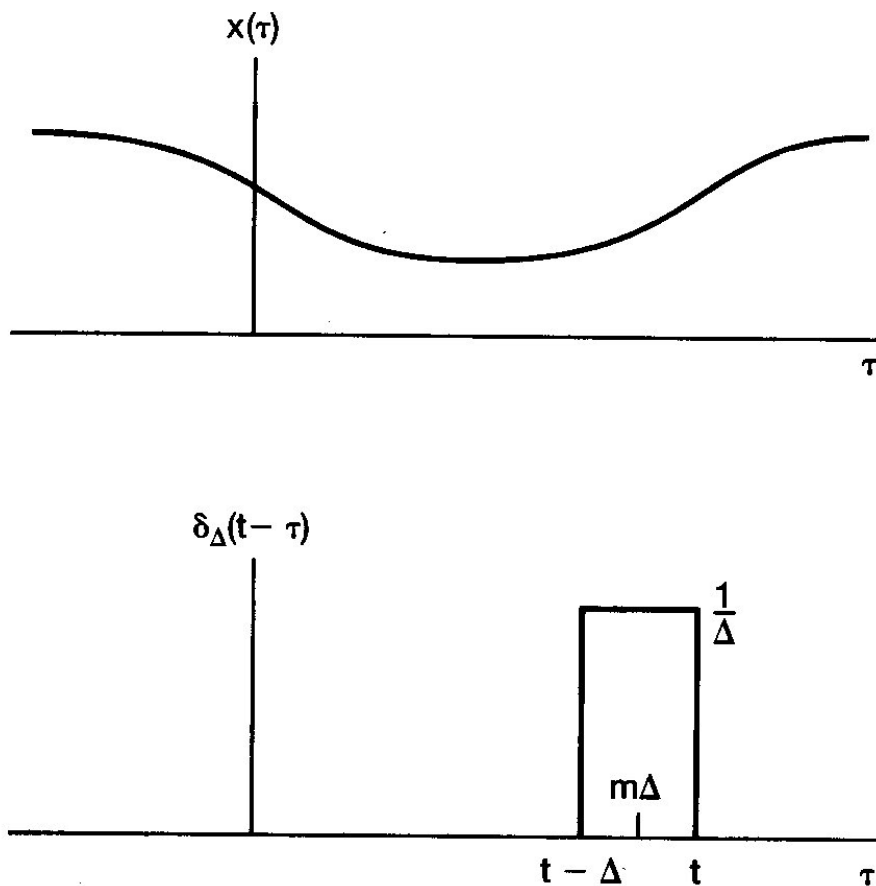
A partir das figuras anteriores, tal como no caso discreto, para cada valor de t , só existe um termo no somatório da expressão (3) que é diferente de zero.

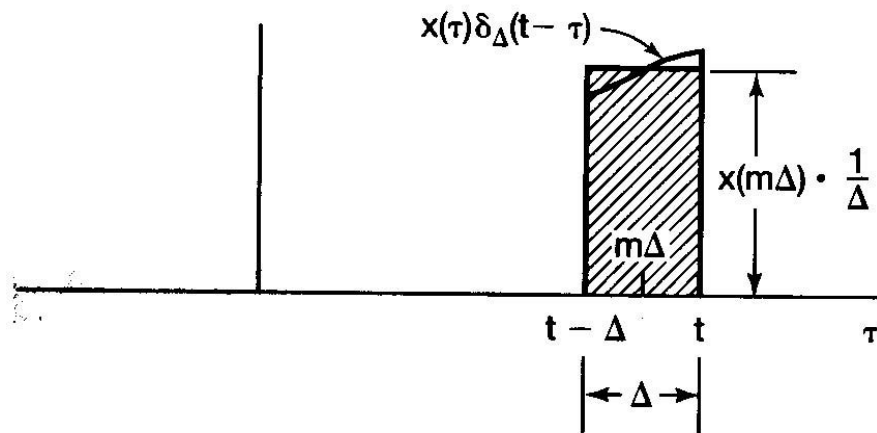
Teoria do Sinal

Quando $\Delta \rightarrow 0$, a aproximação de $\hat{x}(t)$ torna-se cada vez melhor, e no limite torna-se igual a $x(t)$. Por isso,

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad (4)$$

Também, quando $\Delta \rightarrow 0$, o somatório na expressão (4) aproxima-se de um integral. Podemos verificar isto pela interpretação dos seguintes gráficos:





Podemos observar os sinais $x(\tau)$, $\delta_{\Delta}(t-\tau)$ e o seu produto. Também é ilustrada uma região sombreada cuja área aproxima-se à áreas de $x(\tau) \cdot \delta_{\Delta}(t-\tau)$ quando $\Delta \rightarrow 0$. É de notar que a zona sombreada tem uma área igual a $x(m\Delta)$ onde $t-\Delta < m\Delta < t$. Além disso, para este valor de t , só o termo com $k=m$ toma valor diferente de zero na expressão (4) e a expressão toma o valor $x(m\Delta)$. Consequentemente e a partir da definição

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

tiramos a seguinte expressão

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau \quad (5)$$

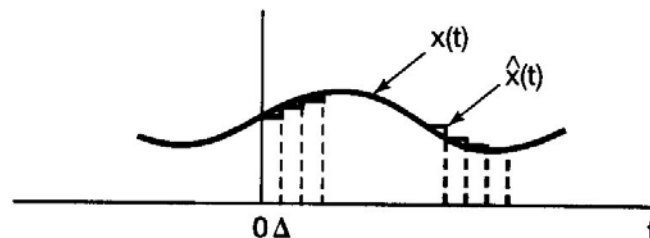
Mais uma vez, devemos olhar para a expressão (5) como uma idealização no sentido de, para valores “suficientemente pequenos” de Δ , a aproximação de $x(t)$ na expressão (3) é essencialmente exacta para qualquer aplicação prática. Assim, a expressão (5) representa uma idealização da expressão (3) considerando Δ infinitamente pequeno.

Como no caso discreto, vamos verificar a seguir que qualquer sinal arbitrário contínuo pode ser visto como a sobreposição de pulsos deslocados no tempo e escalonados em amplitude. Em particular, a aproximação representada na expressão (3) representa o sinal $\hat{x}(t)$ como a soma de várias versões correspondentes ao deslocamento no tempo e escalonamento de amplitude do pulso básico $\delta_\Delta(t)$. Consequentemente, a resposta $\hat{y}(t)$ de um sistema linear a este sinal será a sobreposição das respostas às versões deslocadas e escalonadas de $\delta_\Delta(t)$. Especificamente vamos definir $h_{k\Delta}(t)$ como a resposta de um sistema LIT à entrada $\delta_\Delta(t - k\Delta)$. Assim, a partir da expressão (3) e da propriedade da sobreposição, para sistemas lineares, temos

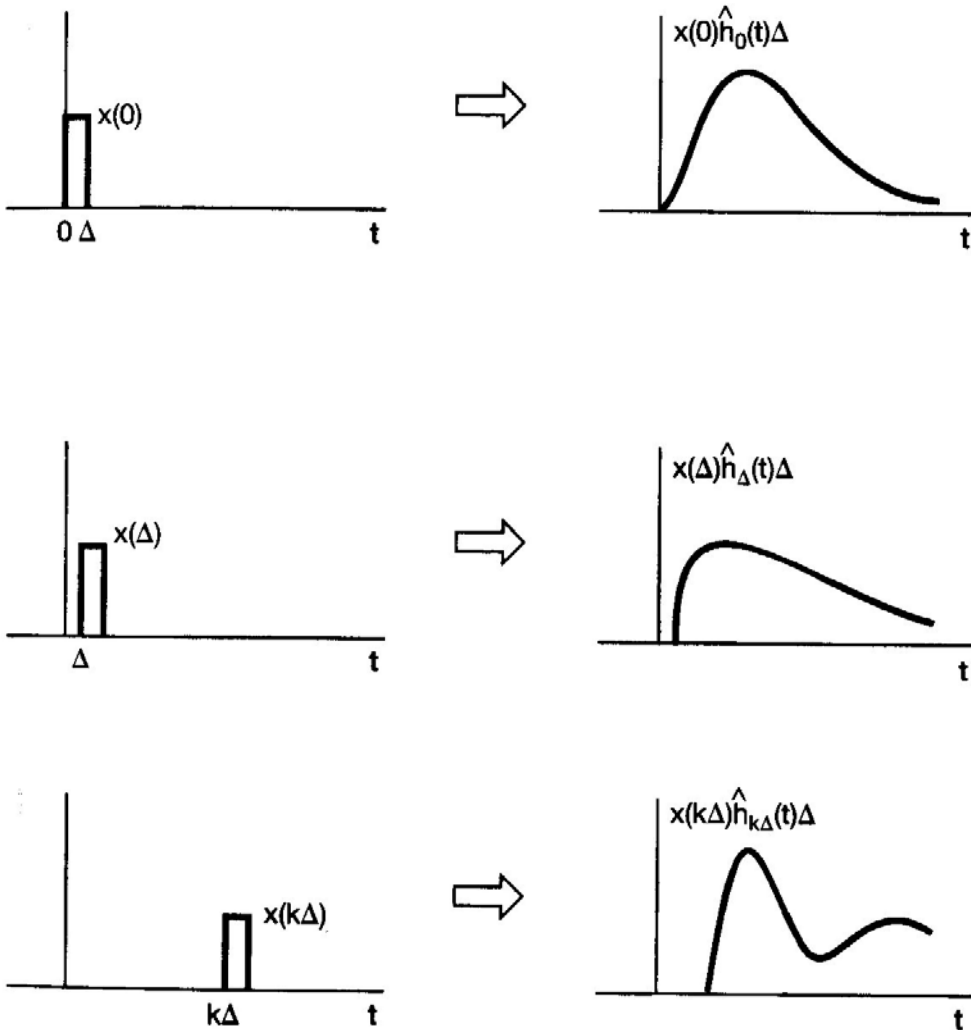
$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta$$

A interpretação desta expressão é semelhante à da expressão (2) do caso discreto.

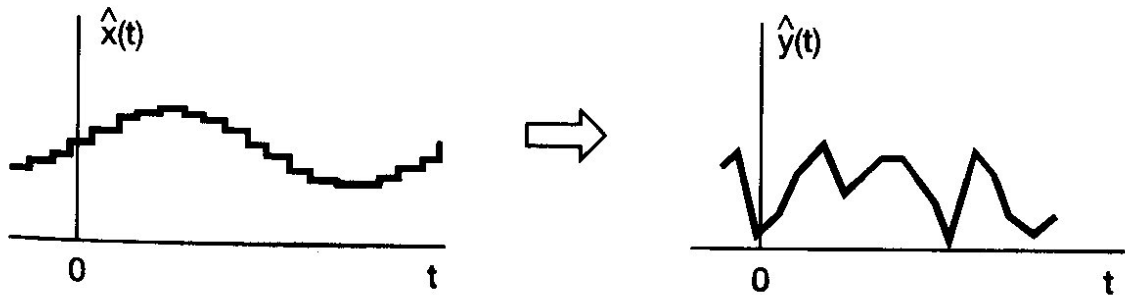
Em particular, vamos considerar o seguinte caso contínuo. Consideremos o sinal $x(t)$ e a sua aproximação $\hat{x}(t)$.



A seguir são apresentadas as respostas do sistema a três dos pulsos pesados na expressão de $\hat{x}(t)$.

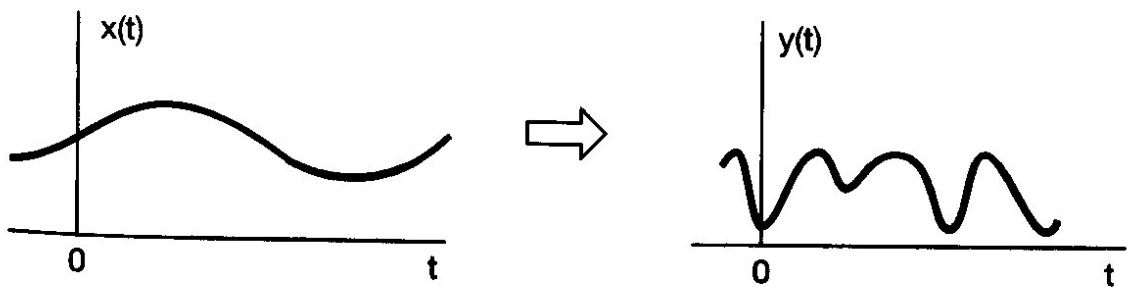


Assim, a saída $\hat{y}(t)$ correspondente a $\hat{x}(t)$ é a sobreposição de todas estas respostas, como é indicado a seguir



Resta agora considerar o que acontece se o valor de Δ se tornar infinitamente pequeno, i. é., $\Delta \rightarrow 0$. Em particular $\hat{x}(t)$ torna-se uma boa aproximação de $x(t)$.

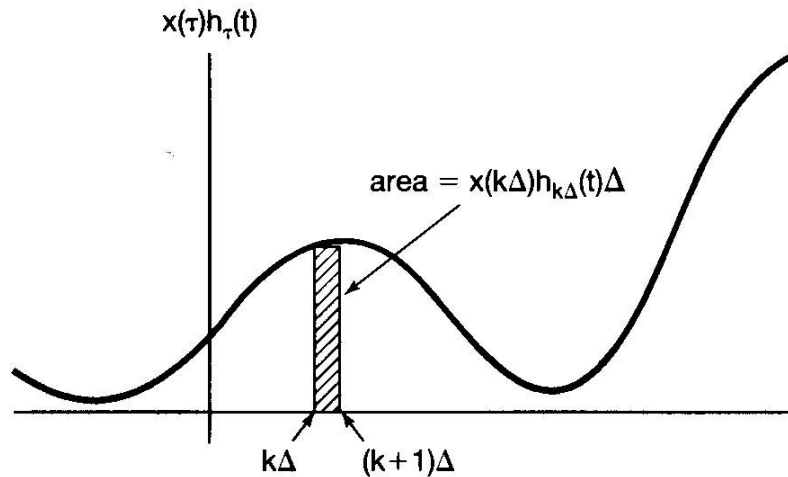
Conseqüentemente, a resposta a $\hat{x}(t)$, nomeadamente $\hat{y}(t)$, torna-se uma boa aproximação de $y(t)$, a resposta ao sinal de entrada $x(t)$.



Quando $\Delta \rightarrow 0$, a duração do pulso $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ torna-se insignificante, logo pode-se aproximar a um impulso unitário e a resposta a este pulso $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ torna-se a resposta a um impulso no caso limite. Assim, se designarmos $\hat{h}_{\tau}(t)$ pela resposta no instante t a um impulso unitário $\delta(t - \tau)$ localizada no instante τ , temos

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta$$

Quando $\Delta \rightarrow 0$ o somatório torna-se integral como pode ser visto na figura,



ou seja

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau \quad (6)$$

Esta expressão representa a forma geral da resposta de um sistema linear no tempo contínuo. Se, além de ser linear, for um sistema invariante no tempo, então podemos considerar

$$h_{\tau}(t) = h_0(t - \tau)$$

i. é., a resposta de um sistema LIT a um impulso unitário $\delta(t - \tau)$, que é deslocado de τ segundos da origem, é uma versão deslocada da resposta ao impulso unitário $\delta(t)$.

Teoria do Sinal

Novamente, para uma notação conveniente, vamos definir como **Resposta Impulsional Unitária** $h(t)$

$$h(t) = h_0(t)$$

Isto é, $h(t)$ é a resposta de um sistema LIT quando $\delta(t)$ é a entrada. Assim, para um sistema LIT, a equação (6) torna-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$



Integral de Convolução

Esta expressão é conhecida como o **Integral de Convolução** do sinal $x(t)$ e $h(t)$. Simbolicamente, a operação de convolução é representada por:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Propriedades de Sistemas LIT

↳ Propriedade Comutativa

Uma propriedade básica da convolução em ambos os casos contínuo e discreto é o facto de tratar-se de uma operação comutativa.

Isto é, no caso discreto

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).x(n-k)$$

e no caso contínuo

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).x(t-\tau).d\tau$$

Esta propriedade é facilmente demonstrada através de uma substituição de variável $r = n - k \Rightarrow k = n - r$

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).x(n-k) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n-r).h(r) = h(n) * x(n)$$

A interpretação do caso contínuo é idêntica.

↳ Propriedade Distributiva

Outra propriedade básica da convolução é a propriedade distributiva. Especificamente, a convolução é distributiva em relação à adição.

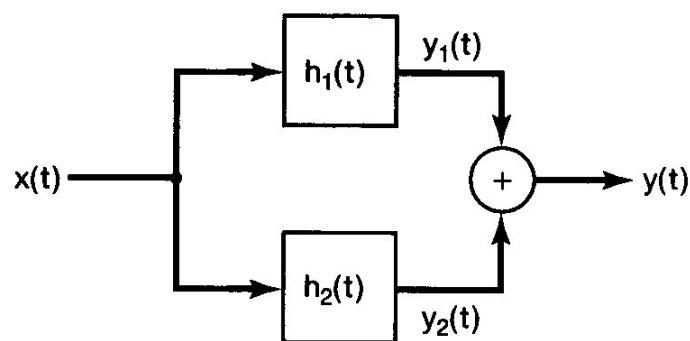
Assim, no caso discreto

$$\mathbf{x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)}$$

e no caso contínuo

$$\mathbf{x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)}$$

Consideremos o seguinte sistema constituído por dois sistemas LIT em paralelo.



$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

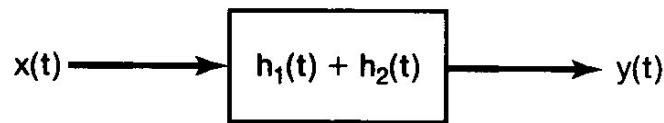
e

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

a saída do sistema vem

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$



↳ Propriedade Associativa

Outra propriedade muito importante e útil da convolução é a propriedade associativa.

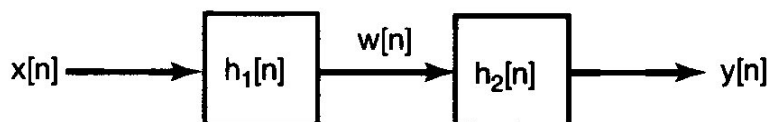
Isto é, no caso discreto

$$x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$$

e no caso contínuo

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

A interpretação desta propriedade é fácil de perceber se recorrermos às seguintes figuras

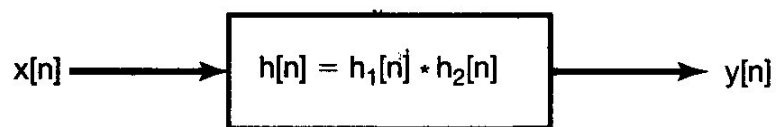


Neste sistema temos

$$y(n) = w(n) * h_2(n)$$

$$y(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$$

Este sistema é equivalente ao seguinte



Neste caso temos

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

Série de Fourier em Tempo Contínuo

Uma técnica de análise comum em engenharia é a partição de um problema complexo noutros mais simples. Estes são depois resolvidos e a solução final é a soma das soluções simples encontradas. Um exemplo é o uso da expansão em Série de Taylor de uma função, onde a função é expressa por uma constante, mais uma função rampa, mais uma função parabólica, etc.

$$f(t) = f(0) + f'(0).t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \dots$$

onde

$$f'(0) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0} ; f''(0) = \left. \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right|_{t=0} ; \text{etc.}$$

O problema que envolve $f(t)$ é resolvido considerando apenas a constante, depois considerando só a função rampa, etc. A solução final é a soma destas soluções.

É necessário satisfazer três requisitos para que a solução acima descrita seja válida e útil. Primeiro, deve ser possível expressar o problema como um número de problemas mais simples. Depois, o problema deve ser linear, de modo que a solução da soma das funções seja igual à soma das soluções considerando uma função de cada vez.

Teoria do Sinal

O terceiro requisito é o de a contribuição das soluções simples para a solução final serem desprezáveis após considerar alguns termos; de outro modo, a vantagem desta técnica pode ser perdida se for necessário considerar uma grande quantidade de soluções.

Neste capítulo vamos considerar uma das mais importantes ferramentas de análise de sinais e sistemas Lineares e Invariantes no tempo (LIT); esta ferramenta é usada para expressar sinais periódicos complexos como a soma de sinais mais simples. Os sinais mais simples são sinusóides, e a soma resultante é designada de *Série de Fourier*, ou *Expansão de Fourier*.

Aproximação de Funções Periódicas

No estudo da Série de Fourier consideramos a variável independente das funções envolvidas o tempo. No entanto, todas as ferramentas desenvolvidas neste capítulo podem ser aplicadas a outras variáveis que não sejam o tempo.

Uma função $x(t)$ é dita periódica, com período T , se a relação

$$x(t) = x(t + T)$$

for satisfeita para todos os valores de t .

Por exemplo, a função $\cos \omega t$ é uma função periódica visto que

$$\cos \omega(t + T) = \cos(\omega t + \omega T) = \cos\left(\omega t + \omega \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos \omega t$$

Além disso, as funções periódicas têm as seguintes propriedades:

1. As funções periódicas existem indefinidamente no tempo; na equação $x(t) = x(t + T)$, não é estabelecido um limite para o valor de t ;
2. Uma função periódica com período T também é periódica com período nT , onde n é um número inteiro. Assim, para uma função periódica,

$$x(t) = x(t + T) = x(t + nT)$$

3. É definido como *Período fundamental* T_0 como o mínimo valor do período $T > 0$ que satisfaça $x(t) = x(t + T)$. A *Frequência fundamental* é definida por $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Formas da Série de Fourier

Para introduzir a Série de Fourier, vamos considerar a seguinte função como exemplo

$$x(t) = 10 + 3 \cos \omega_0 t + 5 \cos(2\omega_0 t + 30^\circ) + 4 \text{sen} 3\omega_0 t$$

É fácil verificar que este sinal é periódico com período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Vamos agora traduzir esta equação noutra forma matemática aplicando as relações de Euler:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

vem

$$\begin{aligned} x(t) = & 10 + \frac{3}{2} \left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right] + \frac{5}{2} \left[e^{j(2\omega_0 t + 30^\circ)} + e^{-j(2\omega_0 t + 30^\circ)} \right] \\ & + \frac{4}{2j} \left[e^{j3\omega_0 t} - e^{-j3\omega_0 t} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x(t) = & \left(2e^{j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-j3\omega_0 t} + \left(2,5e^{-j\frac{\pi}{6}} \right) e^{-j2\omega_0 t} + 1,5e^{-j\omega_0 t} \\ & + 10 + 1,5e^{j\omega_0 t} + \left(2,5e^{j\frac{\pi}{6}} \right) e^{-j2\omega_0 t} + \left(2e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-j3\omega_0 t} \end{aligned}$$

Esta equação ainda pode ser expressa na forma compacta

$$\begin{aligned} x(t) = & C_{-3} e^{-j3\omega_0 t} + C_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + C_{-1} e^{-j\omega_0 t} \\ & + C_0 + C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{-j2\omega_0 t} + C_3 e^{-j3\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Os coeficientes C_k para esta série de funções exponenciais complexas são:

k	C_k	C_{-k}
0	10	-
1	1,5	1,5
2	$2,5 \angle 30^\circ$	$2,5 \angle -30^\circ$
3	$2 \angle -90^\circ$	$2 \angle 90^\circ$

É de notar que $C_k = C_{-k}^*$, onde * representa o complexo conjugado.

Podemos também verificar que a soma de funções sinusoidais pode ser convertida para a soma de funções exponenciais complexas.

Para um sinal periódico $x(t)$, a **Forma Exponencial da Série de Fourier** é dada pela equação:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad C_k = C_{-k}^*$$

A frequência ω_0 é designada de *Frequência fundamental* ou do *Primeiro harmónico*, e a frequência $k\omega_0$ é designada como a frequência do *harmónico de ordem k*. Os coeficientes C_k são designados por ***Coefficientes de Fourier***.

Na generalidade o coeficiente C_k é complexo, com C_{-k} igual ao conjugado de C_k . O coeficiente C_k pode ser expresso como, com $-\infty < k < \infty$,

$$C_k = |C_k| e^{j\theta_k}$$

Teoria do Sinal

Como $C_k = C_{-k}^*$, então $\theta_{-k} = -\theta_k$. Para um determinado valor de k , a soma dos dois termos com a mesma frequência $k\omega_0$ na forma exponencial da série de Fourier vem:

$$\begin{aligned}C_{-k}e^{-jk\omega_0 t} + C_k e^{jk\omega_0 t} &= |C_k| e^{-j\theta_k} e^{-jk\omega_0 t} + |C_k| e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t} \\ &= |C_k| \left[e^{-j(k\omega_0 t + \theta_k)} + e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} \right] \\ &= 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k)\end{aligned}$$

Assim, para uns determinados coeficientes de Fourier C_k , podemos determinar facilmente a **Forma Trigonométrica Combinada da Série de Fourier**:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Uma terceira forma da Série de Fourier pode ser obtida aplicando a identidade trigonométrica

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

O uso desta identidade leva-nos a

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[2|C_k| \cos \theta_k \cdot \cos k\omega_0 t - 2|C_k| \operatorname{sen} \theta_k \cdot \operatorname{sen} k\omega_0 t \right]$$

A partir das relações de Euler, podemos definir os coeficientes A_k e B_k como

$$2C_k = 2|C_k| e^{j\theta_k}$$

$$2C_k = 2|C_k| \cos \theta_k + 2j|C_k| \operatorname{sen} \theta_k$$

$$2C_k = A_k - jB_k$$

onde A_k e B_k são reais. Substituído na fórmula anterior, obtemos a **Forma Trigonométrica da Série de Fourier**.

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos kw_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \operatorname{sen} kw_0 t$$

com $A_0 = C_0$.

Coefficientes de Fourier

A seguir vamos calcular os coeficientes de Fourier. Muitas aproximações podem ser consideradas para determinar a equação de C_k . Vamos considerar uma aproximação que é a de assumir que a forma exponencial da série de Fourier é válida, isto é, que os coeficientes C_k podem ser obtidos para satisfazer a equação

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkw_0 t}$$

onde $x(t)$ é uma função periódica com frequência fundamental igual a w_0 . Em primeiro vamos multiplicar cada membro por $e^{-jnw_0 t}$, com n um número inteiro, e depois integrar de $t=0$ a $T=T_0$.

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-jnw_0 t} dt = \int_0^{T_0} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkw_0 t} \right] e^{-jnw_0 t} dt$$

Alterando a ordem do somatório e do integral

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-jnw_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \left[\int_0^{T_0} e^{j(k-n)w_0 t} dt \right]$$

Usando as relações de Euler, o termo geral do somatório pode ser expresso como,

$$C_k \int_0^{T_0} e^{j(k-n)w_0 t} dt = C_k \int_0^{T_0} \cos(k-n)w_0 t .dt + jC_k \int_0^{T_0} \text{sen}(k-n)w_0 t .dt$$

O segundo termo é nulo porque é a integração da função seno num número inteiro de períodos. Isto também se verifica para o primeiro termo excepto para $k=n$. Para este caso,

$$C_k \int_0^{T_0} \cos(k-n)w_0 t .dt \Big|_{k=n} = C_n \int_0^{T_0} dt = C_n T_0$$

de onde concluímos que

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-jnw_0 t} dt = C_n T_0$$

Resolvendo em ordem a C_n

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

obtemos a expressão que relaciona o sinal periódico $x(t)$ e o coeficiente de Fourier C_n . Como a função integrada é periódica com período T_0 , os limites do integral podem ser generalizados para t_1 e t_1+T_0 , onde t_1 é um instante arbitrário. Podemos expressar isto como a integração num período, ou seja,

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Podemos agora considerar o coeficiente C_0 como

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

Assim, C_0 é o *valor médio* do sinal $x(t)$. Este valor médio também é designado por *nível ou valor dc (contínuo)* na análise de circuitos. Para algumas formas de onda é fácil determinar o valor médio apenas por inspeção.

Para determinar os coeficientes da forma trigonométrica da série de Fourier vamos aplicar novamente as relações de Euler à expressão de C_k , ou seja,

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) (\cos k\omega_0 t - j \operatorname{sen} k\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t dt - j \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen} k\omega_0 t dt \end{aligned}$$

Como

$$2C_k = A_k - jB_k$$

então

$$A_k = 2 \operatorname{Re}[C_k]$$

$$B_k = -2 \operatorname{Im}[C_k]$$

ou seja

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos kw_0 t . dt$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \operatorname{sen} kw_0 t . dt$$

Visto que

$$A_0 = C_0$$

tiramos

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

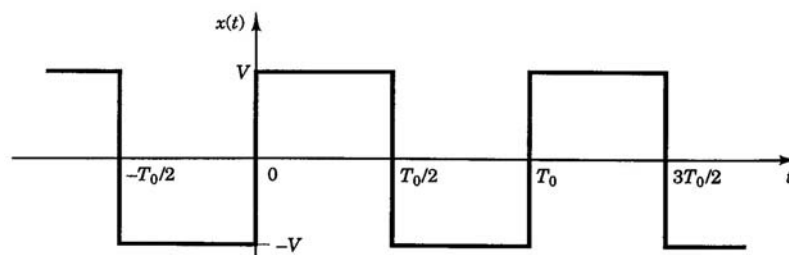
A forma exponencial e a forma combinada da série de Fourier são provavelmente as mais úteis. Os coeficientes da forma exponencial são os mais fáceis de determinar, enquanto que as amplitudes dos vários harmónicos são directamente determinados na forma combinada trigonométrica.

Normalmente determina-se o valor de C_k ; se for necessário determinar as amplitudes dos harmônicos, estas são iguais a $2|C_k|$; no entanto, a amplitude dc é igual a C_0 .

Para representar graficamente os harmônicos de um sinal usa-se o *Espectro de frequências* do sinal. Um espectro de frequências é geralmente um gráfico que mostra, de alguma forma, as amplitudes ($2|C_k|$) – *espectro de amplitudes* – e as fases ($\arg C_k$) – *espectro de fases* – dos harmônicos do sinal, em função da frequência.

Exemplo

Considere onda quadrada mostrada a seguir:



- Escreva a forma exponencial da série de Fourier do sinal;
- Escreva a forma combinada trigonométrica da série de Fourier do sinal;
- Escreva a forma trigonométrica da série de Fourier do sinal;
- Faça um esboço do espectro de amplitude e o espectro de fases do sinal.

Efeitos de Simetria

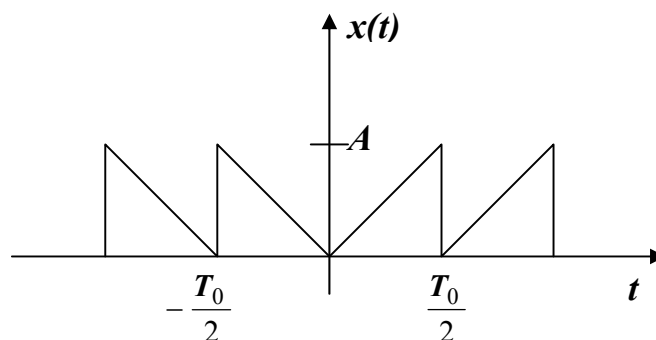
O cálculo da série de Fourier de um sinal $x(t)$ pode tornar-se mais simples se detectarmos à partida que o sinal possui uma determinada simetria.

Um sinal tem simetria par se $x(t) = x(-t)$, simetria ímpar se $x(t) = -x(-t)$, e ainda pode ter simetria de meia onda se $x(t) = x(t + \frac{T}{2})$.

Vamos verificar as simplificações nos cálculos dos coeficientes de Fourier para sinais com simetria par e ímpar.

↳ Simetria Par

Consideremos o sinal a seguir apresentado para o qual vamos determinar os coeficientes da forma trigonométrica da série de Fourier.



A função está definida num período da seguinte forma:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{2A}{T_0} \cdot t & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{2A}{T_0} \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

O valor médio A_0 do sinal é:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 \left(-\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot dt$$

$$A_0 = 2 \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot dt = \frac{A}{2}$$

O coeficiente A_k ,

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 \left(-\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot \cos kw_0 t \cdot dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot \cos kw_0 t \cdot dt$$

$$A_k = 2 \cdot \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot \cos kw_0 t \cdot dt = \begin{cases} -\frac{4A}{k^2 \pi^2} & k \text{ impar} \\ 0 & k \text{ par} \end{cases}$$

O coeficiente B_k ,

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 \left(-\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot \text{sen } kw_0 t \cdot dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot \text{sen } kw_0 t \cdot dt$$

$$B_k = 0$$

Genericamente, para um sinal $x(t)$ qualquer com simetria par:

$$A_0 = \frac{2}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

$$A_k = \frac{4}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos kw_0 t \cdot dt$$

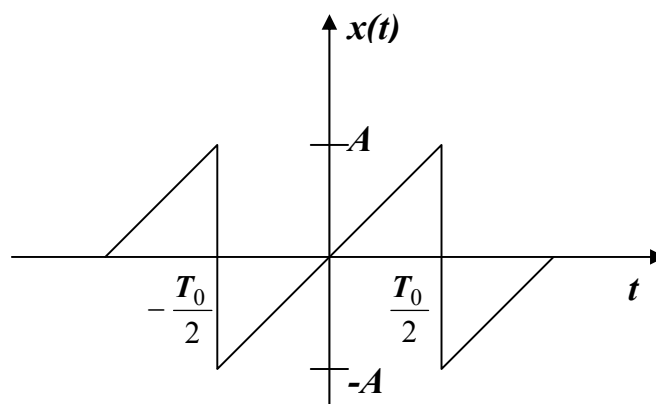
$$B_k = 0$$

$$C_0 = A_0$$

$$C_k = \frac{A_k}{2}$$

↳ Simetria Impar

Consideremos o sinal a seguir apresentado para o qual vamos determinar os coeficientes da forma trigonométrica da série de Fourier.



Vamos definir a função num período.

$$x(t) = \frac{2A}{T_0} \cdot t, \quad -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$$

O valor médio A_0 do sinal é:

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot dt$$

$$A_0 = 0$$

Teoria do Sinal

O coeficiente A_k ,

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot \cos kw_0 t \cdot dt$$

$$A_k = 0$$

O coeficiente B_k ,

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot \text{sen } kw_0 t \cdot dt$$

$$B_k = 2 \cdot \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\frac{2A}{T_0} \cdot t \right) \cdot \text{sen } kw_0 t \cdot dt = \begin{cases} \frac{2A}{k\pi} & k \text{ impar} \\ -\frac{2A}{k\pi} & k \text{ par} \end{cases}$$

Genericamente, para um sinal $x(t)$ qualquer com simetria impar:

$$A_0 = 0$$

$$A_k = 0$$

$$B_k = \frac{4}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}} x(t) \text{sen } kw_0 t \cdot dt$$

$$C_0 = 0$$

$$C_k = -j \frac{B_k}{2}$$

Propriedades da Série de Fourier

Iremos ver algumas propriedades da Série de Fourier. Qualquer função periódica $x(t)$ que satisfaça as condições de Dirichet pode ser expandida em série de Fourier. As condições de Dirichlet são:

1. $x(t)$ tem um número finito de descontinuidades num período;
2. $x(t)$ tem um número finito de máximos e mínimos num período;
3. $x(t)$ é limitada.

A terceira condição tem sido expandida para incluir funções singulares, e pode ser descrita por

$$3a. \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

Qualquer função do tempo que se pode encontrar em sistemas físicos satisfazem estas condições.

Uma função $x(t)$ que satisfaz as condições de Dirichlet:

1. A série de Fourier converge para o valor de $x(t)$ em todos os pontos de continuidade onde $x(t)$ tem derivada à direita e à esquerda, sendo essas derivadas iguais ou não. A derivada à direita de $x(t)$ em $t=t_a$ é definida como a derivada quando t tende para t_a pelo lado direito. A derivada à esquerda é a derivada quando t tende para t_a pelo lado esquerdo.

2. Se $x(t)$ tem uma descontinuidade num ponto, a série de Fourier converge para a média dos limites de aproximação de $x(t)$ pelo lado direito e pelo lado esquerdo; isto é, em qualquer ponto t_a ,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t_a} = \frac{x(t_a^-) + x(t_a^+)}{2}$$

onde $x(t_a^-)$ é o limite de $x(t)$ quando t tende para t_a a partir da esquerda, e $x(t_a^+)$ é o limite de $x(t)$ quando t tende para t_a a partir da direita. É de notar que esta expressão também é válida para um ponto de continuidade.

3. Quase nenhuma função contínua $x(t)$ com período T_0 pode ser aproximada uniformemente por uma série de Fourier truncada com algum grau de exactidão, em que a série é dada por

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N C_k e^{jk\omega_0 t} = C_0 + \sum_{k=1}^N 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Esta propriedade aplica-se a qualquer função contínua periódica que possa ser encontrada na prática de engenharia. Pode-se definir o erro da aproximação da série truncada como

$$e(t) = x(t) - x_N(t)$$

Esta propriedade determina que este erro pode ser limitado por um número diferente de zero através da escolha de um valor de N suficientemente elevado.

4. Consideremos o erro de aproximação com o coeficiente C_k atrás definido. Podemos minimizar o erro quadrático médio, definido por

$$\text{erro quadrático médio} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^2(t) dt$$

Isto é, nenhuma outra escolha do coeficientes na série harmónica produzirá um erro quadrático médio menor.

5. O somatório de funções trigonométricas de $\omega_0 t$ que é periódica é a sua própria série de Fourier.
6. O coeficiente de Fourier do harmónico de ordem k para $x(t)$ decresce sempre pelo menos como $1/k$, para um valor suficientemente elevado de k . Se $x(t)$ tem uma ou mais descontinuidades num período, o coeficiente não pode diminuir mais do que isto. Se a derivada de ordem n de $x(t)$ é a primeira derivada que contém uma descontinuidade e se todas as derivadas a partir da de ordem n satisfazem as condições de Dirichlet, os coeficientes de Fourier tendem para zero como $1/k^{n+1}$, para um valor de k suficientemente elevado.
7. A série de Fourier da soma de várias funções periódicas é igual à soma das séries de Fourier de cada função. É necessário que a soma das funções seja uma função periódica; caso contrário a soma não tem série de Fourier.

Determinação da Forma Exponencial por derivação

Consideremos o desenvolvimento de um sinal na Forma Exponencial da Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkw_0 t}$$

Vamos agora determinar as sucessivas derivadas de $x(t)$:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jkw_0 C_k e^{jkw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k e^{jkw_0 t}$$

$$x''(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jkw_0)^2 C_k e^{jkw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C''_k e^{jkw_0 t}$$

$$x'''(t) = \frac{d^3 x}{dt^3} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jkw_0)^3 C_k e^{jkw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'''_k e^{jkw_0 t}$$

• • •

$$x^{(p)}(t) = \frac{d^{(p)} x}{dt^{(p)}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jkw_0)^p C_k e^{jkw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(p)} e^{jkw_0 t}$$

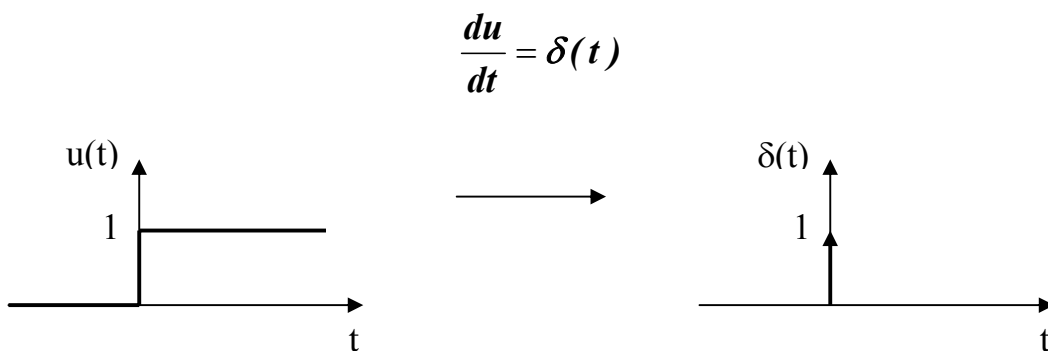
Por comparação dos coeficientes C_k , C'_k , C''_k ... e $C_k^{(p)}$ podemos concluir que

$$C_k^{(p)} = (jkw_0)^p C_k$$

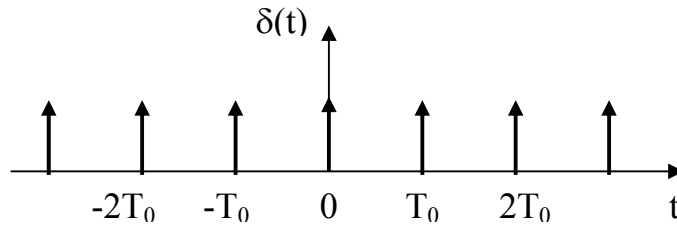
ou ainda

$$C_k = \frac{C_k^{(p)}}{(jkw_0)^p}$$

Visto que a derivada da função Degrau Unitário é o Impulso Unitário, isto é:



Vamos agora desenvolver em Série de Fourier a função trem-de-impulsos:



Para determinar a Série de Fourier vamos proceder ao cálculo de C_k . Pela definição

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left[e^{-jk\omega_0 t} \right]_{t=0} = \frac{1}{T_0}$$

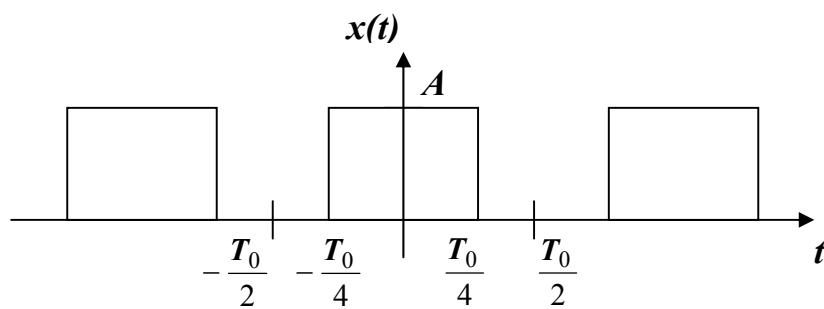
Logo a Série de Fourier pode ser escrita:

$$\delta(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

A aplicação deste método consiste em derivar consecutivamente os sinais até obter Impulsos Unitários. Depois e conhecida a expansão em série do Impulso Unitário é possível determinar pela expressão de C_k a partir de $C_k^{(p)}$ pela equação dada anteriormente.

Exemplo

Determine, por derivação a Forma Exponencial da Série de Fourier do seguinte sinal:



Transformada de Fourier em Tempo Contínuo

A transformada de Fourier é um método de representar matematicamente modelos de sinais e sistemas no domínio das frequências.

Os engenheiros usam a transformada de Fourier para simplificar a análise matemática de sinais e sistemas e para explicar fenómenos físicos matematicamente. É muito usada no campo da engenharia electrotécnica, especialmente no estudo de sinais e sistemas electrónicos de comunicações.

Neste capítulo vamos introduzir a transformada de Fourier de forma a perceber os conceitos matemáticos básicos associados e as possíveis aplicações na análise e projecção de sinais e sistemas lineares.

Definição de Transformada de Fourier

Para explicar a definição da transformada de Fourier vamos começar por considerar, em primeiro lugar, a série de Fourier definida no capítulo anterior, sob a forma exponencial:

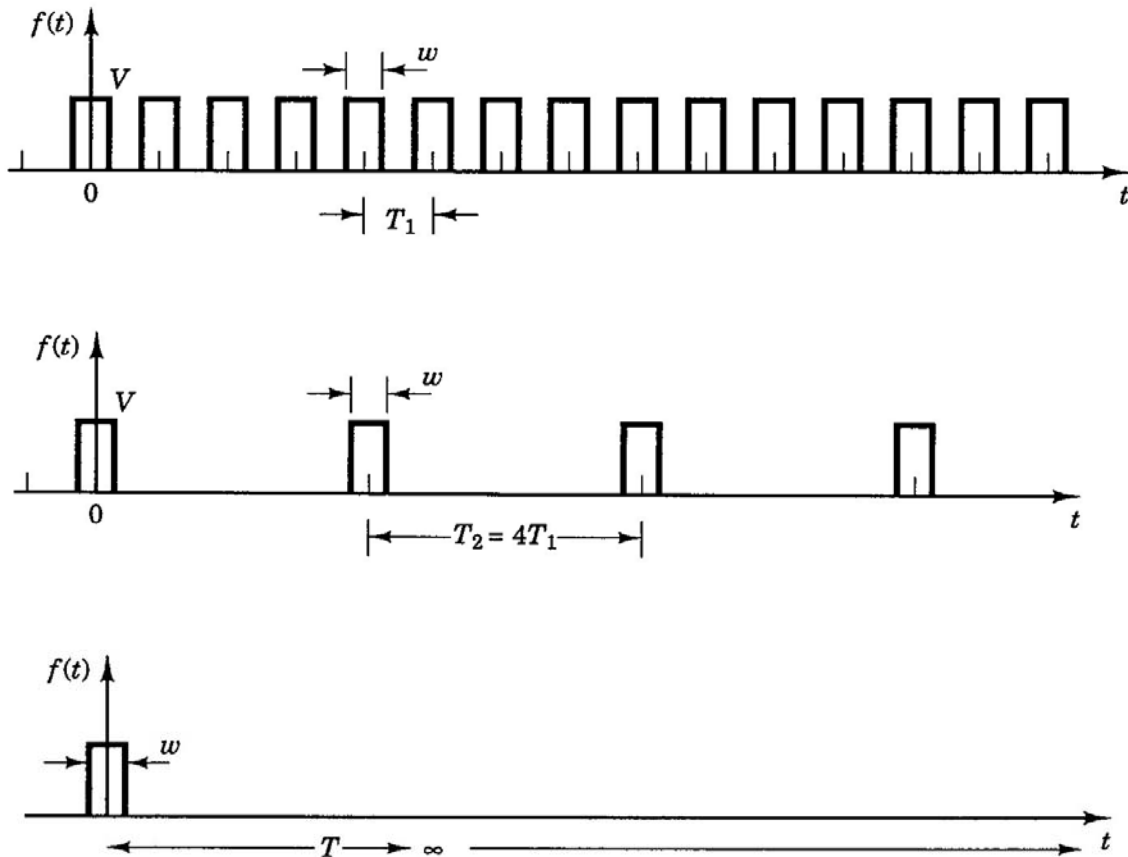
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Teoria do Sinal

onde

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

No capítulo anterior vimos como um sinal pode ser representado pela série de Fourier. Agora vamos considerar as consequências da expansão do período de um sinal periódico. Para isso, vamos aumentar indefinidamente o período até este se tornar infinito; assim, a onda não volta a ser repetida, ou seja,



Vamos considerar agora o expoente da função exponencial contida no integral de C_k . A quantidade $k\omega_0$ varia em quantidades de ω_0 quando k aumenta. Por outras palavras

$$\Delta\omega = (k + 1)\omega_0 - k\omega_0 = \omega_0$$

Como $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, o incremento da frequência diminui quando T_0 , o período da onda, aumenta. Se o limite de T_0 se aproxima de infinito, a variação da frequência $\Delta\omega$ torna-se a frequência infinitesimal $d\omega$:

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T_0} = d\omega$$

Também a quantidade $k\omega_0 = \frac{2\pi k}{T_0}$ se aproxima de $k d\omega$ quando T_0 tende para infinito. Como k é um número inteiro infinitamente variável, o produto $k d\omega$ torna-se a frequência contínua variável ω . Agora podemos escrever

$$C_{k\infty} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} dt$$

$$C_{k\infty} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega$$

Teoria do Sinal

A função entre parêntesis na equação anterior é definida como **Transformada de Fourier** e é escrita como

$$F\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Podemos escrever

$$C_{k\infty} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega$$

e assim,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) \cdot d\omega \cdot e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Nestas condições o somatório torna-se integral e a equação de $f(t)$ pode ser reescrita como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}\{F(\omega)\}$$

Esta equação define a **Transformada Inversa de Fourier**.

Estas duas relações são designadas por par de transformadas e a sua relação é normalmente representada em notação matemática como

$$f(t) \xleftrightarrow{F} F(\omega)$$

As condições suficientes para que exista transformada de Fourier são similares às verificadas para a série de Fourier. Essas condições são as condições de Dirichlet:

1. Num intervalo finito:
 - a. $f(t)$ é limitada.
 - b. $f(t)$ tem um número finito de máximos e mínimos.
 - c. $f(t)$ tem um número finito de descontinuidades.
2. $f(t)$ é absolutamente integrável, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

É de notar que estas condições são suficientes mas não necessárias. O uso da transformada de Fourier para análise de muitos sinais úteis seria impossível se estas condições fossem necessárias.

Uma das condições suficientes é que a função $f(t)$ seja absolutamente integrável. Qualquer sinal real que satisfaça a condição

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

é absolutamente integrável. Nesta equação E é a energia associada a um sinal, que pode ser vista como se $f(t)$ representasse a tensão aos terminais de uma resistência unitária. A potência fornecida seria

$$p(t) = \frac{|f(t)|^2}{R} = |f(t)|^2$$

e a integração da potência no tempo é energia.

Propriedades da Transformada de Fourier

A transformada de Fourier tem várias propriedades que podem simplificar substancialmente o seu uso na análise de sinais e sistemas. Vamos ver as principais propriedades usadas em engenharia.

↳ Linearidade

Como a transformada de Fourier é a integração de $f(t)$ e a sua inversa é a integração de $F(\omega)$, e como a integração é uma operação linear, podemos concluir que a transformada de Fourier é uma operação linear.

A propriedade da linearidade da transformada de Fourier define-se da seguinte forma:

Se para um dado par de transformadas.

$$f_1(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\omega) \text{ e } f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_2(\omega)$$

então

$$af_1(t) + bf_2(t) \xleftrightarrow{F} aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$$

onde a e b são constantes. Por outras palavras, o princípio da sobreposição aplica-se à transformada de Fourier.

↳ Escalonamento no tempo

A propriedade de escalonamento no tempo é verificada se

$$f(t) \xleftrightarrow{F} F(\omega)$$

então

$$f(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Esta propriedade é facilmente demonstrada através da definição da transformada de Fourier

$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

Fazendo uma substituição de variável $\tau = a.t$, vem $d\tau = a.dt$ e a equação é escrita da seguinte forma:

$$F\{f(\tau)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\frac{w}{a}\tau} d\tau$$

Comparando com a definição

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

quando $a > 0$. O módulo no factor de escala, a , permite que esta propriedade seja aplicada quando o a tem um valor positivo ou negativo.

↳ Deslocamento no tempo

Esta propriedade tem a seguinte formulação matemática

$$f(t - t_0) \xleftrightarrow{F} F(w) e^{-jw t_0}$$

onde a variável t_0 representa o deslocamento no tempo.

Utilizando novamente a definição

$$F\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-jw t} dt$$

Fazendo uma substituição de variável $\tau = t - t_0$, vem $d\tau = dt$ e a equação é escrita da seguinte forma:

$$F\{f(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Comparando com a definição

$$F\{f(t-t_0)\} = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

↳ Transformação no tempo

As propriedades de escalonamento e deslocamento no tempo podem ser combinadas numa propriedade mais generalizada de transformação no tempo.

Fazendo

$$\tau = at - t_0$$

onde a é o factor de escala e t_0 o deslocamento no tempo. A Aplicação da propriedade de escalonamento no tempo dá-nos

$$f(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Aplicando a propriedade de deslocamento no tempo à função de escalonamento no tempo obtemos a propriedade de transformação no tempo

$$f(at - t_0) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$$

↳ Dualidade

A simetria da transformada de Fourier e da sua inversa nas variáveis t e w podem ser vista por comparação das seguintes equações:

$$F\{f(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$F^{-1}\{F(w)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{j\omega t} dw$$

A propriedade da dualidade, que também é conhecida por *propriedade da simetria*, é definida como

$$F(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi f(-w)$$

quando

$$f(t) \xleftrightarrow{F} F(w)$$

Esta propriedade define que se a função matemática $f(t)$ tem a transformada de Fourier $F(w)$, então

$$F(w)|_{w=t} = F(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi f(-w) = 2\pi f(t)|_{t=-w}$$

 ↪ Convolução

A propriedade da convolução designa que se:

$$f_1(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\omega) \text{ e } f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_2(\omega)$$

então a convolução dos sinais no domínio do tempo tem o efeito da multiplicação das suas transformadas no domínio das frequências. Assim,

$$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

onde

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

Também, por aplicação da propriedade da dualidade, podemos verificar que a multiplicação dos sinais no domínio do tempo produz o efeito da convolução das respectivas transformadas no domínio das frequências. Esta propriedade é também designada por *propriedade da multiplicação*.

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

onde

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) F_2(\omega - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - \lambda) F_2(\lambda) d\lambda$$

Teoria do Sinal

↳ Deslocamento nas frequências

A propriedade de deslocamento nas frequências é matematicamente expressa por

$$f(t)e^{jw_0t} \xleftrightarrow{F} F(w - w_0)$$

Esta propriedade é facilmente demonstrada através da definição da transformada de Fourier

$$F\{f(t)e^{jw_0t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{jw_0t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-w_0)t} dt$$

Comparando com a definição

$$F\{f(t)e^{jw_0t}\} = F(\omega - w_0)$$

↳ Derivação no tempo

Se

$$f(t) \xleftrightarrow{F} F(\omega)$$

então

$$\frac{d[f(t)]}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega F(\omega)$$

Recorrendo mais uma vez à definição da transformada inversa de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Derivando a equação em ordem ao tempo, obtemos

$$\frac{d[f(t)]}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \cdot F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Comparando com a definição tiramos

$$F\left\{\frac{d[f(t)]}{dt}\right\} = j\omega \cdot F(\omega)$$

A propriedade da derivação pode ser definida genericamente para a derivada de ordem n como

$$\frac{d^n[f(t)]}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n F(\omega)$$

↳ Integração no tempo

Se

$$f(t) \xleftrightarrow{F} F(\omega)$$

então

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \cdot \delta(\omega) = G(\omega)$$

onde

$$F(0) = F(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

Se $f(t)$ tem um valor médio (valor dc) diferente de zero, então $F(0) \neq 0$.

Consideremos a convolução de um sinal genérico $f(t)$ com a função degrau unitário:

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

A função degrau unitário $u(t - \tau)$ está definida como

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

e assim

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

Utilizando a transformada da função degrau

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

e recorrendo à propriedade da convolução tiramos que

$$f(t) * u(t) \xleftrightarrow{F} F(\omega) \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

Combinando as duas equações tiramos

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

O factor $F(0)$ deve-se à aplicação da propriedade do deslocamento à função impulso.

↳ Derivação na frequência

A propriedade de derivação no tempo já demonstrada tem o seu dual para o caso da derivação no domínio das frequência.

Se

$$f(t) \xleftrightarrow{F} F(\omega)$$

então

$$(-jt)^n f(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d^n F(\omega)}{dt^n}$$

Isto pode ser facilmente visto através da derivação de ambos os membros da equação que define a transformada de Fourier, em relação a ω :

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} [(-jt)f(t)]e^{-j\omega t} dt$$

Esta equação define então o par de transformadas de Fourier

$$(-jt)f(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

que pode ser expandido à derivada de ordem n .

Cálculo da Transformada a partir da Série de Fourier

Vamos construir a Transformada de Fourier a partir da Série de Fourier. Po seja, vamos traduzir a Transformada como um trem-de-impulsos no domínio das frequências.

Para isso, vamos considerar um sinal $f(t)$ com transformada $F(\omega)$ que é um impulso de área 2π na frequência $\omega=\omega_0$, ou seja:

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Para determinar o sinal com esta transformada aplicamos a definição de transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 t}$$

isto é,

$$2\pi\delta(\omega - \omega_0) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{j\omega_0 t}$$

Teoria do Sinal

Mais genericamente, se $F(\omega)$ é formado pela combinação linear de vários impulsos igualmente espaçados no domínio das frequências, ou seja,

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Aplicando a definição de transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Esta expressão não é mais do que a Forma Exponencial da Série de Fourier, então

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \delta(\omega - k\omega_0) \xleftrightarrow{F^{-1}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Transformada de Laplace

Nos capítulos anteriores, vimos as ferramentas de análise de Fourier que são muito úteis no estudo de muitos problemas importantes que envolvem Sinais e Sistemas LIT.

A Transformada de Fourier em tempo contínuo fornece-nos uma representação de sinais como uma combinação linear de funções exponenciais complexas da forma e^{js} com $s = j\omega$. No entanto, muitas funções necessitam ser aplicadas para qualquer valor de s e não só para valores imaginários puros. Esta observação leva-nos a uma generalização da Transformada de Fourier Contínua, conhecida por *Transformada de Laplace*, que iremos desenvolver neste capítulo.

Também veremos que a Transformada de Laplace e Transformada $-z$ têm muitas propriedades que tornam a análise de Fourier muito útil. Além disso, estas transformadas não só fornecem ferramentas adicionais para a análise de sinais e sistemas usando a Transformada de Fourier mas também podem ser aplicadas em situações importantes nas quais a Transformada de Fourier não pode ser aplicada.

Por exemplo, a Transformada de Laplace e Transformada $-z$ podem ser aplicadas para analisar muitos sistemas instáveis e conseqüentemente têm um papel importante na investigação da estabilidade e instabilidade de sistemas.

Definição de Transformada de Laplace

Para começar vejamos a resposta de um sistema LIT a uma exponencial complexa. Assim, vamos considerar um sistema LIT com resposta impulsional $h(t)$. Para uma entrada $x(t)$, podemos determinar a saída através do uso do integral de convolução. Então, para $x(t) = e^{st}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).x(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).e^{s(t-\tau)}d\tau$$

Expressando $e^{s(t-\tau)}$ como $e^{st}e^{-s\tau}$, e como e^{st} pode ser tirada para fora do integral, a equação torna-se

$$y(t) = e^{st} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).e^{-s\tau}d\tau$$

Assumindo que o integral converge, a resposta a e^{st} é dada pela forma

$$y(t) = H(s).e^{st}$$

onde $H(s)$ é uma constante complexa cujos valores dependem de s e que está relacionada com a resposta impulsional do sistema através

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau).e^{-s\tau}d\tau$$

Para s imaginário (i.é., $s=j\omega$), o integral corresponde à Transformada de Fourier de $h(t)$. Para valores generalizados de variáveis complexas s , é referida como Transformada de Laplace da resposta impulsional $h(t)$.

A **Transformada de Laplace** para um sinal qualquer $x(t)$ é definida como

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

Esta equação é definida muitas vezes por *Transformada de Laplace Bilateral*, para distinguir da *Transformada de Laplace Unilateral*. A transformada bilateral envolve uma integração de $-\infty$ e $+\infty$, enquanto a transformada unilateral tem uma forma semelhante a esta mas os limites de integração são de 0 a $+\infty$. A seguir, apenas nos vamos concentrar na transformada bilateral.

Podemos verificar que a transformada é uma função da variável independente s . A variável complexa s pode ser escrita como $s = \sigma + j\omega$, sendo σ e ω as partes real e imaginária, respectivamente.

Por conveniência, vamos representar a Transformada de Laplace de um sinal $x(t)$ como

$$X(s) = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

e a relação entre $x(t)$ e $X(s)$ por

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

Quando $s=j\omega$, a equação anterior vem igual a

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t} dt$$

que corresponde à Transformada de Fourier; isto é

$$X(s)|_{s=j\omega} = F\{x(t)\}$$

A Transformada de Laplace também possui uma ligação directa com a Transformada de Fourier quando a variável complexa s não é puramente imaginária. Para ver esta relação, consideremos $X(s)$ e s expresso como $s = \sigma + j\omega$, de modo que

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

ou

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t).e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

podemos verificar que o termo do lado direito é a Transformada de Fourier de $x(t).e^{-\sigma t}$; isto é, a Transformada de Laplace de $x(t)$ pode ser interpretada como a Transformada de Fourier depois da multiplicação por um sinal exponencial real. A exponencial real $e^{-\sigma t}$ pode decrescer ou crescer no tempo, dependendo se σ é positivo ou negativo.

Exemplo

Considere o seguinte sinal:

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

- a) Determine a Transformada de Fourier e indique a condição para que esta convirja;
- b) Determine a Transformada de Laplace e indique a condição para que esta convirja.

A solução da Transformada de Laplace de um determinado sinal, requer, além da expressão algébrica, a gama de valores de s para os quais a expressão algébrica da transformada é válida.

Geralmente, a gama de valores de s para os quais o integral converge é denominada por *Região de Convergência* (de forma abreviada como **ROC**). Isto é, a ROC consiste nos valores de $s = \sigma + j\omega$ para os quais a Transformada de Fourier de $x(t).e^{-\sigma t}$ converge.

Exemplo

Determine a Transformada de Laplace e a ROC do seguinte sinal:

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t} \cos 3t.u(t)$$

Para as Transformadas de Laplace Racionais, isto é, que são representadas pela razão de dois polinómios da variável complexa s , do modo

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ são os polinómios do numerador e denominador, respectivamente, as soluções do polinómio do numerador são designadas por **zeros** de $X(s)$, visto que para esses valores de s , $X(s)=0$; e as soluções do polinómio do denominador são designadas por **pólos**, e para esses valores de s , $X(s)$ é **infinita**. No **plano- s** os zeros são assinalados por ‘○’ e os pólos por ‘×’.

Os pólos e zeros de $X(s)$ no plano- s caracterizam completamente a expressão algébrica da Transformada de Laplace a menos de um factor de escala. A representação de $X(s)$ através dos seus pólos e zeros no plano- s é designada por *diagrama de pólos-zeros* de $X(s)$.

Transformada Inversa de Laplace

Na secção anterior, interpretamos da Transformada de Laplace de um sinal como a Transformada de Fourier do sinal ponderado por exponenciais complexas, isto é, com s expresso como $s = \sigma + j\omega$, a Transformada de Laplace do sinal $x(t)$ é

$$X(\sigma + j\omega) = F\{x(t).e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

para valores de $s = \sigma + j\omega$ na ROC. Podemos inverter esta relação usando a definição da Transformada Inversa de Fourier, ou seja

$$x(t).e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

ou, multiplicando ambos os membros por $e^{\sigma t}$, obtemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

Isto é, podemos recuperar $x(t)$ a partir do cálculo da sua Transformada de Laplace para um conjunto de valores de $s = \sigma + j\omega$ na ROC, com σ fixo e ω a variar de $-\infty$ até $+\infty$. Podemos usar esta característica para descrever que a recuperação do sinal $x(t)$ a partir de $X(s)$ pode ser feita se alterarmos a variável de

Teoria do Sinal

integração na equação anterior de w para s , visto que σ é constante e, assim, $ds = jdw$. O resultado traduz a **Transformada Inversa de Laplace**:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Esta equação traduz que $x(t)$ pode ser representado por um integral ponderado de exponenciais complexas. Os limites de integração são linhas rectas no plano- s correspondendo a todos os pontos de s que satisfação $\text{Re}\{s\} = \sigma$. Esta linha é paralela ao eixo- jw . Assim, podemos escolher uma linha qualquer na ROC, i.é., podemos escolher qualquer valor de σ de modo que $X(\sigma + jw)$ convirja.

Exemplo

Determine a Transformada Inversa de Laplace do seguinte sinal:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

Propriedades da Transformada de Laplace

Depois de termos estudado um conjunto de propriedades da Transformada de Fourier vamos definir agora um conjunto de propriedades da Transformada de Laplace. A dedução de muitas propriedades é feita de forma análoga às deduções das propriedades da Transformada de Fourier. Consequentemente, não vamos apresentar com detalhe as presentes deduções.

↳ Linearidade

Se

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X_1(s), \text{ com uma ROC que será denominada por } R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X_2(s), \text{ com uma ROC que será denominada por } R_2$$

então

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\text{L}} aX_1(s) + bX_2(s)$$

com a ROC a conter $R_1 \cap R_2$

onde a e b são constantes.

Teoria do Sinal

Como é indicado, a ROC de $X(s)$ é pelo menos a intersecção de R_1 e R_2 , que também pode ser um conjunto vazio, e neste caso $X(s)$ não tem região de convergência, i.é., $x(t)$ não tem Transformada de Laplace.

↪ Deslocamento no tempo

Se

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X(s), \text{ com ROC} = R$$

então

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{L}} X(s)e^{-st_0}, \text{ com ROC} = R$$

↪ Deslocamento no Domínio-s

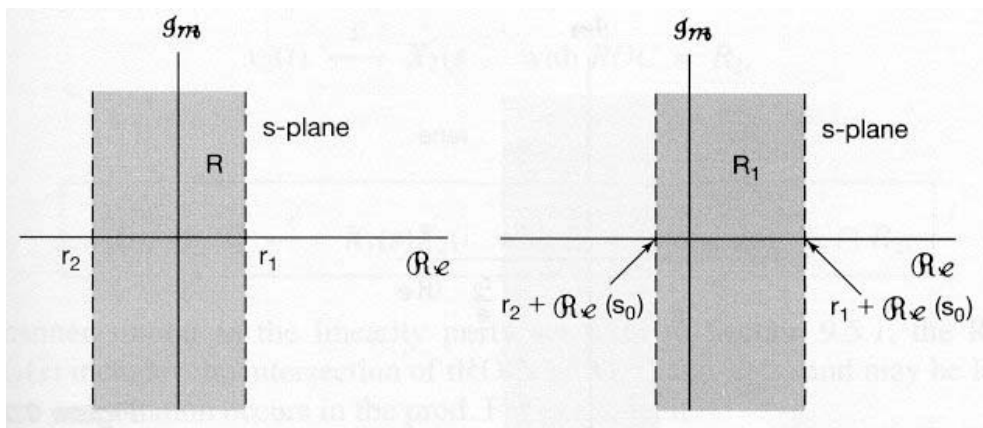
Se

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X(s), \text{ com ROC} = R$$

então

$$x(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{\text{L}} X(s - s_0), \text{ com ROC} = R + \text{Re}\{s_0\}$$

Isto é, a ROC associada a $X(s - s_0)$ é a de $X(s)$ deslocada por $\text{Re}\{s_0\}$. Assim, para qualquer valor de s que esteja em R , o valor $s + \text{Re}\{s_0\}$ estará em R_1 .



↪ Escalonamento no tempo

Se

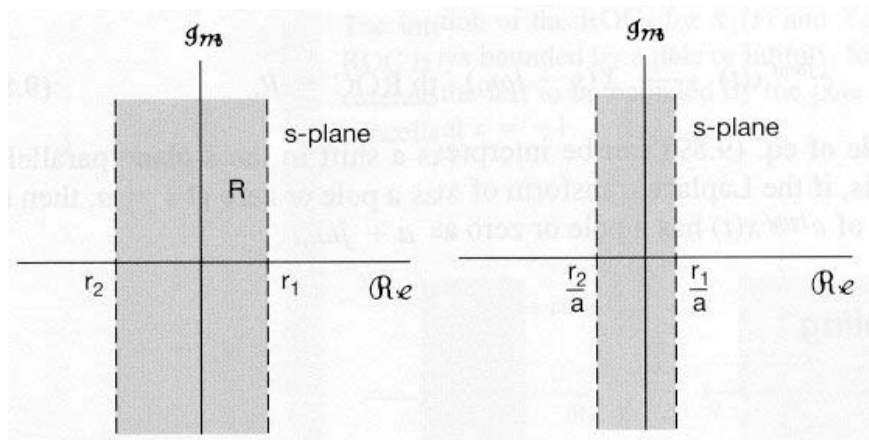
$$x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X(s), \text{ com ROC } = R$$

então

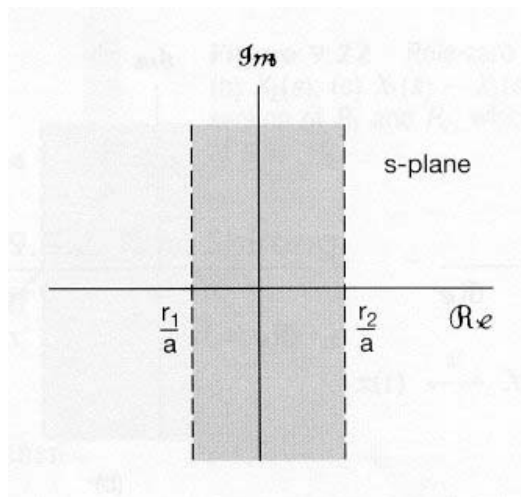
$$x(at) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \text{ com ROC } R_1 = aR$$

Isto é, para qualquer valor de s que esteja em R , o valor $\frac{s}{a}$ estará em R_1 como podemos ver pelas figuras; para um valor de a positivo

Teoria do Sinal



e para um valor de a negativo



↳ Conjugação

Se

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \text{ com ROC} = R$$

então

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*), \text{ com ROC} = R$$

onde

$$X(s) = X^*(s^*), \text{ se } x(t) \text{ for real}$$

↪ Convolução

Se

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s), \text{ com ROC} = R_1$$

e

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s), \text{ com ROC} = R_2$$

então

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \cdot X_2(s),$$

com a ROC a conter $R_1 \cap R_2$

Teoria do Sinal

↳ Derivação no tempo

Se

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X(s), \text{ com ROC} = R$$

então

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{L}} s.X(s), \text{ com a ROC a conter } R$$

Esta propriedade pode ser verificada através da derivação de ambos os membros da Transformada Inversa de Laplace. Especificamente, se

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

então

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} s.X(s) e^{st} ds$$

A ROC de $s.X(s)$ inclui a ROC de $X(s)$ e pode ser mais larga se $X(s)$ tem um polo de primeira ordem em $s=0$ que é cancelado pela multiplicação por s .

↳ Derivação no Domínio-s

Derivando ambos os membros da definição da Transformada de Laplace, i.é.,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-st} dt$$

obtemos

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t).x(t).e^{-st} dt$$

Consequentemente, se

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X(s), \text{ com ROC} = R$$

então

$$-t.x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{dX(s)}{ds}, \text{ com a ROC a conter } R$$

↳ Integração no tempo

Se

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X(s), \text{ com ROC} = R$$

então

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{s} X(s),$$

com a ROC a conter $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$

Esta propriedade é a inversa da propriedade da derivação verificada atrás. Pode ser deduzida utilizando a propriedade da convolução já apresentada. Especificamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = u(t) * x(t)$$

sabendo que

$$u(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{s}, \quad Re\{s\} > 0$$

então, a partir da propriedade da convolução

$$u(t) * x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{s} X(s)$$

com uma ROC que contem a intersecção da ROC de $X(s)$ e a ROC da Transformada de Laplace de $u(t)$.

↳ Teorema do Valor Inicial

Dentro da condição que $x(t)=0$ para $t<0$ e que $x(t)$ não contem algum impulso ou singularidades de ordem superior na origem, podemos determinar, a partir da Transformada de Laplace, o valor inicial $x(0^+)$ – i.é., $x(t)$ quando t se aproxima de zero a partir de valores positivos. O *Teorema do Valor Inicial* define-se por

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$$

↳ Teorema do Valor Final

Da mesma forma, se $x(t)=0$ para $t<0$ e se $x(t)$ tem limite finito quando $s \rightarrow 0$, então o *Teorema do Valor Final* define que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$$

Anexo A - Identidades Trigonométricas

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\operatorname{sen} a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)]$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a)$$

$$\operatorname{sen}^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a)$$

Anexo B - Somatórios de Séries Geométricas

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a^k = \frac{a^{n_1} - a^{n_2+1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}; \quad |a| < 1$$

Anexo C - Propriedades da Transformada Contínua de Fourier

Propriedades	Sinal	Transformada
	$x(t)$	$X(w)$
	$y(t)$	$Y(w)$
<i>Linearidade</i>	$a.x(t) + b.y(t)$	$a.X(w) + b.Y(w)$
<i>Deslocamento no tempo</i>	$x(t - t_0)$	$e^{-jw t_0} .X(w)$
<i>Deslocamento nas frequências</i>	$e^{jw_0 t} .x(t)$	$X(w - w_0)$
<i>Conjugação</i>	$x^*(t)$	$X^*(-w)$
<i>Reflexão no tempo</i>	$x(-t)$	$X(-w)$
<i>Escalonamento no tempo</i>	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{w}{a}\right)$
<i>Convolução</i>	$x(t) * y(t)$	$X(w).Y(w)$
<i>Multiplicação</i>	$x(t).y(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\theta).Y(w - \theta).d\theta$
<i>Derivação no tempo</i>	$\frac{d}{dt} x(t)$	$jw.X(w)$
<i>Integração</i>	$\int_{-\infty}^t x(\tau).d\tau$	$\frac{1}{jw} X(w) + \pi X(0)\delta(w)$
<i>Derivação nas frequências</i>	$t.x(t)$	$j \frac{d}{dw} X(w)$

Anexo D - Propriedades da Transformada de Laplace

Propriedades	Sinal	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R_1
	$y(t)$	$Y(s)$	R_2
<i>Linearidade</i>	$a.x(t) + b.y(t)$	$a.X(s) + b.Y(s)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$
<i>Deslocamento no tempo</i>	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}.X(s)$	R_1
<i>Deslocamento nas frequências</i>	$e^{s_0 t}.x(t)$	$X(s - s_0)$	R_1 deslocada
<i>Conjugação</i>	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_1
<i>Escalonamento no tempo</i>	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{s}{a}\right)$	R_1 escalonada
<i>Convolução</i>	$x(t) * y(t)$	$X(s).Y(s)$	Pelo menos $R_1 \cap R_2$
<i>Derivação no tempo</i>	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s.X(s)$	Pelo menos R_1
<i>Integração</i>	$\int_{-\infty}^t x(\tau).d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	Pelo menos $R_1 \cap \{Re\{s\} > 0\}$
<i>Derivação no Domínio-s</i>	$-t.x(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R_1

Bibliografia

- *Signals & Systems*, Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab, Second Edition, Prentice Hall International Editions
- *Signals, Systems and Transforms*, Charles L. Phillips, John M. Parr, Prentice Hall
- *Signals and Systems, An introduction*, Leslie Balmer, Second Edition, Prentice Hall
- *Engineering Mathematics – A Modern Foundation for Electronic, Electrical and Systems Engineers*, Anthony Croft, Robert Davison, Martin Hargreaves, Second Edition, Addison–Wesley