

ONDAS



APONTAMENTOS TEÓRICOS

Filipe Santos Moreira
2004/05



Índice

ÍNDICE	2
1 ANÁLISE VECTORIAL	5
1.1 Derivadas parciais.....	5
1.1.1 Derivada de uma função.....	5
1.1.2 Derivadas parciais	5
1.1.3 Derivadas de funções compostas.....	6
1.2 Integrais múltiplos	6
1.2.1 Integração de uma função.....	6
1.2.2 Integrais duplos	7
1.2.3 Integrais triplos.....	10
1.2.4 Integral de linha.....	10
1.3 Fasores.....	13
2 ONDAS.....	14
2.1 Movimentos harmônicos.....	14
2.1.1 Movimento harmónico simples	14
2.1.1.1 Força e energia no MHS	15
2.1.2 Dinâmica do MHS.....	16
2.1.3 Movimento de uma mola presa numa das extremidades	17
2.1.4 Solução complexa.....	20
2.1.5 Circuito LC.....	22
2.1.6 Movimento de um pêndulo simples.....	23
2.2 Corda em vibração e equação de onda.....	25
2.3 Onda harmónica.....	28
2.3.1 Sobreposição de ondas harmónicas	30
2.3.2 Ondas estacionárias	31
2.3.2.1 Ondas Estacionárias e Ressonância	33
3 EQUAÇÕES DE MAXWELL	36
3.1 Campos escalares e vectoriais	36
3.2 Gradiente de um campo escalar.....	36
3.2.1 Operador Nabla	37
3.3 Fluxo de um campo vectorial	37
3.4 Divergência	38
3.4.1 Teorema de Green-Ostrogradsky.....	39
3.5 Circulação de um campo vectorial. Rotacional	39
3.5.1 Teorema de Stokes	41



3.6	Determinação de campos vectoriais.....	42
3.7	Operações sobre os campos	42
3.8	Campo Eléctrico	45
3.8.1	Linhas do campo eléctrico.....	47
3.9	Campo Magnético	48
3.10	Campo electromagnético	49
3.10.1	Equações de Maxwell	49
3.10.2	Situações Estacionárias.....	51
3.10.3	Situação Geral.....	54
3.10.4	Propagação de ondas electromagnéticas no vazio	55
4	ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	57
4.1	Onda electromagnética no vazio	57
4.2	Polarização de ondas electromagnéticas	67
4.2.1	Polarização linear segundo o eixo dos xx	68
4.2.2	Polarização linear fazendo um ângulo de 45° com o eixo dos xx	68
4.2.3	Polarização circular à esquerda	69
4.2.4	Polarização circular à direita	70
4.2.5	Polarização elíptica à esquerda.....	71
4.2.6	Polarização elíptica à direita.....	72
4.3	Energia e vector de Poynting.....	73
4.4	Ondas em meios condutores	75
4.4.1	Impedância característica de um meio.....	79
4.4.2	Onda num meio qualquer	80
4.5	Reflexão de OPMs por um condutor perfeito.....	81
4.5.1	Incidência normal	81
4.5.2	Condições na fronteira entre dois dieléctricos.....	82
4.5.3	Leis de Snell	84
4.5.4	Campo evanescente	87
4.6	Ondas transversais.....	88
4.6.1	Ondas TE.....	88
4.6.2	Ondas TM.....	91
4.7	Espectro electromagnético.....	92
4.8	Antenas.....	94
5	FIBRAS ÓPTICAS	96
5.1	Introdução.....	96
5.2	Noção de circuito óptico.....	97



5.3	Tipos de fibras ópticas	99
5.4	Propagação nas fibras ópticas	101
5.4.1	Modos de transmissão	104
5.5	Degradação do sinal em fibras ópticas	106
5.5.1	Atenuação	106
5.5.2	Absorção	107
5.5.3	Dispersão	107
5.5.4	Perdas devido à curvatura da fibra	107
5.5.5	Perdas núcleo-bainha	109
5.6	Distorção do sinal	110
5.7	Lasers, LEDs e fotodetectores	113
5.7.1	Fontes luminosas de sinal	113
5.7.2	Fotodetectores	114
6	BIBLIOGRAFIA.....	116
	ANEXO I.....	117



1 Análise vectorial

1.1 Derivadas parciais

1.1.1 Derivada de uma função

Seja a função $f = y(x)$ uma função qualquer com uma variável independente. A derivada de uma função é

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Geometricamente, a derivada de uma função num ponto é a tangente trigonométrica do ângulo que a recta tangente à curva nesse ponto faz com o eixo das abcissas.

As derivadas calculam-se de acordo com a definição.

Exemplo:

$$y = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{X \rightarrow x} \frac{Y - y}{X - x} = \lim_{X \rightarrow x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{X - x} = \lim_{X \rightarrow x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{(\sqrt{X})^2 - (\sqrt{x})^2} = \lim_{X \rightarrow x} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{x}}{(\sqrt{X} - \sqrt{x})(\sqrt{X} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{X \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

É possível, assim, com mais ou menos trabalho, estabelecer regras práticas de derivação e tabelas de derivadas.

1.1.2 Derivadas parciais

Uma função a uma variável representa uma linha; uma função a duas variáveis representa uma superfície; uma função a n variáveis representará uma hipersuperfície no espaço $n+1$ dimensional.

Define-se derivada parcial da função $z(x,y)$ no ponto P do espaço em ordem a x , $\frac{\partial z}{\partial x}$, à derivada da função $z(x)$ que se obtém “congelando” y , isto é, supondo y constante. Da mesma forma se pode definir $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Calculemos as derivadas parciais da função $z = xy^2$.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \quad (y^2 \text{ funciona como uma constante})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \quad (x \text{ funciona como uma constante})$$

1.1.3 Derivadas de funções compostas

As seguintes regras da derivação de funções compostas são fundamentais:

i. $z = z(y(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

ii. $z = z(y_1(x), y_2(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dx}$$

iii. $z = z(y_1(x, t), y_2(x, t))$

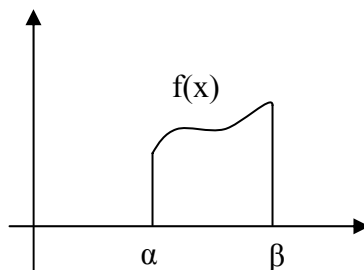
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dt} + \frac{dz}{dy_2} \cdot \frac{dy_2}{dt}$$

1.2 Integrais múltiplos

1.2.1 Integração de uma função

Considere-se a seguinte função:





Divida-se o intervalo entre α e β em intervalos parcelares arbitrários Δx_i ; de seguida tome-se em cada um desses intervalos um ponto arbitrário p_i e determine-se aí o valor da função $f(p_i)$.

Define-se, então

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum f(p_i) \Delta x_i$$

que é independente da forma da divisão em intervalos e dos pontos p_i escolhidos. Este integral definido (um valor definido, um número) é a área entre a curva $f(x)$ e o eixo das abcissas.

Conclui-se, de imediato, que se m for um mínimo de $f(x)$ no intervalo $\{\alpha, \beta\}$ e M um máximo da função nesse mesmo intervalo, então

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

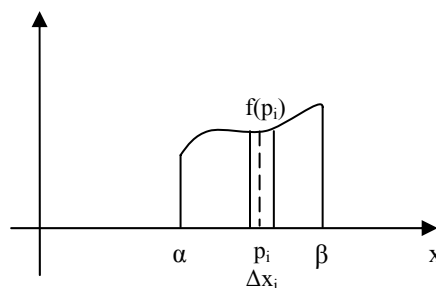
que é conhecido como o teorema do valor médio para integrais definidos.

Partindo deste teorema, é possível chegar à definição de primitiva ou integral indefinido de $f(x)$; de facto, a primitiva de $f(x)$, $F(x)$, é toda a função que satisfaça a seguinte condição:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

1.2.2 Integrais duplos

Quando se introduziu o integral definido, dividiu-se a área sob a curva $f(x)$ em pequenos rectângulos.





Primeiro calculou-se a área desses pequenos rectângulos

$$\sum_i f(p_i)\Delta x_i$$

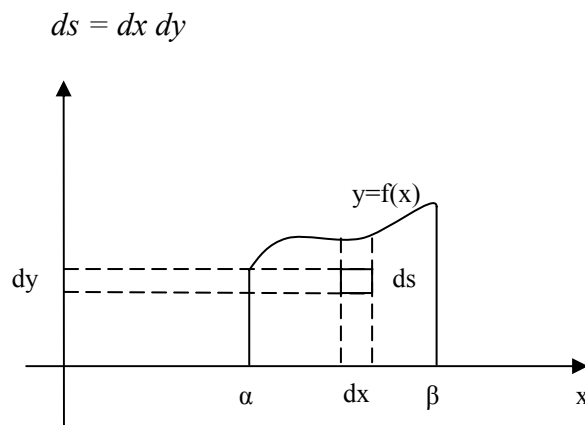
e só depois é que se passou ao limite de modo a obter o integral definido

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum f(p_i)\Delta x_i$$

O integral definido pode ser interpretado como o limite dessa soma. O sinal \int_{α}^{β} pode ser entendido como um sinal limite do sinal \sum e o integrando $f(x)dx$ pode ser visto como uma área infinitesimal rectangular.

O processo de cálculo dessa área reduz-se, assim, ao de definir uma área infinitesimal a integrar.

Poder-se-ia ter escolhido um elemento de área ainda mais pequeno. O mais pequeno elemento de área que se pode definir é o chamado elemento de área em coordenadas cartesianas



Agora para calcular a área total sob a curva, calcula-se primeiro a área correspondente ao rectângulo do primeiro processo. Nesse cálculo, x é tomado constante.

$$\int_0^{f(x)} dy dx = f(x)dx$$

Depois segue-se o primeiro processo



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Este procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{f(x)} dy dx$$

o que constitui um integral duplo.

O seu cálculo segue o processo inverso do da derivação parcial. Primeiro, integra-se em ordem a dy , considerando x como uma constante; depois, integra-se em ordem a dx , considerando y como uma constante.

Neste exemplo, a utilidade do integral duplo não é muito aparente, uma vez que se pode calcular a área muito mais facilmente utilizando o integral simples. Contudo, imagine-se que se pretende calcular, por exemplo, o volume sob uma superfície – entre o plano xy e a superfície $z(x,y)$.

Pode tomar-se como elemento de área $ds = dx \cdot dy$ no plano xy e depois associar a esse elemento de área uma altura $z = z(x,y)$, definido um volume infinitesimal prismático.

O volume total será dado por

$$\iint z(x,y) dx dy$$

Imagine-se, por exemplo, que se quer o volume sob a superfície $z = x \cdot y^2$ entre os limites $x=1$ e $x=2$ para a coordenada x e $y=0$ e $y=2$ para a coordenada y . O volume é, então

$$\int_1^2 \int_0^2 xy^2 dy dx$$

Primeiro integra-se em ordem a y , considerando x constante e depois integra-se em ordem a x . Assim sendo, vem

$$V = \int_1^2 x \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_1^2 x \cdot \frac{8}{3} dx = \int_1^2 \frac{8}{3} x dx = \frac{8}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 4$$

A ordem de integração, neste exemplo, é arbitrária, porque os limites são constantes puras.



1.2.3 Integrais triplos

No exemplo anterior, poder-se-ia ter calculado o mesmo volume usando um elemento de volume ainda menor: o elemento de volume em coordenadas cartesianas

$$dV = dx dy dz$$

O volume seria, então, dado por

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^{xy^2} dz dy dx = \int_1^2 \int_0^2 xy^2 dy dx$$

Aqui, a ordem já não é arbitrária, pois o limite superior de integração em z depende de x e y .

Mais uma vez, parece desnecessário recorrer ao integral triplo. Mas imagine-se outro problema: pretende-se determinar a massa de um prisma, sabendo que a sua massa específica é uma função do ponto dada por

$$\rho = e^{xy} \cdot yz$$

O prisma tem por limites

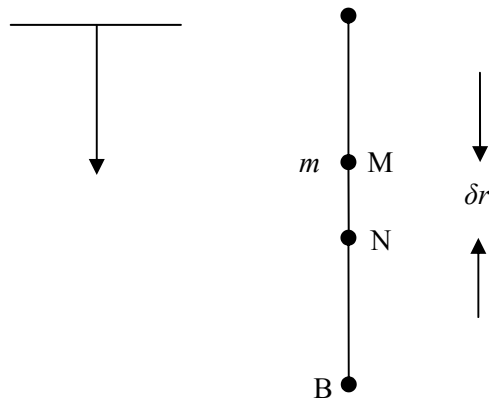
$$\begin{aligned} 1 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \\ 0 < z < 4 \end{aligned}$$

O problema pode ser resolvido por

$$\begin{aligned} M &= \int_0^4 \int_0^2 \int_1^2 (e^{xy} \cdot yz) dx dy dz = \int_0^4 \int_0^2 yz \cdot \left[\frac{e^{xy}}{y} \right]_1^2 dy dz = \int_0^4 \int_0^2 z \cdot (e^{2y} - e^y) dy dz = \int_0^4 z \cdot \left[\frac{e^{2y}}{2} - e^y \right]_0^2 dz = \\ &= \int_0^4 z \cdot 18,55 dz = 18,55 \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^4 = 148,41 \end{aligned}$$

1.2.4 Integral de linha

Considere-se um objecto com massa m colocado num campo gravítico. Como a força gravítica é um vector, o campo gravítico é um exemplo de um campo vectorial. A força gravítica na massa é dada por $m\mathbf{g}$, em que \mathbf{g} é um vector constante chamado aceleração gravítica. Supondo que se larga a massa e ela cai a partir do ponto A . O deslocamento vertical medido na direcção descendente a partir de A é r . O trabalho feito pela força gravítica causa o deslocamento da massa. Pretende-se calcular o trabalho feito para mover a massa de A até B , como na figura.



O trabalho feito para deslocar a massa do ponto M para o ponto N , correspondente a uma distância elementar δr . A física diz que o trabalho feito é igual ao produto da amplitude da força pela distância percorrida. Neste caso, a amplitude da força presente é dado por mg e a quantidade elementar δW , quando a massa se desloca de M para N é dada por

$$\delta W = m \cdot g \delta r$$

donde se tira $\frac{\delta W}{\delta r} = m \cdot g$. Fazendo $\delta r \rightarrow 0$, obtém-se

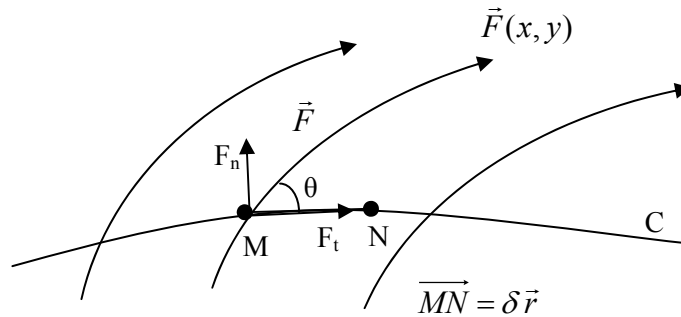
$$\lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta r} = \frac{dW}{dr} = m \cdot g$$

Para se obter o trabalho total feito quando a massa se desloca de A para B , calcula-se o integral para o intervalo de interesse, isto é

$$\text{trabalho total feito} = W = \int_A^B m \cdot g \, dr .$$

Este é exemplo elementar de um integral de linha. Esta denominação vem do facto de se estar a integrar ao longo da linha de A até B .

No caso anterior, o cálculo foi directo e simples, devido à particularidade do exemplo. Considere-se agora o caso em que se tem um campo vectorial, \vec{F} , através do qual passa uma curva C , como na figura seguinte.



A análise seguinte vai se restringir a duas dimensões. No caso geral, o campo vectorial vai variar com o espaço, isto é, $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$. Considere-se que o elemento pequeno de C e que junta os pontos M e N e seja θ o ângulo entre a tangente da curva C no ponto M e a direcção do campo nesse ponto. Seja o vector que une M e N $\delta \vec{r}$. Considerando a quantidade

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

em que \cdot representa o produto escalar. Se \vec{F} representar a força gravítica, então a quantidade $\vec{F} \cdot \delta \vec{r}$ representa a pequena quantidade de trabalho feito pelo campo ao mover uma partícula de massa unitária entre o ponto M e o ponto N. O integral apropriado ao longo de toda a curva representa o trabalho total efectuado. Assim, tem-se

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\delta \vec{r}| \cdot \cos \theta = (|\vec{F}| \cdot \cos \theta) \cdot |\delta \vec{r}| = F_t \cdot \delta r$$

em que F_t é a componente de \vec{F} tangencial à curva C. Este resultado é do mesmo tipo das expressões para o trabalho obtido anteriormente. Então está-se interessado em integrais do tipo

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}.$$

Dado que \vec{F} é uma função vectorial de x e de y, então \vec{F} terá componentes cartesianas $F_x(x, y)$ e $F_y(x, y)$, pelo que pode ser escrito na forma

$$\vec{F}(x, y) = F_x(x, y)\vec{i} + F_y(x, y)\vec{j}.$$

De igual modo, pode definir-se

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$



donde se tira

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C (F_x(x, y)\vec{i} + F_y(x, y)\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \int_C F_x(x, y) \cdot dx + F_y(x, y)dy .$$

1.3 Fasores

A solução complexa

$$x = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)}$$

pode ser decomposta em dois factores

$$x = A \cdot e^{j\delta} \cdot e^{j\omega t}$$

Se se tiver a garantia de que se trabalha com uma única frequência ω , constante e igual para várias soluções, faz sentido representar a solução apenas pelo primeiro factor.

Quando tal sucede, representa-se a solução por um **fasor**:

$$\underline{x} = A \cdot e^{j\delta}$$

Para se obter a solução sinusoidal – a que tem significado na realidade – tem de se ter em mente que o fasor é suposto rodar com uma velocidade angular ω . Então, se se pretender o valor da solução sinusoidal no instante t , tem de se rodar o fasor de um ângulo ωt e achar a parte real do número complexo correspondente.



2 Ondas

2.1 Movimentos harmônicos

2.1.1 Movimento harmônico simples

Um movimento vibratório é o que se verifica quando uma partícula se move, periodicamente, em torno de uma posição de equilíbrio. Exemplos: o movimento de um pêndulo, uma massa amarrada à extremidade de uma mola depois de libertada, átomos num sólido e mesmo os electrões numa antena, emissora ou receptora, executam rápidas transições.

De todos os movimentos vibratórios, o mais importante é o movimento harmónico simples – MHS –, pois não só é o mais fácil de se descrever matematicamente, como constitui uma descrição bastante precisa de muitas vibrações que se encontram na Natureza.

Por definição, uma partícula executa um MHS ao longo do eixo dos xx quando o seu deslocamento ao longo do eixo, x , e relativamente à origem do sistema de coordenadas é dado, com função do tempo, pela relação

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

em que $\omega t + \alpha$ é denominada fase e α é a fase inicial (valor da fase para o instante $t = 0$). A função co-seno, em vez da função seno, também serviria para descrever o MHS, sendo que a única diferença residiria numa diferença de fase de $\pi/2$ radianos (o que seria “contornado” diferindo a fase inicial precisamente de $\pi/2$ radianos). A representa o deslocamento simples relativamente à origem e denomina-se amplitude do MHS. Como a função seno se repete de 2π em 2π radianos, então o deslocamento da partícula repete-se a cada $2\pi/\omega$ segundos, o que quer dizer que o MHS é periódico e o seu período, T , vale $2\pi/\omega$ segundos. A frequência, f , de um MHS é igual ao número de vibrações completas por unidade de tempo, isto é $f = 1/T$. Por último, refira-se que ω é a frequência angular da partícula em vibração e relaciona-se com a frequência através da relação

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

A velocidade da partícula, v , é dada por

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$$

e a aceleração, a , é dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$



Esta relação indica que, num MHS, a aceleração é sempre proporcional e de sentido oposto ao deslocamento da partícula.

2.1.1.1 Força e energia no MHS

A força aplicada a uma partícula é dada pela relação $F = m \cdot a$; para se obter um MHS essa força deve ser

$$F = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x = -k \cdot x$$

em que $k = m \cdot \omega^2$. Isto indica que, num MHS, a força é proporcional e de sentido contrário ao deslocamento, o que significa que a força aponta sempre para a origem. De facto, essa é a posição de equilíbrio, pois, na origem, $F = 0$ (pois $x = 0$). A força definida anteriormente é a que aparece quando se deforma um corpo elástico, como, por exemplo, uma mola. A constante $k = m \cdot \omega^2$ é, às vezes, chamada de constante elástica e representa a força necessária para deslocar a partícula de uma distância unitária. Também se pode escrever

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

e

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A energia cinética da partícula é dada por

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \alpha)$$

Como $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$, pode escrever a relação anterior da seguinte forma:

$$E_K = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 [1 - \sin^2(\omega t + \alpha)] = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 (A^2 - x^2)$$

donde se conclui que a energia cinética é máxima no centro (para $x = 0$) e é nula nos extremos da vibração (para $x = \pm A$).

A energia potencial da partícula é dada por

$$F = -\frac{dE_P}{dx}$$



donde se pode escrever

$$\frac{dE_p}{dx} = k \cdot x$$

Integrando, e considerando $E_p = 0$ na origem ($x = 0$), vem

$$E_p = \int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x (k \cdot x) dx = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

donde se conclui que a energia potencial é nula na origem ($x = 0$) e máxima nos extremos de vibração ($x = \pm A$).

Por último, a energia total vem

$$E = E_K + E_p = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x^2 =$$
$$E = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

2.1.2 Dinâmica do MHS

A equação do movimento diz que $F = m \cdot a$. No movimento rectilíneo, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, pelo que se pode escrever

$$-k \cdot x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

ou ainda

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

Fazendo $\omega^2 = k/m$, vem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m \cdot \omega^2 \cdot x = 0$$

ou, simplificando,

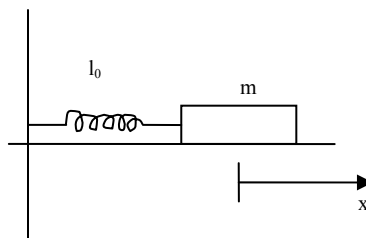


$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0$$

Esta equação é uma equação diferencial cujas soluções são funções sinusoidais com argumento ωt . Substituindo x por $A \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha)$ pode verificar-se que essa expressão, para x , que corresponde ao MHS, satisfaz esta última equação, pelo que se $x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha)$ é uma solução geral dessa equação, pois tem duas constantes arbitrárias: A e α . Assim, verifica-se que uma força de atracção proporcional ao deslocamento produz um MHS.

2.1.3 Movimento de uma mola presa numa das extremidades

Considere-se uma mola que liga horizontalmente uma massa m a uma parede, tudo assente numa mesa sem atrito como mostra a figura.



A mola tem comprimento livre l_0 e uma constante de rigidez k . Marque-se um eixo dos xx com origem na posição da massa quando a mola está com o seu comprimento igual ao comprimento livre, isto é, em repouso.

Quando a mola é esticada ou comprimida para um comprimento l , reage com uma força dada por

$$F = -k \cdot (l - l_0) = -k \cdot x$$

O sentido da marcação da força é o sentido positivo do eixo dos xx . Isso significa que, quando o x é positivo, a força é negativa, isto é, quando a mola é estendida, a força com que a mola reage é negativa, tentando repor o comprimento livre. Da mesma forma, se x é negativo, a força é positiva, isto é, quando a mola é comprimida reage com uma força que tenta repor o comprimento livre, contrariando a compressão.

O movimento da massa é regido pela equação de Newton

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$



Substituindo a força, vem

$$-k \cdot x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

ou ainda

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Trata-se de uma equação diferencial, cuja integração introduz duas constantes, uma vez que a equação é do 2º grau (envolve a segunda derivada em ordem a t).

Se a equação for escrita na forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x$$

vê-se que a solução $x(t)$ é qualquer função tal que a segunda derivada em ordem ao tempo seja proporcional ao negativo da própria função.

Uma solução é formada pela sinusóide

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

De facto

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \text{sen}(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 [A \cos(\omega t + \delta)]$$

Comparando com a equação do movimento da mola



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

vê-se que são soluções da equação, as sinusóides tais que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A solução é, assim

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \delta\right)$$

Repare-se que não foi colocada qualquer restrição à amplitude da sinusóide A nem à fase inicial ($t=0$ s), δ ; estas são, aqui, as duas constantes que a equação do 2º grau implica.

A solução é uma família de funções parametrizadas pelas duas constantes.

O movimento particular depende das condições iniciais do movimento, a partir das quais se determinam as constantes. Suponha-se que o movimento é inicializado esticando a mola para uma posição x_0 e que é imprimida uma velocidade inicial v_0 . Esses vão ser os valores de x e para $t=0$ s, isto é, sabendo que

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \cdot \text{sen}(\omega t + \delta)$$

com $t=0$ s, vem

$$x_0 = A \cos \delta$$

$$v_0 = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \text{sen} \delta$$



Dividindo estas duas equações, uma pela outra, vem

$$\frac{v_0}{x_0} = -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \operatorname{tg} \delta$$

ou

$$\delta = \operatorname{arctg} \left(-\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{v_0}{x_0} \right)$$

Por outro lado, reescrevendo as equações na forma

$$\frac{x_0}{A} = \cos \delta$$

$$\frac{v_0}{A} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \operatorname{sen} \delta$$

Elevando ao quadrado ambas as equações e somando-as, chega-se, finalmente, à seguinte equação

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} \cdot v_0^2} .$$

Viu-se assim que uma equação do tipo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

tem por solução

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

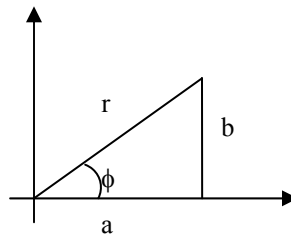
em que A e δ são determinados a partir das condições iniciais.

2.1.4 Solução complexa

Um número complexo identifica um ponto num plano em que o eixo das abcissas é o eixo dos números reais e o eixo das ordenadas é o eixo dos números imaginários. A unidade do eixo real é $\mathbf{1}$ e a unidade do eixo imaginário é \mathbf{j} .



Repare-se que se pode pensar no número complexo como a soma de dois comprimentos: a , medida no eixo real, e b , medida na perpendicular, isto é, no eixo imaginário. Sendo assim, multiplicar por j significa rodar o segmento de 90° .



É imediato do teorema de Pitágoras que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e da definição de tangente

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{b}{a}$$

Também se pode escrever a e b em função de r e ϕ :

$$a = r \cos \phi$$

$$b = r \operatorname{sen} \phi$$

Daqui resulta outra maneira de escrever o número complexo:

$$c = r \cos \phi + j \cdot r \operatorname{sen} \phi = r(\cos \phi + j \operatorname{sen} \phi)$$

Sabendo que

$$\cos \phi + j \operatorname{sen} \phi = e^{j\phi}$$

pode escrever-se um número complexo da seguinte forma

$$c = r e^{j\phi}$$

Esta notação permite entender um número complexo do seguinte modo: para marcar o ponto a que corresponde, toma-se um comprimento r segundo o eixo real e roda-se um ângulo ϕ . Multiplicar por $e^{j\phi}$ significa rodar a partir do eixo dos xx de um ângulo ϕ .

A equação do movimento harmónico admite como solução famílias de funções de variável complexa do tipo



$$x = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)}$$

Esta solução não tem significado real, mas é fácil extrair a solução que tem significado real a partir desta. A solução complexa é do tipo

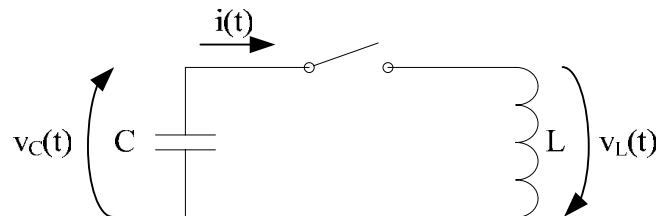
$$x = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)} = A \cos(\omega t + \delta) + j \cdot A \sin(\omega t + \delta)$$

Portanto, a solução com significado real é a parte real da solução complexa, por outras palavras a solução real é a que existe no “mundo real”.

Importa salientar que, se houver necessidade de efectuar operações matemáticas sobre a solução real do tipo sinusoidal, é possível efectuar as operações sobre a solução complexa e extrair depois a parte real, o que facilita muito os cálculos em inúmeras situações.

2.1.5 Circuito LC

Considere-se o caso do circuito LC, representado na figura seguinte:



Considere-se a situação de se ter o condensador inicialmente carregado e o interruptor aberto. Após o fecho do interruptor, o condensador começa a descarregar fazendo que circule uma corrente eléctrica pelo circuito, corrente esta que irá aumentar até o condensador estar completamente descarregado. Enquanto o condensador descarrega assiste-se à transferência de energia do condensador para a indutância. Após estar completamente descarregado, o condensador irá carregar-se no sentido oposto (há uma transferência de energia de volta para o condensador) até atingir um máximo. De seguida, volta a descarregar, voltando ao ciclo inicial e repetindo-o indefinidamente.

Aplicando as leis de Kirchhoff, tem-se que

$$v_L(t) + v_C(t) = 0 \Leftrightarrow L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

Como $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, tem-se



$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem com a solução possível

$$q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

e

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \text{ (frequência de ressonância do circuito LC).}$$

Estes resultados permitem fazer a seguinte analogia com o caso do movimento de uma mola presa numa das extremidades:

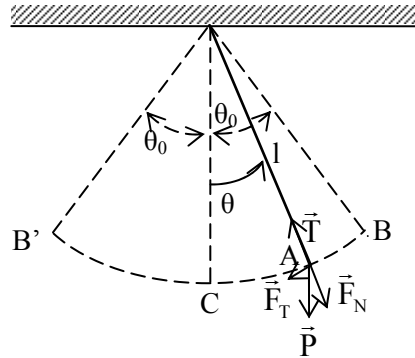
Mola Mecânica	Circuito LC
Posição: x	Carga: q
Velocidade: v	Corrente:
Energia cinética: $\frac{1}{2} m \cdot v^2$	Energia na indutância: $\frac{1}{2} L \cdot i^2$
Energia potencial: $\frac{1}{2} k \cdot x^2$	Energia no condensador: $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} \right) \cdot q^2$
Expressão do movimento: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0$	Equação do circuito: $L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$
Frequência de oscilação: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Frequência de ressonância: $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

Desta tabela tiram-se, ainda, as seguintes “equivalências” entre os dois casos:

$$\begin{aligned} m &\leftrightarrow L \\ k &\leftrightarrow 1/C \\ x &\leftrightarrow q \\ v &\leftrightarrow i. \end{aligned}$$

2.1.6 Movimento de um pêndulo simples

Outro exemplo de um movimento harmónico simples é o movimento de um pêndulo, como referido anteriormente. Um pêndulo simples define-se como sendo uma partícula de massa m presa a um ponto O por fio de comprimento l e massa desprezável. Afastando a partícula até uma posição B , onde o fio faz um ângulo θ_0 com a vertical, OC , e abandonando a partícula de seguida, então o pêndulo irá oscilar entre a posição B e a sua simétrica, B' , como mostra a figura seguinte:



A partícula move-se ao longo de um arco com raio $l = OA$. As forças que actuam na partícula são o peso, \vec{P} , e a tensão no fio, \vec{T} . Como o fio tem comprimento fixo, é fácil de deduzir que a componente normal do peso é anulada, a cada instante, pela tensão no fio. A componente tangencial resultante é dada por

$$F_T = -m \cdot g \cdot \text{sen}(\theta)$$

em que o sinal negativo se deve ao facto de ter o sentido oposto ao do deslocamento. Sabe-se que $F_T = m \cdot a_T$ e como a partícula move-se ao longo do círculo com raio l – o que corresponde a um movimento circular – tem-se que

$$a_T = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

pelo que se obtém,

$$m \cdot l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \text{sen}(\theta)$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \text{sen}(\theta) = 0$$

Se o ângulo for muito pequeno, o que sucede para pequenas oscilações, então $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, pelo que a equação anterior fica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0$$

que é idêntica à equação do movimento harmónico simples, em que o deslocamento, x , foi substituído pelo ângulo, θ , pelo que, desta vez, se refere a um movimento angular em



vez de um movimento linear. Assim, pode dizer-se que o movimento de um pêndulo simples é um MHS com $\omega^2 = g/l$, pelo que se pode exprimir o ângulo, θ , como

$$\theta = \theta_0 \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha).$$

Também aqui se tem a relação

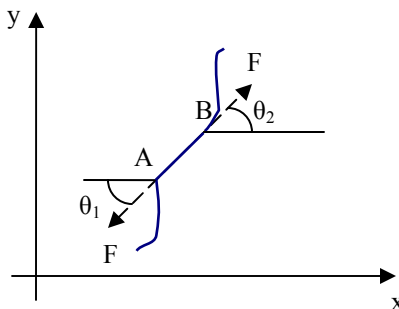
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

pelo que se pode afirmar que o período de oscilação de um pêndulo simples não depende da sua massa.

2.2 Corda em vibração e equação de onda

Suponha-se uma corda que pode ter movimentos transversais num único plano de pequena amplitude. Vai supor-se que qualquer movimento só pode decorrer transversalmente ao comprimento da corda em repouso. A corda está submetida a força de tracção F .

Analise-se o que se passa com um comprimento de corda Δx .



A força que as partes da corda não representadas exercem, à esquerda e à direita do troço que está a ser analisado, só pode ser tangente ao troço, porque uma corda flexível como a considerada só transmite força de tracção – a força de tracção F .

Assim sendo, a força que actua segundo y , direcção única do movimento possível é, da figura

$$F_y = F \text{sen} \theta_2 - F \text{sen} \theta_1$$

Se os ângulos θ_1 e θ_2 forem garantidamente pequenos, o seno toma valores próximos da tangente e pode escrever-se



$$F_y = F(\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2)$$

Por definição de derivada, a tangente do ângulo feito pela tangente à curva $y(x)$ com o eixo dos xx é a derivada da função $y(x)$ no ponto. Desse modo

$$F_y = F\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_B - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_A\right)$$

As derivadas são parciais porque y é função de x e do tempo t . Então, se μ for a massa por unidade de comprimento da corda, a equação de Newton para o movimento segundo y é

$$F_y = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Substituindo, fica

$$F\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_B - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_A\right) = \mu \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{F\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_B - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_A\right)}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Fazendo Δx tender para zero, obtém-se, por definição de derivada,

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

que se pode escrever na forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Esta é uma equação às derivadas parciais. A solução já não é uma simples família de funções parametrizada por constantes; é toda a classe de funções

$$y = \xi(x \pm vt)$$

formada por todas as funções cujo argumento é $x \pm vt$, com $v > 0$.



Para a demonstração desta afirmação, considere-se o caso do argumento $\alpha = x + vt$.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = v \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$$

Substituindo na equação, resulta

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} - \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = 0$$

O que é verdadeiro se

$$v^2 = F / \mu$$

Para o argumento $x - vt$, obtém-se o mesmo resultado.

As funções do tipo

$$y = \xi(x \pm vt)$$

chamam-se funções de onda ou ondas. O movimento da corda é um movimento em que são propagadas ondas.

Procure-se saber quando é que a função tem o mesmo valor; isso acontece em dois pontos definidos por x_1 e x_2 em instantes t_1 e t_2 . Por exemplo, para o caso $x + vt$,

$$x_1 + vt_1 = x_2 + vt_2$$

ou

$$v = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2}.$$



A função, que tinha um certo valor no instante t_1 no ponto x_1 , tem o mesmo valor no instante t_2 no ponto x_2 . Tudo se passa como se esse valor tivesse viajado de x_1 para x_2 no intervalo de tempo de t_1 para t_2 . Então a constante v representa a velocidade de propagação da onda. Como $v > 0$ e $t_2 > t_1$, é necessário que $x_2 < x_1$, ou seja, a onda propaga-se no sentido negativo do eixo dos xx .

2.3 Onda harmónica

A classe de soluções que se encontrou é muito geral. A solução para o movimento da corda é qualquer função de $x + vt$ (onda regressiva, no sentido negativo do eixo dos xx) ou $x - vt$ (onda progressiva, no sentido positivo do eixo dos xx).

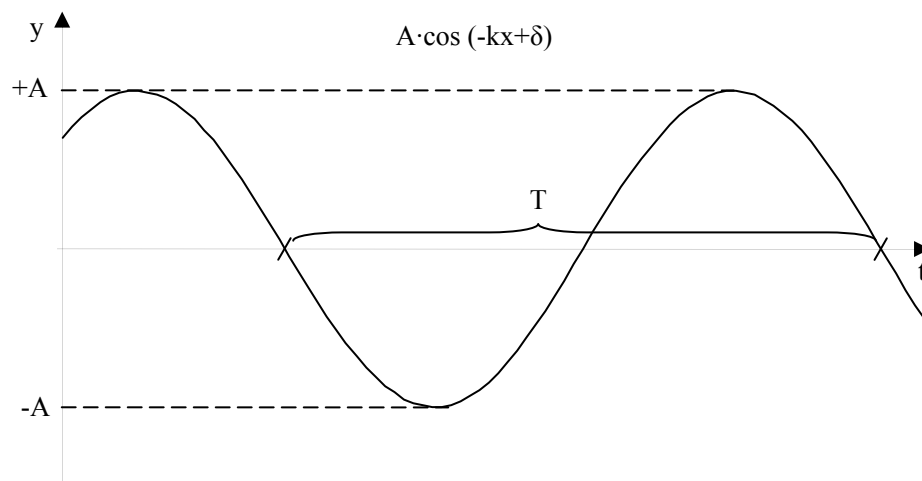
Um resultado extremamente importante do estudo destas funções é o seguinte: qualquer destas possíveis soluções, qualquer onda, pode ser expressa como um integral duplo (em ω e k) de soluções ou ondas elementares, chamadas ondas harmónicas, do tipo

$$y = A \cos(\omega t \pm kx + \delta)$$

Mais uma vez, A e δ são dependentes das condições iniciais do movimento. São a amplitude e a fase inicial na origem ($t=x=0$).

Esta solução é uma sinusóide agora função do tempo e da distância.

Suponha-se que se fixa num ponto, isto é, faça-se x constante. O que se está a fazer é um filme do que se passa no ponto x . Vem então que a solução é do tipo de solução do movimento harmónico, com fase inicial $-kx + \delta$.

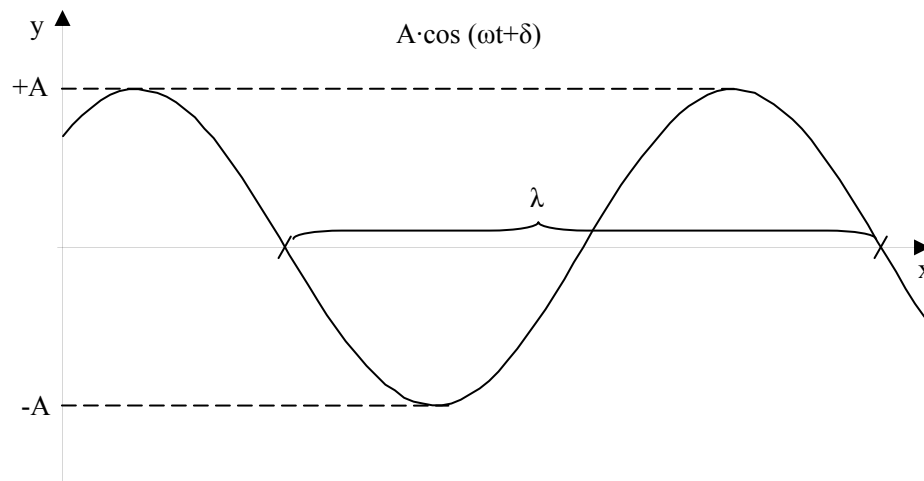


Obviamente, é ainda

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Ao contrário, fixe-se, agora, um instante: a solução é agora uma sinusóide função de x . Agora está-se a tirar uma fotografia da onda:



A distância entre dois pontos que instantaneamente têm o mesmo valor de onda chama-se comprimento de onda, λ . Na figura está representada a distância entre dois pontos em que o valor é zero. Matematicamente, é, para um mesmo instante t , e para o argumento $x - vt$,

$$2\pi + \omega t - kx_2 + \delta = \omega t - kx_1 + \delta$$

ou

$$k(x_2 - x_1) = 2\pi$$

Mas $x_2 - x_1 = \lambda$, donde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

A k chama-se número de onda.

Repare-se que a onda harmónica é de facto uma onda, pois pode exprimir-se na forma, por exemplo para o sinal positivo,

$$y = A \cos(\omega t + kx + \delta) = A \cos \left[k \left(x + \frac{\omega}{k} t + \frac{\delta}{k} \right) \right]$$

Comparando o argumento $x + \frac{\omega}{k} t$ com o argumento característico da onda $x + vt$, conclui-se que



$$v = \frac{\omega}{k}$$

Substituindo

$$\begin{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \lambda = \frac{2\pi}{k} \end{cases}$$

vem

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

A velocidade da onda harmónica é o comprimento de onda a dividir pelo período, como é evidente.

2.3.1 Sobreposição de ondas harmónicas

O princípio da sobreposição diz que quando duas, ou mais, ondas se propagam num mesmo meio linear, o deslocamento líquido do meio (a onda resultante), em qualquer ponto, é igual à soma algébrica dos deslocamentos de todas as ondas. Aplique-se este princípio a duas ondas harmónicas que se propagam na mesma direcção num mesmo meio. Caso ambas as ondas se propaguem no sentido positivo do eixo dos xx , com a mesma frequência, mesmo comprimento de onda e a mesma amplitude, mas com fases diferentes, e caso se exprima cada uma das ondas da seguinte forma:

$$y_1 = A \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2 = A \cdot \text{sen}(kx - \omega t - \phi)$$

então, a onda resultante é

$$y = y_1 + y_2 = y_1 = A \cdot [\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx - \omega t - \phi)]$$

Atendendo ao facto de se ter uma soma de senos e aplicando a respectiva regra, pode-se exprimir y da seguinte forma

$$y = \left(2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right) \text{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right).$$

Desta equação pode concluir-se que a onda resultante é ainda uma onda harmónica e com a mesma frequência e comprimento de onda das ondas individuais, sendo a amplitude



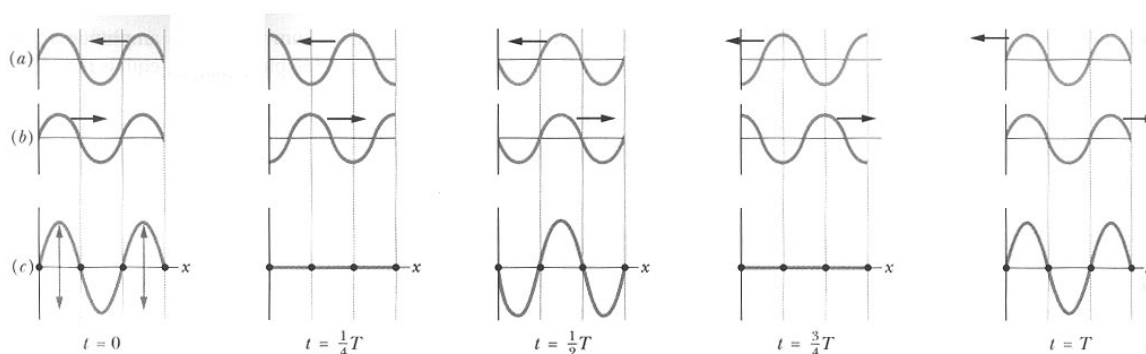
$2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ e a fase $\frac{\phi}{2}$. Caso a constante de fase for 0, então a amplitude resultante é $2A$,

ou seja, as ondas estão em fase e ocorre uma interferência construtiva; esta situação corresponde ao caso em que os máximos e os mínimos das duas ondas individuais ocorrem nas mesmas posições. Se a constante de fase for π , então a amplitude da onda resultante será nula, situação em que há uma interferência destrutiva; tal corresponde à situação em que o máximo de uma onda coincide com o mínimo da outra.

2.3.2 Ondas estacionárias

No caso de uma corda elástica em tensão estar fixada em ambas as extremidades, acontece a situação em que as ondas progressivas reflectem-se nas extremidades fixas e provocam ondas que se propagam na corda nos dois sentidos, isto é, a onda incidente e a onda reflectida combinam-se de acordo com o princípio da sobreposição enunciado na secção anterior.

Analisando a situação, chega-se à constatação de que existirão pontos na corda que nunca se moverão, chamados nós, e outros – a meio caminho entre dois nós – pontos em que a amplitude do movimento será máxima, os chamados anti-nós. A situação encontra-se ilustrada na figura seguinte¹:



Os padrões aqui representados denominam-se ondas estacionárias, pois esses padrões não se deslocam, quer para a esquerda, quer para a direita: os locais onde ocorrem os mínimos e os máximos são sempre os mesmos. Conclusão: sempre que duas ondas sinusoidais com a mesma amplitude e com o mesmo comprimento de onda viajam em direcções opostas ao longo de uma corda esticada, a sua sobreposição origina uma onda estacionária.

A análise de uma onda estacionária faz-se combinando duas ondas harmónicas com as equações descritas na secção anterior. Assim, tem-se

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \cdot \text{sen}(kx - \omega t) + A \cdot \text{sen}(kx + \omega t)$$

Aplicando algumas regras trigonométricas, a equação anterior fica

¹ Retirada de [12].



$$y(x,t) = 2A \cdot \text{sen}(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

Esta equação não descreve uma onda em movimento, pois não está representada na forma das funções de onda, mas antes uma onda estacionária.

A quantidade $2A \cdot \text{sen}(kx)$ pode ser vista como a amplitude da vibração do elemento da corda que está situado na posição x . Contudo, como a amplitude tem de ser sempre um valor positivo e a função seno pode tomar valores negativos, toma-se como amplitude do movimento na posição x , o módulo de $2A \cdot \text{sen}(kx)$.

Ao passo que numa onda móvel a amplitude de vibração é sempre a mesma para todos os pontos, o mesmo já não se passa numa onda estacionária, onde a amplitude de vibração varia de acordo com a posição. Neste caso, a amplitude é nula para os valores de kx em que $\text{sen}(kx) = 0$. Esses valores são

$$kx = n\pi, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

Substituindo k por $2\pi/\lambda$ nesta equação, chega-se a

$$x = n \frac{\lambda}{2}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

Estas são as posições de amplitude nula – os nós – para a onda estacionária. De notar que os nós adjacentes estão separados de $\lambda/2$, metade do comprimento de onda.

Uma análise igual, mas para os pontos de amplitude máxima, pode ser feita. Assim, a amplitude máxima é $2A$ e ocorre para valores de kx em que $\text{sen}(kx) = \pm 1$. Esses pontos são

$$kx = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

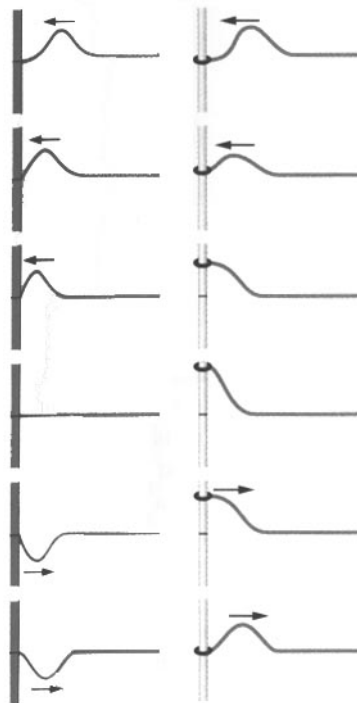
Substituindo k por $\lambda/2$, como no caso anterior, obtém-se

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots \text{ (anti-nós)}$$

como as posições em que a amplitude de vibração é máxima (os anti-nós). Os anti-nós estão separados por $\lambda/2$ e situam-se a meio dos pares de nós.

Pode obter-se uma onda estacionária numa corda em tensão permitindo que uma onda móvel seja reflectida na extremidade final da corda de forma a que a onda viaje de volta pela própria corda. Na figura seguinte¹ é usado um único impulso para descrever como ocorrem essas reflexões.

¹ Retirada de [12].



No lado esquerdo da figura, a corda está presa a uma parede, na sua extremidade esquerda. Quando o impulso chega à parede, exerce uma força no sentido ascendente no suporte (a parede). Pela terceira equação de Newton, a parede irá exercer uma força de sentido oposto e de igual amplitude na corda, o que gera um impulso no suporte que irá viajar de volta ao longo da corda no sentido oposto do do impulso incidente. Numa reflexão “dura” deste tipo tem de haver um nó no suporte, pois a corda está presa nesse ponto, pelo que os impulsos incidente e reflectido devem ter sinais opostos de forma a que se cancelem nesse ponto.

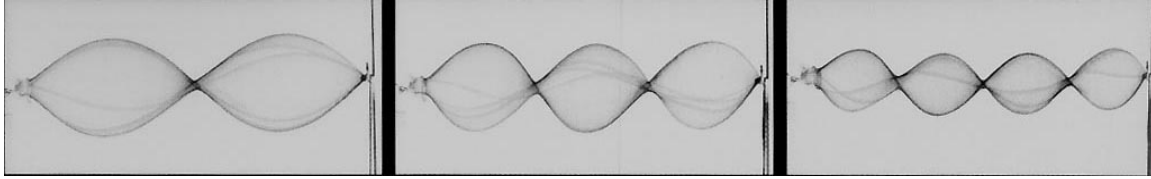
No lado direito da figura tem-se uma corda amarrada a um anel que é livre de deslizar sem atrito ao longo de um tubo. Quando o impulso chega, o anel move-se para cima ao longo do tubo, puxando a corda e esticando-a e produzindo um impulso reflectido com a mesma amplitude e com o mesmo sinal do impulso incidente. Assim, numa reflexão “suave” deste tipo, os impulsos incidente e reflectido somam-se criando um anti-nó no extremo da corda: o deslocamento máximo do anel é o dobro de cada um dos impulsos.

2.3.2.1 Ondas Estacionárias e Ressonância

Considere-se uma corda presa em ambas as suas extremidades (por exemplo, uma corda de uma guitarra). Suponha-se que se envia uma onda sinusoidal contínua com uma dada frequência ao longo da corda num dado sentido, por exemplo, da esquerda para a direita. Quando a onda atingir o extremo direito, reflecte-se e começa a viajar para a esquerda; esta onda no sentido direita-esquerda irá sobrepor-se à onda que viaja no sentido esquerda-direita. Quando atingir o extremo esquerdo irá reflectir-se novamente e começará a viajar para a direita, novamente, sobrepondo-se às ondas que viajam em

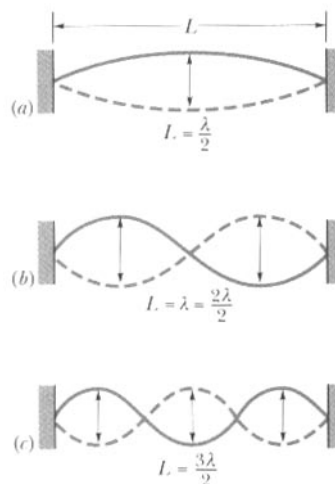


ambos os sentidos. Resumindo, é fácil de ver que, num curto intervalo de tempo, se irá ter um grande número de ondas que se irão sobrepor umas às outras. Existem certas frequências em que a sobreposição produz um padrão de onda estacionária (ou modo de vibração) com grandes nós e anti-nós, como se pode ver na próxima figura¹:



Cada uma das ondas estacionárias é produzida em ressonância e a corda está ressonante a estas frequências, denominadas frequências de ressonância. Se a corda vibrar a uma frequência diferente de uma das frequências de ressonância, não se gera uma onda estacionária e a sobreposição de ondas viajando da esquerda para a direita e no sentido oposto produzirá apenas pequenas vibrações da corda.

Para se explicar, matematicamente, a situação descrita, considere-se uma corda presa nas duas extremidades (dois ganchos, por exemplo) que distam entre si L . Note-se que tem de existir um nó em cada uma das extremidades, pois cada uma delas está fixa e não pode vibrar. O padrão mais simples que satisfaz estes requisitos é o demonstrado na figura seguinte², alínea a), em que só há dois nós (um em cada extremo da corda) e um único anti-nó situado a meio da corda (forma um padrão de um anel). Neste caso, uma metade do comprimento de onda expande-se ao longo da distância L , pelo que se tem, para este padrão, $\lambda/2 = L$. Esta condição diz que caso as ondas que viajam para a esquerda e para a direita formam este padrão, então o seu comprimento de onda deverá ser $\lambda = 2L$.



No caso da alínea b), tem-se três nós (um em cada extremo e um terceiro nó a meio da corda) e dois anti-nós (diz-se formar um padrão de dois anéis). Para que as ondas que

¹ Retirada de [12].

² Retirada de [12].



viajam para a esquerda e para a direita formem este padrão, o seu comprimento de onda terá de ser $\lambda = L$. Um terceiro padrão, ilustrado na alínea c) da figura anterior, com quatro nós, três anti-nós, três anéis requer que o comprimento de onda das ondas que viajam para a esquerda e para a direita seja $\lambda = (2/3)L$. Esta progressão poderia continuar obtendo-se padrões cada vez mais complexos, sendo que, em cada passo da progressão, se aumentaria o comprimento de onda das ondas que viajam para a esquerda e para a direita em $\lambda/2$ a caber na distância L . Assim, uma onda estacionária pode ser gerada numa corda de comprimento L por uma onda cujo comprimento de onda pode ser um dos seguintes valores

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

As frequências de ressonância a que correspondem estes comprimentos de onda são:

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

em que v é a velocidade das ondas móveis na corda. Esta equação diz que as frequências de ressonância são múltiplos inteiros da frequência fundamental, $f = v/(2L)$, que corresponde a $n = 1$. O modo de vibração com essa frequência, mais baixa, é denominado modo fundamental, ou primeiro harmónico. O segundo harmónico é o modo de vibração com $n = 2$, o terceiro corresponde ao modo de vibração com $n = 3$ e assim por diante. As frequências associadas a estes modos são normalmente designadas por f_1, f_2, f_3 , etc. O conjunto de todos os modos de vibração possíveis denomina-se série harmónica, e a n chama-se número harmónico do n -ésimo harmónico.



3 Equações de Maxwell

3.1 Campos escalares e vectoriais

Um campo é, grosso modo, um ente físico que toma diferentes valores em pontos distintos do espaço. A posição do ponto do espaço determina o valor do campo no ponto a cada instante.

A grandeza física pode ser um escalar. Tem-se, então, uma função das três coordenadas do ponto. A temperatura numa sala é em campo escalar.

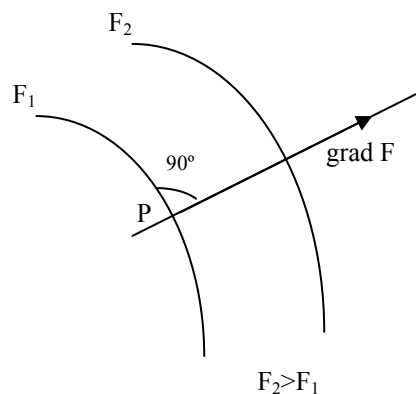
O ente físico também pode ser de natureza vectorial. As velocidades das partículas dum fluido em movimento, por exemplo a água, formam um campo vectorial. A cada ponto do espaço (onde está o fluido) está associado um vector.

Os campos vectoriais podem ser representados por vectores, pelas tangentes, em cada ponto, ao vector correspondente a esse ponto – as chamadas linhas de força do campo – ou por superfícies a que estas linhas são perpendiculares – as superfícies de nível do campo. Num campo escalar representam-se as superfícies onde o campo é constante.

3.2 Gradiente de um campo escalar

Dado um campo escalar $F(P, t)$ é possível, com algumas restrições matemáticas que aqui não serão abordadas, definir um novo campo a partir dele, sendo este novo campo um campo vectorial, chamado gradiente do campo escalar.

A cada ponto do espaço, associa-se um vector que tem a direcção e o sentido segundo os quais o campo escalar cresce mais rapidamente e o seu módulo é, justamente, o valor desse crescimento, por unidade de comprimento. Esse vector é perpendicular às superfícies de igual valor do campo escalar – as suas superfícies de nível.



$$\text{grad}F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

O gradiente de F é calculável directamente a partir de F ; se o campo estiver expresso em coordenadas cartesianas $F(x, y, z, t)$ é



$$\text{grad}F = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k}$$

Como, ao longo de uma superfície equipotencial, F não varia, definindo um vector \vec{u} tangente à superfície, tem-se

$$\text{grad}F | \vec{u} = 0$$

Logo, $\text{grad} F$ tem de ser perpendicular à superfície de nível que passa por P.

3.2.1 Operador Nabla

O operador nabla, ∇ , é definido por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

logo

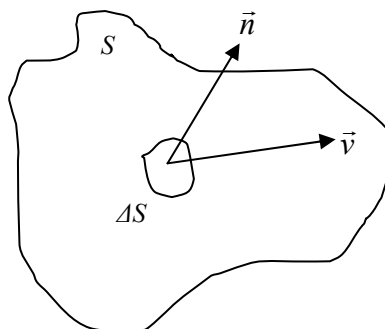
$$\text{grad}F = \nabla F$$

3.3 Fluxo de um campo vectorial

Fluxo: “quantidade” que passa por uma superfície por unidade de tempo.

Exemplo: quantidade de água que passa através de uma dada secção de uma conduta (por exemplo) por unidade de tempo.

Suponha-se uma superfície S e defina-se uma superfície elementar ΔS sobre ela. Seja \vec{n} o versor normal a ΔS . Seja \vec{v} um campo vectorial, por exemplo, o campo de velocidade de água.





A quantidade $\vec{v} \cdot \vec{n} \Delta S$, obtida projectando \vec{v} segundo \vec{n} , ou seja, a velocidade da água, na direcção da normal e multiplicando pela área ΔS , dá o volume de água que atravessa essa superfície elementar por unidade de tempo.

Se se pretender saber qual o volume de água que passa por unidade de tempo em toda a superfície, ter-se-ia de considerar outras superfícies elementares e somar as quantidades correspondentes.

Como a superfície considerada é contínua, considera-se uma superfície infinitesimal, dS , e substitui-se, no limite, a soma por um integral, obtendo-se, desse modo, o fluxo do campo \vec{v} através da superfície S , ϕ_S .

$$\phi_S = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

A noção de fluxo permite deduzir um campo escalar a partir de um campo vectorial.

3.4 Divergência

Suponha-se um ponto qualquer do espaço, P , e considere-se uma superfície fechada, S , que o contém. Chama-se divergência do campo vectorial no ponto P a:

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS}{\Delta V}$$

Por outras palavras, calcula-se o fluxo que sai através da superfície fechada que contém o ponto (o símbolo \oiint significa integração sobre uma superfície fechada) e divide-se pelo volume limitado por essa superfície, ΔV . Depois, calcula-se o limite deste quociente quando o volume tende para zero. Isso equivale a considerar o fluxo através de superfícies cada vez mais apertadas englobando o ponto. No limite está-se a calcular o fluxo através de uma superfície que engloba à justa o ponto.

Se este limite, a divergência, for nulo, o ponto é um ponto normal, por onde a água simplesmente passa. Isso significa que a água que entra por um lado da superfície sai pelo outro.

Contudo, se o limite não for nulo, o ponto é divergente do normal, ou seja, tem divergência não nula. Se for positivo, isso significa que está a ser criada água nesse ponto, ou então está a ser introduzida do exterior. Se se pensar no espaço que se está a estudar como uma banheira, o ponto é uma torneira pontual. Se, ao contrário, a divergência for negativa, a água está desaparecer nesse ponto, é um ralo.



Então, a partir do campo vectorial inicial, definiu-se um novo campo escalar e a cada ponto do espaço está associado um escalar, a divergência do campo vectorial.

A divergência pode calcular-se directamente a partir do campo vectorial por uma expressão matemática que se deduz directamente da definição. De facto, exprimindo o campo vectorial em coordenadas cartesianas, vem

$$\vec{v}(x, y, z, t) = v_x(x, y, z, t)\hat{i} + v_y(x, y, z, t)\hat{j} + v_z(x, y, z, t)\hat{k}$$

e

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$$

3.4.1 Teorema de Green-Ostrogradsky

Um teorema muito importante é o teorema de Green-Ostrogradsky:

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \vec{v} \, dV$$

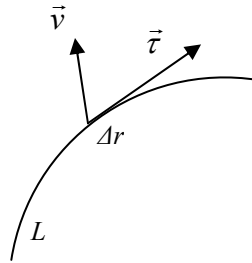
Este teorema é fácil de entender a partir do exemplo da banheira (referido anteriormente, podendo, mesmo, chamá-lo de “teorema das banheiras”); este teorema diz que a água que sai através da superfície S que limita a banheira (superfície fechada) é igual à água que entra pelas torneiras menos a que sai pelos ralos. Há que contar a água que entra ou sai, que é exactamente a divergência nesses pontos ou conjunto de pontos, e somar, ou, no limite, integrar, a todo o volume V .

Dito em termos mais precisos, o teorema diz que o fluxo de um campo vectorial através de uma superfície fechada é igual ao integral da divergência do campo estendido ao volume limitado pela superfície.

3.5 Circulação de um campo vectorial. Rotacional

Uma outra operação sobre campos vectoriais que será aqui abordada é a de circulação do campo ao longo de uma linha. Esta operação é semelhante ao integral de linha, já abordado.

Suponha-se uma linha L e defina-se um comprimento elementar Δr sobre a linha. Seja $\vec{\tau}$ o versor tangente à linha. Seja \vec{v} um campo vectorial.

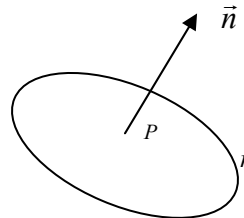


A quantidade $\vec{v} \cdot \vec{\tau} \Delta r$ é obtida projectando \vec{v} na direcção da tangente e multiplicando pelo comprimento Δr . Esta quantidade dá a circulação da água, se \vec{v} for o campo de velocidade da água, ao longo do comprimento Δr . Para calcular a circulação ao longo da linha, haveria que somar estas circulações elementares e, no limite, integrar, obtendo-se

$$C_L = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dr$$

A noção de circulação permite definir, a partir do campo vectorial \vec{v} , um novo campo escalar.

Suponha-se um ponto no espaço P e considere-se uma direcção definida por um versor \vec{n} . Considere-se uma linha fechada num plano perpendicular a \vec{n} , englobando o ponto P .



Define-se como componente de um vector, chamado rotacional do campo \vec{v} , segundo \vec{n} , como

$$\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{v} \cdot \vec{\tau} dr}{\Delta S}$$

Calcula-se, assim, a circulação do campo ao longo da linha fechada r , divide-se pela área, ΔS , limitada pela linha L e obtendo-se o limite quando ΔS tende para zero. Isso equivale a considerar linhas fechadas cada vez mais ajustadas ao ponto P .

Se o limite for nulo, isto é, se o rotacional não tiver componente segundo a direcção definida por \vec{n} , isso significa que não há circulação na linha r . Mas, se for não nulo, no limite, quando a linha se fecha cada vez mais, isso significa que há um vórtice de um redemoinho no ponto que tem componente segundo \vec{n} e provoca rotação da água na linha.



Agora, está-se a associar, a cada ponto, um novo vector e, portanto, a definir um novo campo, o rotacional do campo inicial. Precisamente porque é um vector, vai ter direcção e sentido. Como a divergência pode ser entendida como dando a quantidade de água que entra ou sai, respectivamente numa torneira ou ralo, o rotacional pode ser entendido como uma colher que provoca uma rotação da água em torno de si própria. Naturalmente, tem-lhe associada uma direcção e sentido, a ele e ao vórtice que cria.

O rotacional também se pode calcular directamente a partir do campo vectorial. A partir da definição, deduz-se, para um campo expresso em coordenadas cartesianas

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

em que o determinante deve ser desenvolvido segundo a primeira linha, ficando

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Atendendo à definição de produto vectorial, é imediato constatar que

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$$

3.5.1 Teorema de Stokes

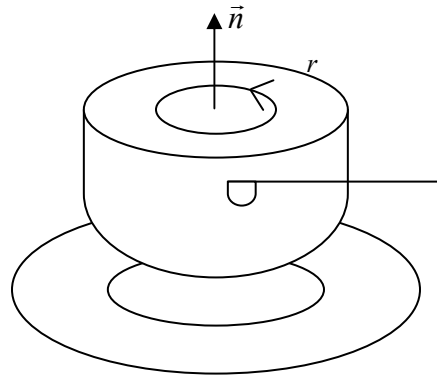
Existe um teorema que relaciona um campo vectorial com o seu rotacional, o teorema de Stokes

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{\tau} \, dr = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

O teorema entende-se bem pensando o que acontece numa chávena de café, sendo, por isso, aceitável chamar-lhe teorema das chávenas de café. Suponha-se, então, que se pretende calcular a circulação do café ao longo do bordo da chávena; quer dizer, o percurso r é o bordo da chávena. Então, tem de se contar as colheres que se metem na chávena. Contudo, nem todas as colheres dão rotação como a que se quer. Se se conseguisse meter uma colher como mostra a figura, em paralelo ao plano do bordo, e do pires, não se conseguia a rotação do café como o pretendido, por mais que se rodasse a colher. Quer isto dizer que tem de se contar as “partes úteis” das colheres, a sua projecção na normal ao bordo da chávena, $\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}$. Contar significa, no limite, integrar a toda a



superfície do bordo. E, assim, se obtém o fluxo de colheres, ou fluxo do rotacional, através da superfície, $\iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$.



Em termos matemáticos, o teorema diz que a circulação de um campo vectorial ao longo de uma linha fechada é igual ao fluxo do rotacional do campo através da superfície limitada pela linha.

3.6 Determinação de campos vectoriais

Só há duas maneiras de criar um campo vectorial: criando torneiras e/ou ralos, ou introduzindo colheres. Pense-se, por exemplo, numa banheira cheia de água: só há duas maneiras de a pôr em movimento: uma é abrir uma torneira ou um ralo. As partículas de água vão, então, da torneira para o ralo. A outra maneira é introduzindo uma colher e rodando-a; as partículas de água andam, então, à volta da colher em circuito fechado.

Dito de outro modo, só há duas maneiras de criar um campo vectorial. Uma é criar pontos de divergência não nula. Então, as linhas de força do campo (às quais o campo é tangente) vão dos pontos de divergência positiva para os pontos de divergência negativa. Outra forma é criar pontos com rotacional não nulo. Então, as linhas de força do campo são fechadas sobre si. O campo definido apenas por pontos de divergência não nula, chamam-se irrotacionais; os definidos apenas por pontos de rotacional não nulo, chamam-se solenoidais.

Então, dar a divergência e o rotacional do campo vectorial, é caracterizar, completamente, o campo.

3.7 Operações sobre os campos

Dado agora um campo, escalar ou vectorial, vários outros campos podem ser derivados a partir dos campos gradiente, divergência e rotacional.

Por exemplo, é fácil mostrar, aplicando as respectivas expressões, que

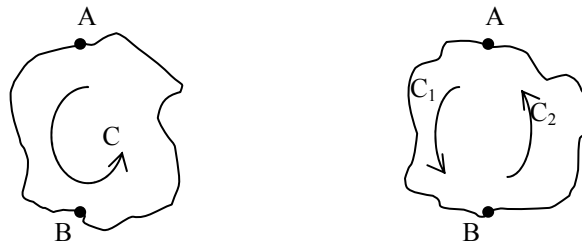


$$\text{rot grad } F = \vec{0}$$

O teorema das ch\u00e1venas de caf\u00e9 implica, imediatamente, que

$$\oint_C \text{grad } F \cdot \vec{\tau} \, dr = \iint_S \text{rot grad } F \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

A circula\u00e7\u00e3o do gradiente de um campo escalar ao longo de uma linha fechada \u00e9 sempre nula. Isso implica que a circula\u00e7\u00e3o entre dois pontos quaisquer n\u00e3o depende do trajecto.



$$C = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

ou

$$\int_A^B \text{grad } F \, ds + \int_B^A \text{grad } F \, ds = 0$$

ou

$$\int_A^B \text{grad } F \, ds = - \int_B^A \text{grad } F \, ds$$

Mostra-se, at\u00e9, que

$$\int_A^B \text{grad } F \, ds = F_B - F_A$$

Isto \u00e9, a circula\u00e7\u00e3o do gradiente do campo F do ponto A ao ponto B n\u00e3o depende do trajecto e \u00e9 igual ao valor do campo F no ponto de chegada menos o valor do campo F no ponto de partida.

Inversamente, se um campo vectorial tem circula\u00e7\u00e3o nula num percurso fechado ou, dito de outra forma, \u00e9 irrotacional, ent\u00e3o existe um campo escalar que \u00e9 gradiente, isto \u00e9



$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

ou

$$\oint_s \vec{v} \cdot \vec{\tau} \, ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{grad } F$$

Geralmente não interessa, dado \vec{v} , determinar F , mas sim o seu simétrico, que tem significado físico:

$$V = -F$$

ficando

$$\vec{v} = -\text{grad } V$$

A V chama-se potencial do campo \vec{v} .

Outra operação combinada, com interesse, é

$$\text{div grad } F$$

Atendendo a que

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k}$$

e

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

conclui-se, pondo $\vec{v} = \text{grad } F$, que

$$\text{div grad } F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Chama-se, a este novo campo, laplaciano do campo escalar F e, usando o operador nabra, pode escrever-se como

$$\text{lap } F = \nabla^2 F$$



Uma operação idêntica pode ser definida sobre um campo vectorial; chama-se laplaciano de um campo vectorial \vec{v} , um novo campo vectorial, cujas componentes são os laplacianos das componentes do campo inicial. Isto é, se $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$, vem

$$\text{lap } \vec{v} = \nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 v_x \hat{i} + \nabla^2 v_y \hat{j} + \nabla^2 v_z \hat{k}$$

com

$$\nabla^2 v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}.$$

3.8 Campo Eléctrico

Considere-se a situação em que há duas cargas em dois pontos quaisquer do espaço, distando de si uma distância r . Essas duas cargas vão criar entre si uma força, a força eléctrica, que será de atracção caso as cargas sejam de natureza – sinal – contrária e será de repulsão caso sejam de igual natureza. Essa força será exercida nas duas cargas.

A lei de Coulomb diz que

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u} = k_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}$$

em que \vec{u} é o versor¹ da linha recta que une as duas cargas q_1 e q_2 , k_e é a constante de Coulomb e vale aproximadamente $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$. Caso estejam presentes mais de duas cargas, então a força eléctrica que será exercida em cada carga, será a soma de todas as forças eléctricas criadas por todas as cargas eléctricas.

$$\vec{F}_{e_{total}} = \sum_i \vec{F}_{e_i} = k_e \cdot Q \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

em que Q é carga considerada. Se se dividir essa força pelo valor da própria carga, obtém-se a expressão de um campo criado pelas cargas no ponto onde está a carga: o campo eléctrico, que é dado pela equação

¹ Versor ou vector unitário



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q} = k_e \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Como se comprova por esta equação, o campo eléctrico, num dado ponto, não depende da(s) carga(s) aí presente(s), mas sim das outras cargas “vizinhas” desse ponto; o campo eléctrico é um campo exterior à carga.

Devido ao sinal de Q , o campo eléctrico, num dado ponto, pode ser contrário ou não à força eléctrica exercida nessa carga; se a carga for positiva, então a força eléctrica e o campo eléctrico terão o mesmo sentido e a mesma direcção; caso a carga Q seja negativa, então a força eléctrica exercida nessa carga terá a mesma direcção do campo eléctrico nesse ponto, contudo o sentido será o oposto.

Até agora, consideraram-se cargas cujas distâncias entre si são relativamente grandes; acontece que, muitas vezes, as cargas estão muito juntas em comparação com as distâncias aos pontos do campo; nessa situação, o sistema de cargas pode ser considerado contínuo, isto é, assume-se que o sistema de cargas muito juntas seja equivalente a uma carga total distribuída continuamente num certo volume ou numa certa superfície.

Para calcular o campo eléctrico de uma distribuição contínua de cargas, divide-se a carga em pequenos elementos, cada um com uma carga Δq , calcula-se o campo eléctrico criado por essa carga e depois, aplicando o princípio da sobreposição, somam-se todos os campos criados por todas as cargas, resultando

$$\Delta \vec{E} = k_e \cdot \frac{\Delta q}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = k_e \cdot \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = k_e \cdot \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

Na realização destes cálculos é conveniente ter a noção de densidade de carga; caso a carga Q esteja uniformemente distribuída por uma linha de comprimento l , então a densidade de carga por unidade de comprimento, ρ_{Ql} , é dada por

$$\rho_{Ql} = \frac{Q}{l}$$

Caso a carga esteja distribuída uniformemente por uma superfície de área S , então a densidade de carga por unidade de área, ρ_{QS} , é dada por

$$\rho_{QS} = \frac{Q}{S}$$



Por fim, se a carga estiver uniformemente distribuída por um volume V , então a densidade de carga por unidade de volume, ρ_{QV} , é dada por

$$\rho_{QV} = \frac{Q}{V}$$

Caso a carga não esteja uniformemente distribuída numa linha, superfície ou volume, então as densidades de carga correspondentes são dadas por

$$\rho_{Ql} = \frac{dQ}{dl} \qquad \rho_{QS} = \frac{dQ}{dS} \qquad \rho_{QV} = \frac{dQ}{dV}$$

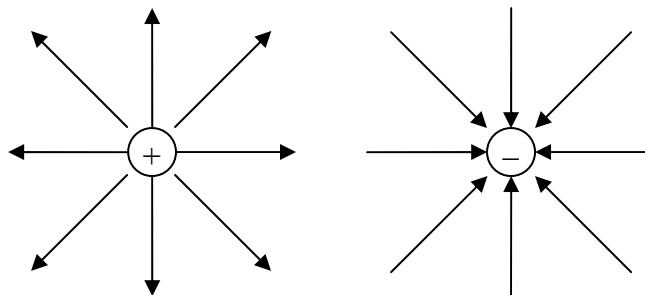
onde dQ é a quantidade de carga num elemento de linha, superfície ou volume.

3.8.1 Linhas do campo eléctrico

Uma forma conveniente de visualizar a configuração de um campo eléctrico consiste em traçar curvas que tenham sempre, em, qualquer ponto, a mesma direcção do vector campo eléctrico. Essas linhas, denominadas **linhas do campo eléctrico**, relacionam-se com o vector campo eléctrico, \vec{E} , da seguinte forma:

- o vector campo eléctrico, \vec{E} , é tangente, em cada ponto, à linha do campo eléctrico que passa pelo ponto
- o número de linhas, por unidade de área, que atravessam uma superfície perpendicular às linhas do campo, é proporcional ao valor do campo eléctrico na região (isto quer dizer que, se \vec{E} tiver módulo grande, as linhas do campo estarão muito juntas e se o módulo for pequeno as linhas estarão mais afastadas).

Se se considerar uma carga, q , então as linhas do campo eléctrico terão o seguinte aspecto:



Esta imagem é uma representação bidimensional; na realidade as linhas serão radiais em todas as direcções.

No caso de q ser positiva, colocando uma carga, q_1 , positiva neste campo, esta será repelida pela carga q , pelo que as linhas dirigem-se para fora da carga. No caso de q ser



negativa, então a mesma carga positiva, q_1 , irá ser atraída pela carga q , pelo que as linhas do campo, neste caso, dirigem-se para a carga.

Em qualquer dos casos, as linhas são radiais e estendem-se até ao infinito.

As regras para traçar as linhas do campo eléctrico são as seguintes:

- c) as linhas dirigem-se das cargas positivas para as cargas negativas
- d) o número de linhas que sai de uma carga positiva, ou que se aproximam de uma carga negativa, é proporcional ao módulo da carga
- e) não há cruzamento das linhas do campo eléctrico.

3.9 Campo Magnético

O fenómeno do magnetismo era conhecido dos gregos, quando estes observaram que certas pedras, actualmente denominadas de *magnetite*, atraíam pedaços de ferro.

O vector campo magnético \vec{B} , analogamente ao campo eléctrico e ao campo gravítico, pode ser definido em função da força (de natureza magnética) exercida num corpo de prova. A questão ficará, assim, reduzida a definir qual esse corpo. A unidade do campo magnético é o **Tesla (T)**.

Considere-se uma região do espaço em que não existe qualquer campo eléctrico ou gravítico; só existe um campo magnético. As experiências com o movimento de partículas carregadas electricamente, nessas regiões, levaram às seguintes observações:

- a) há uma força presente, a força magnética, que é proporcional à carga q e ao módulo da velocidade v da partícula;
- b) o módulo e a direcção da força magnética dependem da velocidade da partícula e da direcção e módulo do campo magnético;
- c) quando uma partícula se move numa trajectória paralela ao vector campo magnético, a força magnética exercida sobre a partícula é nula;
- d) se o vector velocidade fizer um ângulo θ com o vector campo magnético, a força magnética actua numa direcção perpendicular a \vec{v} e a \vec{B} ; por outras palavras, a força magnética é perpendicular ao plano definido por \vec{v} e \vec{B} ;
- e) a força magnética exercida sobre uma carga positiva tem sentido oposto à força magnética exercida sobre uma carga negativa que se mova com o mesmo vector velocidade;
- f) se o vector velocidade fizer um ângulo θ com o vector campo magnético, o módulo da força magnética é proporcional a $\sin \theta$.

Estas observações podem resumir-se na seguinte equação:

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$



Esta força tem a direcção dada pela direcção de $\vec{v} \times \vec{B}$, que, pela definição de produto vectorial, é perpendicular a \vec{v} e a \vec{B} ; o sentido da força é, assim, dado pela regra da mão direita (ou do saca-rolhas).

Na secção anterior considerou-se que as cargas presentes no campo eléctrico estavam paradas. Contudo, como elas vão estar sujeitas a uma força – a força eléctrica, o mais natural é moverem-se; mesmo que, num dado ponto, a força eléctrica seja nula, se a carga já estiver em movimento, então ela continuará a mover-se. Qual a consequência, se alguma, desse movimento?

É óbvio que, quando num campo eléctrico, a carga se mova e que a sua velocidade seja “influenciada” pelo campo eléctrico. Por outro lado, já se viu que uma carga em movimento, quando em presença de campo magnético, vai “sofrer” os efeitos da existência desse campo. É, assim, natural que a presença simultânea de um campo eléctrico e de um campo magnético, também influencie o seu movimento. Quando tal acontece, existe uma força, a força de Lorenz, que é dada por

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

3.10 Campo electromagnético

3.10.1 Equações de Maxwell

O campo electromagnético é formado por dois campos vectoriais: o campo eléctrico e o campo magnético. São caracterizados definindo as suas torneiras (e ralos) e as suas colheres, isto é, a sua divergência e o seu rotacional. As equações que fazem essas definições são as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Nestas equações, ρ é a densidade de carga e \vec{J} é a densidade de corrente. Se ρ_m for a densidade de carga móvel e \vec{v} for a velocidade dessa carga,

$$\vec{J} = \rho_m \cdot \vec{v}$$

Por outro lado, a corrente que atravessa uma superfície é o fluxo de densidade de corrente através da superfície:



$$I_s = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS$$

ε , a permissividade eléctrica e μ , a permeabilidade magnética, são constantes características do meio onde se estudam os campos.

As equações de Maxwell podem, agora, ler-se de forma clara.

De $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, conclui-se, que os pontos de densidade de carga positiva são torneiras do campo eléctrico e os pontos de densidade de carga negativa, os ralos. As cargas são, englobando uma característica do meio – a permissividade eléctrica, ε – as torneiras e os ralos do campo eléctrico.

Mas o campo eléctrico também é criado por colheres. De $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, conclui-se que a derivada em ordem ao tempo do campo magnético é colher do campo eléctrico.

O campo magnético não é criado por torneiras e ralos, pois $\text{div } \vec{B} = 0$. Não há carga magnética equivalente à carga eléctrica. Mas é criado por colheres. De $\text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, conclui-se que há dois tipos de colheres: a densidade de corrente e a derivada em ordem ao tempo do campo eléctrico. O campo magnético só é criado por colheres, logo é um campo solenoidal.

É usual definir dois novos campos a partir dos campos \vec{E} e \vec{B} , através das equações

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

\vec{D} chama-se deslocamento eléctrico e \vec{H} excitação magnética. Estas duas equações dizem-se equações constitutivas. Uma terceira equação relaciona, nos meios condutores, a densidade de corrente com o campo eléctrico:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

em que σ é a condutibilidade do condutor. Esta equação é outra forma de exprimir a lei de Ohm.

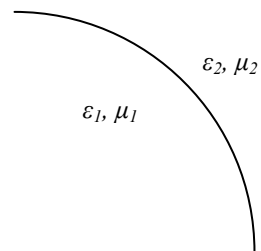
Com estes dois novos campos, as equações de Maxwell podem ser escrever-se:



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Repare-se que as constantes características da matéria, ε e μ , desapareceram das equações.

Entretanto, temos estado a falar do que se passa num meio caracterizado por uns certos ε e μ . As equações, no entanto, são válidas nas fronteiras entre os meios e delas tiram-se as seguintes equações de fronteira



$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} & H_{1t} &= H_{2t} \\ D_{1n} &= D_{2n} & B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned}$$

Ou seja, na fronteira de dois materiais, as componentes tangenciais de \vec{E} e \vec{H} são iguais bem como as componentes normais de \vec{D} e \vec{B} .

3.10.2 Situações Estacionárias

Uma parte importante do estudo do electromagnetismo é o das situações estacionárias. São as situações em que o comportamento macroscópico não é alterado no tempo. Assim sendo, as derivadas em ordem ao tempo nas equações de Maxwell são nulas, ficando

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{0} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \end{aligned}$$

O campo magnético, agora chamado magnetostático, continua a ser solenoidal e o campo eléctrico, agora chamado electrostático, é agora irrotacional, isto é, só de torneiras e ralos.

O campo eléctrico, agora tendo rotacional nulo, é gradiente de um campo escalar. Tomando o simétrico, como visto atrás, vem

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

A V chama-se potencial eléctrico ou tensão eléctrica e, tal como visto anteriormente,



$$V_B - V_A = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Os teoremas das “chávenas de café”¹ e das “banheiras”² podem aplicar-se aos campos. Aplicando o teorema das banheiras ao campo eléctrico, tem-se

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \vec{D} \, dV = \iiint_V \rho \, dV = Q$$

onde Q é a carga total no volume. Esta é a lei de Gauss, que diz que o fluxo do deslocamento eléctrico através de uma superfície fechada é igual à carga total no volume definido pela superfície.

Aplicando ao campo magnético, conclui-se que

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \vec{B} \, dV = 0$$

Aplicando o teorema das chávenas de café ao campo eléctrico, obtém-se

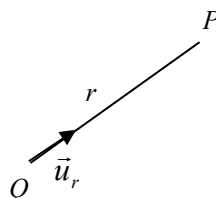
$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

O mesmo teorema aplicado ao campo magnético resulta em

$$\oint_S \vec{H} \cdot \vec{\tau} \, ds = \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = I_s$$

em que I é a corrente total que atravessa a superfície limitada pela linha. Esta é a lei de Ampère que diz que a circulação do campo excitação magnética ao longo de uma superfície fechada é igual à corrente que atravessa a superfície limitada pela curva.

Das equações de Maxwell é possível retirar as expressões dos campos criados por uma carga pontual:



¹ Teorema de Stokes.

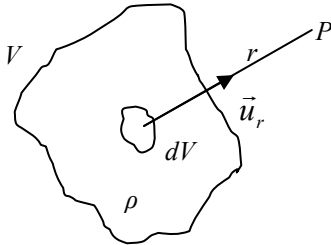
² Teorema de Green-Ostrogradsky.



Para o campo eléctrico resulta

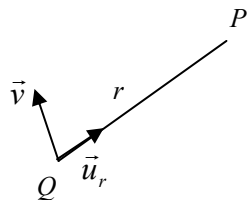
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Se se tiver um volume carregado com densidade ρ , então o campo criado pelo volume é o integral dos campos criados por cargas elementares ρdV .



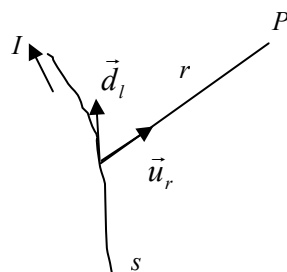
$$\vec{E} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\rho}{r^2} dV \vec{u}_r$$

O campo magnético só é criado por cargas em movimento.



$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot Q \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Daqui pode passar-se para o campo criado por uma corrente num circuito



$$\vec{B} = \int_s \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Esta expressão para o campo \vec{B} é a lei de Biot-Savart.

É possível determinar as forças que estes campos vectoriais criam.

A força provocada pelo campo eléctrico sobre uma carga q é

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

O campo magnético só actua sobre outra carga q se ela tiver uma velocidade \vec{v}



$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Este capítulo já tinha sido abordado anteriormente, mas aqui fez-se uma abordagem mais analítica do que tinha sido então descrito.

3.10.3 Situação Geral

A situação geral é mais complexa, embora muitos dos resultados anteriores sejam ainda válidos. As equações de Maxwell nos campos \vec{E} e \vec{B} são, então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Uma forma de abordar o problema é a seguinte: pegue-se na equação

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Aplique-se o rotacional aos dois membros da equação

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Isto não foi tratado aquando do tratamento de operações múltiplas, mas é fácil mostrar, a partir das respectivas expressões, que

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

Por outro lado, o lado direito da igualdade pode escrever-se como

$$\operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}$$

A equação fica, então

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}$$



Substituindo das equações de $\text{div } \vec{E}$ e $\text{rot } \vec{B}$, pelas obtidas nas equações de Maxwell, vem

$$\text{grad} \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

que pode ser escrito na forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

Aplicando o operador rotacional à equação que define $\text{rot } \vec{B}$, encontra-se

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \text{rot } \vec{J}$$

Estas duas equações governam o comportamento dos campos \vec{E} e \vec{B} , e representam as equações de radiação e propagação dos campos eléctrico e magnético.

Agora não se irá tratá-las com esta generalidade, embora isso seja feito mais tarde. Estas são equações que regem desde o comportamento de circuitos com correntes variáveis no tempo até aos campos electromagnéticos que a partir de aí se projectam no espaço e que constituem, como se verá, ondas electromagnéticas. Para já, vai ser abordado o problema da propagação destes campos no espaço longe dos circuitos que os criaram, não sendo abordado, portanto, o problema da radiação e das antenas.

3.10.4 Propagação de ondas electromagnéticas no vazio

As equações ficam, então, uma vez que no vazio não há cargas ou densidades de correntes ($\rho = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$),

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

É fácil ver como é que os campos se propagam. De facto, as equações de Maxwell ficam, na ausência de cargas ou correntes na forma



$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Os dois campos são, agora, ambos solenoidais. A propagação dos campos dá-se porque a derivada em ordem ao tempo de cada um vai sendo a “colher” do outro.



4 Ondas electromagnéticas

4.1 Onda electromagnética no vazio

As equações dos campos eléctrico e magnético no vazio, como visto anteriormente, são dadas por

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Atendendo à definição de laplaciano de um vector, vê-se que estas duas equações vectoriais se transformam em seis equações escalares:

$$\nabla^2 E_x - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_y - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_z - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\nabla^2 B_x - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B_y - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B_z - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

Desenvolvendo os laplacianos, as equações escrevem-se



$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

São seis equações de onda semelhantes à equação que se viu, a uma variável, para uma corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Agora, cada uma das equações é a três variáveis. Viu-se que, no caso de uma variável, a solução pode ser expressa como um integral duplo de soluções elementares, chamada onda harmónica do tipo

$$y = A \cos(\omega t \pm kx + \delta)$$

Agora pode-se dizer que qualquer solução de cada uma das seis soluções escalares pode ser expressa como um integral quádruplo (em k_x , k_y , k_z e t) de soluções elementares do tipo, por exemplo, para a componente E_x

$$E_x = E_x \cos(\omega t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z + \delta_x)$$

Chama-se a esta solução, uma onda plana monocromática, OPM.



Definindo um vector \vec{K} , vector de onda

$$\vec{K} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}$$

e sendo o vector de posição do ponto dado por

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

pode-se escrever a OPM na forma

$$E_x = E_x \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x)$$

$$E_y = E_y \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_y)$$

$$E_z = E_z \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_z)$$

e

$$B_x = B_x \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_x)$$

$$B_y = B_y \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_y) .$$

$$B_z = B_z \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_z)$$

Primeiro vai-se confirmar que a OPM é solução e quais as condições a impor a ω e a \vec{K} . Tal vai ser feito para a componente E_x , sendo as conclusões válidas para as outras componentes.

A equação é

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

e

$$E_x = E_x \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) = E_x \cos(\omega t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z + \delta_x)$$

Tome-se, por exemplo, a solução com o sinal negativo. Então,



$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) \cdot (-k_x) = k_x \cdot E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -k_x^2 \cdot E_x \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) = -k_x^2 \cdot E_x$$

Da mesma forma, concluir-se-ia que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -k_y^2 \cdot E_x \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k_z^2 \cdot E_x$$

Por outro lado

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) \cdot (\omega) = -\omega \cdot E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot E_x \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) = -\omega^2 \cdot E_x$$

Substituindo na equação, vem

$$-k_x^2 E_x - k_y^2 E_x - k_z^2 E_x + \varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot E_x = 0$$

Dividindo por E_x , a equação é satisfeita pela OPM se

$$\varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$$

onde K é chamado de número de onda, o módulo do vector de onda \vec{K} , e ω a frequência angular.

$$K = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

A onda plana monocromática pode ser representada, tal como foi feito com a onda harmónica a uma dimensão na corda, na forma complexa¹, vindo

¹ Ver secção 2.1.4.



$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \delta_X)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \delta_Y)}$$

$$E_z = E_Z \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \delta_Z)}$$

e

$$B_x = B_X \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \psi_X)}$$

$$B_y = B_Y \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \psi_Y)}$$

$$B_z = B_Z \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \psi_Z)}$$

Sabe-se, já, que para encontrar os campos reais tem que se projectar os complexos no eixo real, isto é, tomar os co-senos dos argumentos das exponenciais.

Inclusive, pode representar-se a solução fasorialmente

$$\underline{E}_x = E_X \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_X)}$$

$$\underline{E}_y = E_Y \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_Y)}$$

$$\underline{E}_z = E_Z \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_Z)}$$

e

$$\underline{B}_x = B_X \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_X)}$$

$$\underline{B}_y = B_Y \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_Y)}$$

$$\underline{B}_z = B_Z \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_Z)}$$

Sabe-se, agora, que para calcular o campo real, num certo instante, é preciso multiplicar o fasor por $e^{j\omega t}$, rodando de um ângulo ωt e achar os co-senos.



Note-se, também, que fasorialmente é possível simplificar a notação. De facto, em todos aqueles fasores há uma parcela comum, $e^{-j\vec{K}|\vec{r}}$. Então, para o campo eléctrico, se se definir um fasor vectorial

$$\vec{E}_0 = E_X \cdot e^{j\delta_X} \hat{i} + E_Y \cdot e^{j\delta_Y} \hat{j} + E_Z \cdot e^{j\delta_Z} \hat{k}$$

pode escrever-se, para o campo todo,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-j\vec{K}|\vec{r}}$$

Da mesma forma, fazendo

$$\vec{B}_0 = B_X \cdot e^{j\psi_X} \hat{i} + B_Y \cdot e^{j\psi_Y} \hat{j} + B_Z \cdot e^{j\psi_Z} \hat{k}$$

resulta

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{-j\vec{K}|\vec{r}}.$$

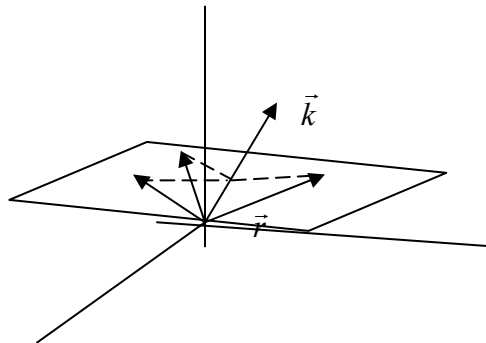
A OPM propaga-se no espaço; interessa saber qual a superfície cujos pontos têm, no mesmo instante, os mesmos valores do campo. Basta considerar as seis equações escalares como se escreveram ao princípio para entender que essas superfícies de igual valor do campo, chamadas frentes de onda, são dadas por

$$\omega t - \vec{K}|\vec{r} = \text{constante}$$

ou, para o mesmo instante,

$$\vec{K}|\vec{r} = \text{constante}$$

Esta situação corresponde à que se verifica na figura seguinte:



Atendendo à figura, vê-se que para que $\vec{K}|\vec{r}$ seja constante, então a projecção de \vec{r} em \vec{K} tem de ocorrer no mesmo ponto; tal só é possível para todos os pontos pertencentes a



um plano normal a \vec{K} , isto é, a frente de onda é plana. A onda plana monocromática diz-se plana justamente por isso. Diz-se monocromática porque envolve uma única frequência (uma única cor no espectro visível, como se verá a seguir).

A onda propaga-se, portanto, na direcção definida por \vec{K} e as frentes de onda, em que os campos \vec{E} e \vec{B} da onda têm, em cada instante, o mesmo valor, são planas perpendiculares a \vec{K} .

Há, também, relações entre os vectores do campo eléctrico \vec{E} , do campo magnético \vec{B} e do vector de onda \vec{K} , que serão vistas adiante.

Mais uma vez, tal como na onda harmónica da corda vibrante, é possível definir o comprimento de onda, λ , com marcação segundo o eixo segundo o qual a onda se propaga, através de

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Da mesma forma o período é

$$T = \frac{1}{f}$$

e a velocidade da onda é

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

Atendendo ao resultado encontrado atrás

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

vê-se que a velocidade de onda é

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

Para os ϵ e μ correspondentes ao vazio, nomeadamente ϵ_0 e μ_0 , constata-se que a velocidade é de $300\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, a velocidade da luz, designada por c , que é uma onda electromagnética, isto é,



$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

As OPMs podem ser expressas na forma complexa como

$$\vec{E} = E_X \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_X)} \hat{i} + E_Y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_Y)} \hat{j} + E_Z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_Z)} \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_X \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_X)} \hat{i} + B_Y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_Y)} \hat{j} + B_Z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_Z)} \hat{k}$$

As equações de Maxwell são

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Substituindo, por exemplo, a OPM na equação do rotacional de \vec{E} , fica, por um lado

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

em que

$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_X)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_Y)}$$

$$E_z = E_Z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_Z)}$$

Como a operação de derivar, para E_x , corresponde a multiplicar por $-jk_x$, vem

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -jk_x & -jk_y & -jk_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$



A operação de derivar para E_y corresponde a multiplicar por $-jk_y$ e para E_z corresponde a multiplicar por $-jk_z$.

Atendendo à definição de produto vectorial, pode escrever-se

$$\text{rot } \vec{E} = -j \cdot \vec{K} \times \vec{E}$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j \cdot \omega \cdot \vec{B}$$

Substituindo na equação de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

vem

$$-j \cdot \vec{K} \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B}$$

ou

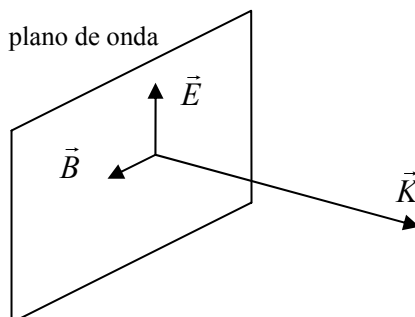
$$\vec{K} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B}$$

Fazendo o mesmo para as outras equações de Maxwell, resulta

$$\vec{K} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{K} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{K} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B} \qquad \vec{K} \times \vec{H} = -\omega \cdot \vec{D}$$

Destas equações, conclui-se que os vectores \vec{K} , \vec{E} e \vec{B} formam um triedro directo, ou seja, os campos \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares a \vec{K} , existem no plano que constitui a frente de onda e são tais que rodando \vec{E} para \vec{B} , um saca-rolhas dá a direcção de \vec{K} .





Faz, então, sentido fazer uma mudança de eixos das coordenadas. O eixo dos zz passa a coincidir em direção e sentido com o vector de onda \vec{K} . De notar que as frentes de onda são planos paralelos a \vec{K} .

Então,

$$\vec{K} = k \hat{k}$$

isto é, o vector de onda só tem componente segundo o eixo dos zz . Por outro lado, os campos \vec{E} e \vec{B} só têm componentes segundo os eixos dos xx e dos yy (e essas componentes só variam com z).

Os campos reais têm, então, componentes

$$E_x = E_X \cos(\omega t - k z + \delta_X)$$

$$E_y = E_Y \cos(\omega t - k z + \delta_Y)$$

e

$$B_x = B_X \cos(\omega t - k z + \psi_X)$$

$$B_y = B_Y \cos(\omega t - k z + \psi_Y)$$

Na forma complexa

$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - k z + \delta_X)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - k z + \delta_Y)}$$

e

$$B_x = B_X \cdot e^{j(\omega t - k z + \psi_X)}$$

$$B_y = B_Y \cdot e^{j(\omega t - k z + \psi_Y)}$$

Finalmente

$$\underline{E}_x = E_X \cdot e^{j(-kz + \delta_X)}$$

$$\underline{E}_y = E_Y \cdot e^{j(-kz + \delta_Y)}$$

e



$$\underline{B}_x = B_X \cdot e^{j(-kz + \psi_X)}$$

$$\underline{B}_y = B_Y \cdot e^{j(-kz + \psi_Y)}$$

ou, definindo os fasores de vectores

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_X \cdot e^{j\delta_X} \hat{i} + E_Y \cdot e^{j\delta_Y} \hat{j}$$

$$\underline{\vec{B}}_0 = B_X \cdot e^{j\psi_X} \hat{i} + B_Y \cdot e^{j\psi_Y} \hat{j}$$

vem

$$\vec{E} = \underline{\vec{E}}_0 \cdot e^{-jkz}$$

$$\vec{B} = \underline{\vec{B}}_0 \cdot e^{-jkz}$$

4.2 Polarização de ondas electromagnéticas

A equação do campo eléctrico pode ser re-escrita da seguinte forma

$$\vec{E} = E_X \cdot e^{j\delta_X} \cdot (\hat{i} + A e^{j\phi} \hat{j}) e^{-jkz}$$

ou ainda

$$\underline{\vec{E}}(z) = E_X \cdot e^{j\delta_X} \cdot (\hat{i} + A e^{j\phi} \hat{j}) e^{-jkz}$$

em que

$$A = \frac{E_Y}{E_X}$$

e

$$\phi = \delta_Y - \delta_X$$

A polarização de uma onda EM é definida pelos valores de A e ϕ descritos nesta equação. De seguida irão ser estudados vários tipos de polarização característicos. De notar que o produto $E_X \cdot e^{j\delta_X}$ é uma constante, pelo que, para efeitos de determinação da polarização da onda EM, se pode escrever

$$\underline{\vec{E}}(z) = (\hat{i} + A e^{j\phi} \hat{j}) e^{-jkz}$$



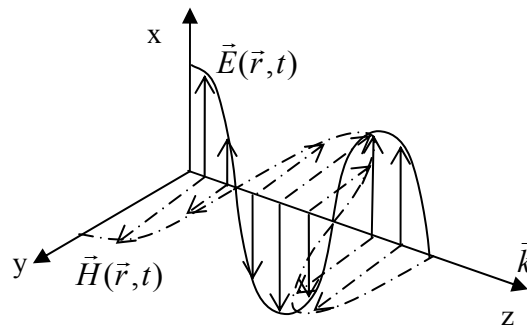
4.2.1 Polarização linear segundo o eixo dos xx

Neste caso tem-se $A = 0$, ficando

$$\vec{E}(z) = e^{-jkz} \hat{i}$$

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t - kz)$$

Neste caso os campos eléctrico e magnético irão ter o seguinte comportamento:



Este tipo de polarização diz-se linear segundo os xx , pois só existe campo eléctrico segundo o eixo dos xx e comporta-se como uma linha nesse eixo, vista do eixo dos zz .

4.2.2 Polarização linear fazendo um ângulo de 45° com o eixo dos xx

Agora, tem-se $A = 1$ e $\Phi = 0 \text{ rad}$, vindo

$$\vec{E}(z) = (\hat{i} + \hat{j})e^{-jkz}$$

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t - kz)$$

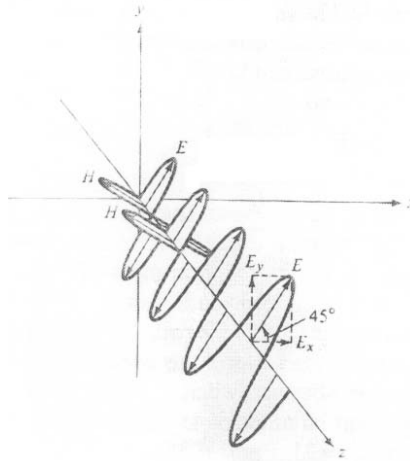
$$E_y(z, t) = \text{Re}\{e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t - kz)$$

O vector campo eléctrico, $\vec{E}(\vec{r}, t)$, forma 45° com o eixo dos xx e dos yy e tem por módulo e argumento

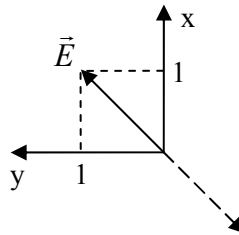
$$\sqrt{\cos^2(\omega t - kz) + \cos^2(\omega t - kz)} = \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - kz)$$

$$\arg \vec{E}(\vec{r}, t) = \arctg(1) = 45^\circ$$

O comportamento dos campo eléctrico e magnético está representado na figura seguinte:



Visto do eixo dos zz , o campo eléctrico tem o seguinte comportamento:



Como se pode observar, o campo eléctrico descreve uma recta que faz um ângulo de 45° quer com o eixo dos xx , quer com o eixo dos yy . Com $\Phi = 0$, tem-se $\Phi_x = \Phi_y$.

4.2.3 Polarização circular à esquerda

Nesta situação, tem-se $A = 1$ e $\Phi = \pi/2 \text{ rad}$, vindo o campo eléctrico

$$\underline{\vec{E}}(z) = \left(\hat{i} + \hat{j} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jkz}$$

Ficando

$$E_x = \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}(\omega t - kz)$$

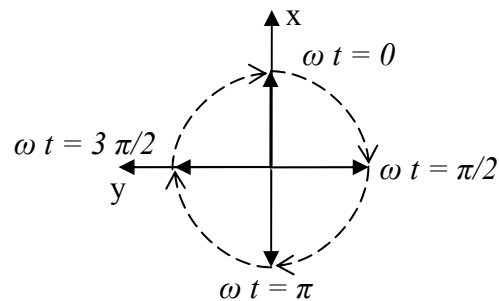
$$E(\vec{r}, t) = \sqrt{\cos^2(\omega t - kz) + \text{sen}^2(\omega t - kz)} = 1$$



O módulo do campo eléctrico é constante. O argumento é

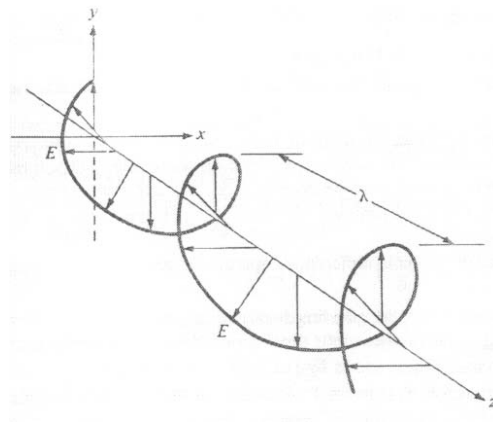
$$\arg \vec{E}(\vec{r}, t) = -\arctg [\operatorname{tg}(\omega t - kz)] = kz - \omega t$$

Visto segundo o eixo dos zz , na posição inicial, isto é, para $z = 0$, ou para posições em que kz seja múltiplo de 2π , o campo eléctrico terá o seguinte comportamento:



Como se pode constatar, o campo eléctrico descreve uma circunferência no sentido dos ponteiros dos relógios; está-se na presença de uma polarização circular à esquerda.

Visto a três dimensões, o seu comportamento é o seguinte:



4.2.4 Polarização circular à direita

Esta situação é em tudo idêntica à anterior, só que agora o desfasamento entre a componente segundo o eixo dos xx e dos yy é de -90° , ou seja, $A = 1$ e $\Phi = -\pi/2 \text{ rad}$. Nesta situação a expressão do campo eléctrico fica

$$\vec{E}(z) = \left(\hat{i} + \hat{j} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jkz}$$



Ficando

$$E_x = \cos(\omega t - k z)$$

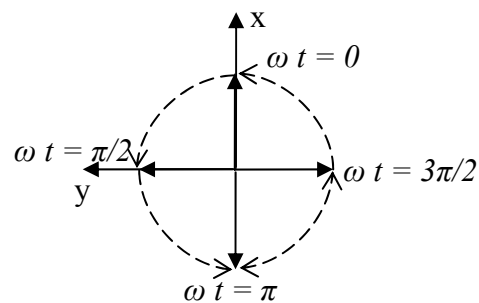
$$E_y = \cos\left(\omega t - k z - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(\omega t - k z)$$

$$E(\vec{r}, t) = \sqrt{\cos^2(\omega t - k z) + \text{sen}^2(\omega t - k z)} = 1$$

O módulo do campo eléctrico é constante. O argumento é

$$\arg \vec{E}(\vec{r}, t) = \omega t - k z$$

Visto segundo o eixo dos z , o campo eléctrico terá o seguinte comportamento:



Como se pode constatar, o campo eléctrico descreve uma circunferência no sentido contrário ao dos ponteiros dos relógios; está-se na presença de uma polarização circular à direita.

4.2.5 Polarização elíptica à esquerda

Considere-se o caso em que $A = 2$ e $\Phi = \pi/2 \text{ rad}$. O campo eléctrico virá, então,

$$\vec{E}(z) = \left(\hat{i} + \hat{j} \cdot 2e^{j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jkz}$$

Ficando

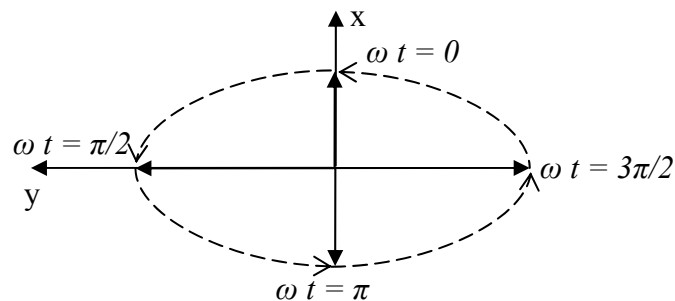


$$E_x = \cos(\omega t - k z)$$

$$E_y = 2 \cos\left(\omega t - k z + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \text{sen}(\omega t - k z)$$

$$E(\vec{r}, t) = \sqrt{\cos^2(\omega t - k z) + 4 \text{sen}^2(\omega t - k z)}$$

Visto segundo o eixo dos zz , o campo eléctrico terá o seguinte comportamento:



Como se pode verificar, a campo eléctrico descreve uma elipse no plano xy rodando no sentido dos ponteiros do relógio. Está-se na presença de uma polarização elíptica à esquerda.

4.2.6 Polarização elíptica à direita

Considere-se o caso em que $A = 2$ e $\Phi = -\pi/2 \text{ rad}$. O campo eléctrico virá, então,

$$\vec{E}(z) = \left(\hat{i} + \hat{j} \cdot 2e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jkz}$$

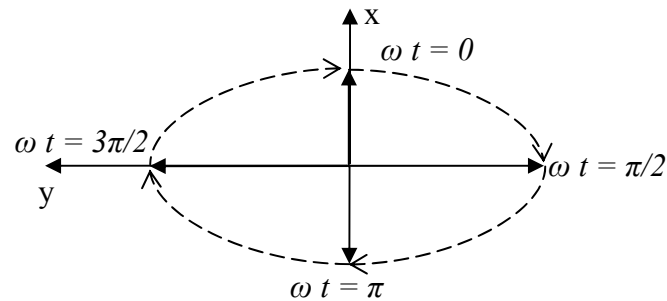
Ficando

$$E_x = \cos(\omega t - k z)$$

$$E_y = 2 \cos\left(\omega t - k z - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{sen}(\omega t - k z)$$

$$E(\vec{r}, t) = \sqrt{\cos^2(\omega t - k z) + 4 \text{sen}^2(\omega t - k z)}$$

Visto segundo o eixo dos zz , o campo eléctrico terá o seguinte comportamento:



Como se pode verificar, a campo eléctrico descreve uma elipse no plano xy rodando no sentido dos ponteiros do relógio. Está-se na presença de uma polarização elíptica à esquerda.

4.3 Energia e vector de Poynting

Considerem-se as seguintes duas das equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \vec{J} = \text{rot } \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

O produto interno $\vec{E} | \vec{J}$ representa a energia por unidade de volume.

Nos condutores, tem-se $\vec{J}_c = \sigma \cdot \vec{E}$, pelo que $\vec{E} | \sigma \cdot \vec{E} = \sigma \cdot E^2$, o que dá a lei de Joule.

Desenvolvendo o produto interno,

$$\vec{E} | \vec{J} = \vec{E} | \text{rot } \vec{H} - \varepsilon \cdot \vec{E} | \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Por outro lado, tem-se

$$\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} | \text{rot } \vec{a} - \vec{a} | \text{rot } \vec{b}$$

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} | \text{rot } \vec{E} - \vec{E} | \text{rot } \vec{H}$$

pelo que fica



$$\begin{aligned}
 \vec{E} \cdot \vec{J} &= \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 &= -\mu \cdot \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \\
 &= -\frac{\mu}{2} \cdot \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\partial E^2}{\partial t} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{H})
 \end{aligned}$$

Aplicando um integral de volume a ambos os lados desta equação, vem

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV + \iiint_V (\text{div}(\vec{E} \times \vec{H})) dV = - \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV$$

Aplicando o teorema de Green-Ostrogradsky, vem

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV + \oiint_S ((\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}) dS = - \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV$$

ou

$$\oiint_S ((\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}) dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV - \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV$$

em que o produto externo $\vec{E} \times \vec{H}$ dá o vector de Poynting, \vec{S} , isto é,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Pode então escrever-se

$$\oiint_S (\vec{S} \cdot \vec{n}) dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV - \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV$$

O termo do lado esquerdo desta equação representa o fluxo de energia através da superfície fechada S que contorna o volume V , enquanto que o primeiro termo da direita da equação representa a taxa de variação da energia armazenada nos campos eléctrico e magnético dentro do volume V . No caso de todas as fontes se encontrarem fora do volume V , o terceiro termo é uma perda óhmica. O termo da fonte é o vector de Poynting que compreende a fluxo de entrada da energia. Pode, então, escrever-se



$$\underbrace{\left| \oint_S (\vec{S} | \vec{n}) dS \right|}_{\text{termo fonte: entrada de energia devido às fontes exteriores a } V} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV}_{\text{taxa de incremento de energia eléctrica e magnética no volume } V} + \underbrace{\iiint_V (\sigma \cdot E^2) dV}_{\text{energia dissipada por calor}}$$

Quando as fontes se encontram dentro do volume V , o terceiro termo deve conter o termo da fonte. \vec{E} e \vec{J} , quando representam fontes estão em direcções opostas. Assumindo que não há perdas dentro do volume V , a equação do balanço energético vem

$$\underbrace{\iiint_V (\vec{E} | \vec{J}) dV}_{\text{termo fonte}} = \underbrace{\left| \oint_S (\vec{S} | \vec{n}) dS \right|}_{\text{fluxo de saída de energia do volume } V} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV}_{\text{taxa de incremento de energia armazenada no volume } V}$$

Por último, atendendo a que

$$\vec{J} = \vec{J}_S + \vec{J}_C$$

pode re-escrever-se

$$\iiint_V (\vec{E} | \vec{J}) dV = \iiint_V (\vec{E} | \vec{J}_S) dV + \iiint_V (\sigma \cdot E^2) dV$$

4.4 Ondas em meios condutores

Recordem-se as equações de radiação e de propagação dos campos eléctrico e magnético:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \text{rot } \vec{J}$$

Nos meios condutores, sem fontes de cargas, têm-se as seguintes relações:

$$\rho = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

pelo que se pode escrever



$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

e

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \sigma \text{rot } \vec{E} = \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

O efeito dos termos de perda, $\mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ e $\mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, nas equações anteriores é atenuar a onda em propagação, pois a energia é retirada da onda para fornecer as perdas por aquecimento óhmico no meio. Quando este termo é pequeno, por exemplo, num meio dieléctrico de baixas-perdas, em que $\sigma \approx 0$, a onda sofrerá uma pequena atenuação do tipo exponencial à medida que se propaga no meio. Por outro lado, quando as perdas por condução são grandes, $\sigma \gg 1$, a atenuação exponencial será tão rápida que quase nem se pode falar em propagação: é mais uma difusão no meio. Quer se trate de difusão ou de propagação depende dos dois últimos termos da equação para o \vec{E} , que pode ser identificado com a corrente de deslocamento e com a corrente de condução através de:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

em que \vec{J} é a corrente de condução e $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ é a corrente de deslocamento.

Num meio em que a corrente de deslocamento predomine (e se possa desprezar a corrente de condução), então o campo magnético é produzido pela corrente de deslocamento, ficando

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{E} - \mu \cdot \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$



No caso contrário, isto é, se a corrente de condução for predominante e a corrente de deslocamento desprezável, sendo a propagação caracterizada por uma equação de difusão, então fica

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{E} - \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Esta equação é conhecida como a equação de *corrente-eddy*, pois é da mesma forma da equação para a densidade de corrente, \vec{J} . Dado que $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$, a equação que rege o comportamento da corrente é:

$$\nabla^2 \vec{J} - \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0.$$

Mostrou-se que num meio em que a corrente de condução predomine (num condutor), o campo electromagnético obedece a uma equação de difusão, enquanto que num meio em que a corrente de deslocamento predomine (num dieléctrico) o campo electromagnético obedece a uma equação de onda.

Procure-se uma solução do tipo mono-freqüência (OPM). Decompondo nas componentes segundo o eixo dos xx e dos yy , vem

$$\nabla^2 E_x - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu \cdot \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

e

$$\nabla^2 E_y - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \mu \cdot \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

com $E_x = E_x \cdot e^{j\omega t}$ e $E_y = E_y \cdot e^{j\omega t}$, vem, por exemplo, para E_x , que só varia com z ,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \cdot j^2 \cdot \omega^2 \cdot E_x = \mu \cdot \sigma \cdot j \cdot \omega \cdot E_x$$

ou

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot E_x - \mu \cdot \sigma \cdot j \cdot \omega \cdot E_x = 0$$

Definindo uma permissividade complexa do tipo



$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon} \right)$$

e dividindo toda a equação por $e^{j\omega t}$, resulta

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon^* \cdot E_X = 0$$

Esta é a equação de um movimento harmónico que se pode pôr, fazendo $\beta^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon^*$,

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} + \beta^2 \cdot E_X = 0$$

e é satisfeita pela função

$$E_X = E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z}$$

De facto, substituindo, resulta

$$\frac{\partial E_X}{\partial z} = -j \cdot \beta \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = j^2 \cdot \beta^2 \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z} = -\beta^2 \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z}$$

o que, substituindo, fica

$$-\beta^2 \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z} + \beta^2 \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z} = 0 \quad (\text{confirmado})$$

β é um número complexo que se pode colocar na forma

$$\beta = k - j\alpha$$

ficando, então,

$$E_X = E_{X_0} \cdot e^{-j(k-j\alpha)z} = E_{X_0} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

e para o campo

$$E_x = E_{X_0} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$



Esta equação representa uma OPM de amplitude decrescente, em que α é a constante de atenuação e k é o número de onda.

De notar que num dieléctrico, tem-se $\sigma/\omega \cdot \epsilon \ll 1$ pelo que se tem

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \beta^2 \cdot E_x = 0 \quad \text{e} \quad E_x = E_{x_0} \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

em que $\beta^2 = \omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu$ (o que está coincidente com o que foi apresentado anteriormente). De igual modo, num meio altamente condutor, ou seja, $\sigma/\omega \cdot \epsilon \gg 1$, vem

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - j\omega \cdot \sigma \cdot \mu \cdot E_x = 0 \quad \text{e} \quad E_x = E_{x_0} \cdot e^{-z/\delta} \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

em que

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}$$

e é conhecida por profundidade de penetração no condutor. Para $z = \delta$, a amplitude reduz-se de um factor de $1/e$. Como δ pode tomar valores muito pequenos para condutores muito bons, mesmo a baixas frequências, a onda decresce exponencialmente muito depressa à medida que se propaga no meio, sendo mais característico de uma difusão do que uma propagação, o que, mais uma vez, está de acordo com o exposto anteriormente.

4.4.1 Impedância característica de um meio

A razão entre os módulos do campo eléctrico e do campo intensidade magnética dá a impedância característica de um meio, η , isto é

$$\eta = \frac{E}{H} \quad (\Omega)$$

Este valor pode ser obtido a partir do seguinte:

Considere-se a equação

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Atendendo às expressões obtidas para \vec{E} e para \vec{H} , tem-se



$$\text{rot } \vec{E} = -j\mu \cdot \omega \cdot \vec{H}$$

simplificando

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -j\mu \cdot \omega \cdot H$$

Atendendo à expressão obtida para \vec{E} , vem

$$H_0 = \frac{\beta}{\omega \cdot \mu} E_0$$

Pelo que se pode escrever

$$\eta = \frac{E}{H} = \frac{\omega \cdot \mu}{\beta}$$

No vazio, β é real, e tem-se

$$\eta_0 = \frac{E}{H} = \frac{\omega \cdot \mu_0}{\omega \sqrt{\varepsilon_0} \cdot \mu_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \Omega$$

Num meio dieléctrico com perdas baixas, tem-se

$$\eta^* = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon^*}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon}}} = \eta \cdot \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega \cdot \varepsilon}\right)$$

Aqui, como $\sigma \approx 0$, então $\eta^* \approx \eta$.

Num meio condutor, tem-se

$$\eta^* = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon^*}} \cong \sqrt{j \frac{\omega \cdot \mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2\sigma}}$$

4.4.2 Onda num meio qualquer

Neste caso define-se a permissividade complexa da seguinte forma:



$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(1 - j \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - j \frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon} \right) = \left(1 - j \frac{\omega \cdot \varepsilon' + \sigma}{\omega \cdot \varepsilon} \right)$$

Esta permissividade pode ser entendida como

$$\varepsilon_{ef} = \varepsilon - j\varepsilon'$$

ou

$$\sigma_{ef} = \sigma + \omega \cdot \varepsilon'$$

A

$$\text{tg } \phi = \frac{\sigma + \omega \cdot \varepsilon'}{\omega \cdot \varepsilon'}$$

chama-se tangente de perdas ou factor de dissipação.

4.5 Reflexão de OPMs por um condutor perfeito

4.5.1 Incidência normal

A componente segundo os xx é

$$E_x = E_X^i \cdot e^{j(\omega t - kz)} + E_X^r \cdot e^{j(\omega t + kz)}$$

correspondentes à onda incidente e reflectida (repare-se o sinal positivo em kz o que indica uma onda que se propaga em sentido contrário à onda incidente com sinal negativo).

Na fronteira, ou seja, em $z = 0$, tem-se

$$E_x|_{z=0} = (E_X^i + E_X^r) \cdot e^{j\omega t} = 0 \quad (\text{das condições fronteira})$$

$$E_X^i = -E_X^r$$

O coeficiente de reflexão, Γ , é dado por

$$\Gamma = \frac{E_X^r}{E_X^i} = -1$$

ou seja, há reflexão total.



A equação da componente segundo os xx pode, então, escrever-se da seguinte forma:

$$E_x = E_X^i \cdot (e^{-jkz} - e^{jkz}) \cdot e^{j\omega t}$$

Aplicando a relação de Euler para o seno, vem

$$E_x = -2jE_X^i \cdot \text{sen}(kz) \cdot e^{j\omega t}$$

e o valor instantâneo é dado por

$$E_x = 2E_X^i \cdot \text{sen}(kz) \cdot \text{sen}(\omega t)$$

o que representa uma onda estacionária.

Adoptando um procedimento idêntico para H_x , chegar-se-ia à solução

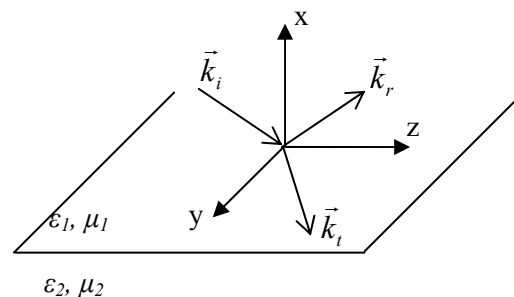
$$H_x = \frac{2H_X^i}{\eta} \cdot \cos(kz) \cdot \cos(\omega t)$$

4.5.2 Condições na fronteira entre dois dieléctricos

Uma onda que viaje num meio e incida num dieléctrico vai ser parcialmente reflectida e parcialmente transmitida para o dieléctrico. Neste caso tem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2} \\ H_{t1} &= H_{t2} \end{aligned}$$

Na figura seguinte, \vec{k} é um fasor, com toda a generalidade, \vec{k} , sendo em geral um complexo.



As equações fasoriais dos campos incidente, reflectido e transmitido, são



$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_i \cdot e^{-j(\vec{k}_i|\vec{r})}$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_r \cdot e^{-j(\vec{k}_r|\vec{r})}$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_t \cdot e^{-j(\vec{k}_t|\vec{r})}$$

As condições fronteira são independentes do tempo, pelo que se pode escrever

$$\left\{ \vec{E}_i(0, y, z) + \vec{E}_r(0, y, z) \right\}_{\text{tang}} = \left\{ \vec{E}_t(0, y, z) \right\}_{\text{tang}}$$

Para todo o ponto (y, z) da fronteira, $x = 0$, pelo que

$$\left\{ \vec{E}_i \cdot e^{-jk_{iy}y - jk_{iz}z} + \vec{E}_r \cdot e^{-jk_{ry}y - jk_{rz}z} \right\}_{\text{tang}} = \left\{ \vec{E}_t \cdot e^{-jk_{ty}y - jk_{tz}z} \right\}_{\text{tang}}$$

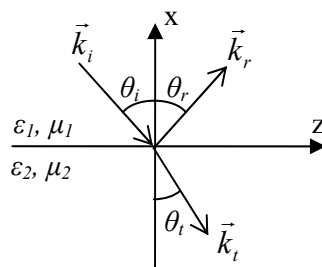
Para ser independente do ponto, deve ser

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y$$

$$k_{iz} = k_{rz} = k_{tz} = k_z$$

Pode-se, então, afirmar que \vec{k}_i , \vec{k}_r e \vec{k}_t são coplanares, num plano normal ao plano de separação.

Rodando os eixos, vem



Donde se tiram as relações



$$\vec{k}_i = -k_1 \cos(\theta_i) \hat{i} + k_1 \sin(\theta_i) \hat{k}$$

$$\vec{k}_r = k_1 \cos(\theta_r) \hat{i} + k_1 \sin(\theta_r) \hat{k}$$

$$\vec{k}_t = -k_2 \cos(\theta_t) \hat{i} + k_2 \sin(\theta_t) \hat{k}$$

Definem-se k_1 e k_2 como

$$k_1 = |\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = \omega \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1}$$

$$k_2 = |\vec{k}_t| = \omega \sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2}$$

Atendendo a que $k_{i_z} = k_{r_z} = k_{t_z}$, tiram-se as seguintes relações:

$$\text{De } k_{i_z} = k_{r_z}, \text{ sen}(\theta_i) = \text{sen}(\theta_r) \Rightarrow \theta_i = \theta_r$$

$$\text{De } k_{i_z} = k_{t_z}, k_1 \cdot \text{sen}(\theta_i) = k_2 \cdot \text{sen}(\theta_t)$$

ou seja,

$$\frac{\text{sen}(\theta_i)}{\text{sen}(\theta_t)} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega \cdot \sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2}}{\omega \cdot \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2}$$

Esta é a lei de Snell para a refração.

4.5.3 Leis de Snell

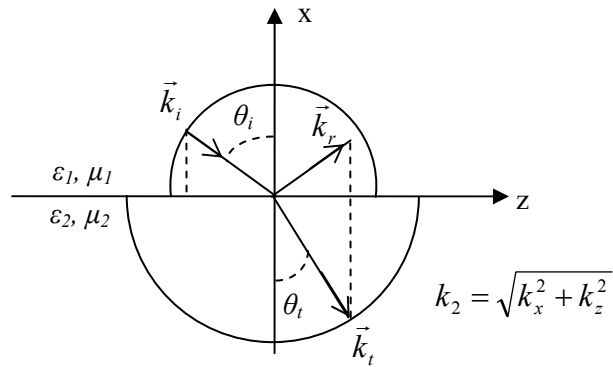
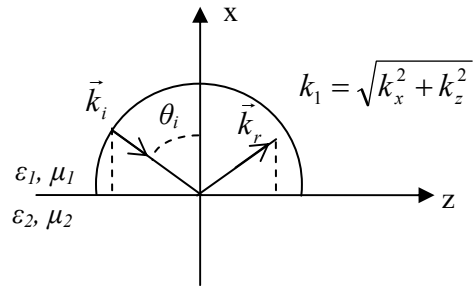
O índice de refração de um dado meio, n , é dado por

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

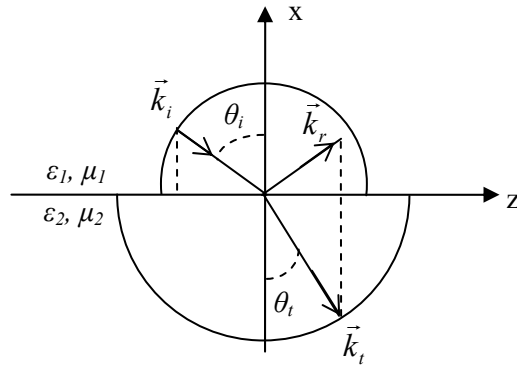
pelo que nos casos em que $\mu_1 = \mu_2$, pode se escrever a lei de Snell do seguinte modo:

$$\frac{\text{sen}(\theta_i)}{\text{sen}(\theta_t)} = \frac{\sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_1}} = \frac{\mu_1 \cdot \sqrt{\varepsilon_2}}{\mu_2 \cdot \sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Atente-se às seguintes figuras:



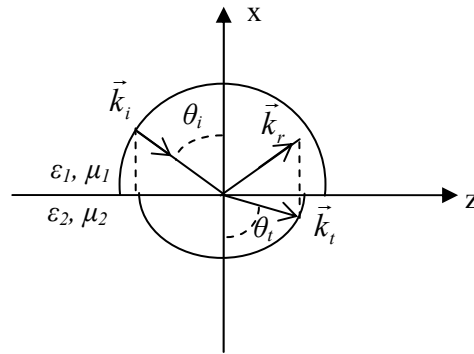
Na situação seguinte, $k_2 > k_1$:



donde se tira

$$k_2 > k_1 \rightarrow \sqrt{\mu_2 \cdot \epsilon_2} > \sqrt{\mu_1 \cdot \epsilon_1} \quad \text{ou} \quad v_1 > v_2 \rightarrow \theta_i < \theta_t$$

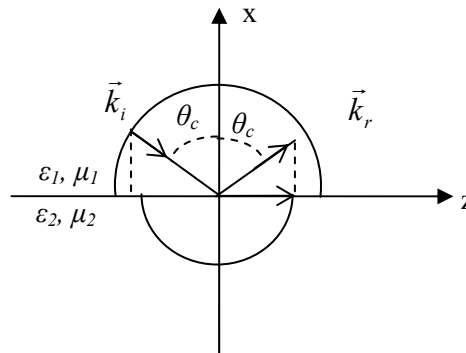
A seguir representa-se o caso em que $k_1 > k_2$:



Agora, tem-se

$$k_1 > k_2 \rightarrow \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1} > \sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2} \quad \text{ou} \quad v_2 > v_1 \rightarrow \theta_t > \theta_i$$

Um caso particular de interesse, é o caso em que há reflexão total; neste caso, o ângulo do segundo meio é 90° , isto é, $\theta_t = 90^\circ$, ficando



Matematicamente, fica

$$k_1 \cdot \text{sen}(\theta_c) = k_2$$

em que θ_c é o chamado ângulo crítico. Tem-se ainda

$$\text{sen}(\theta_c) = \frac{k_2}{k_1}$$

Um outro caso de interesse é quando a incidência é normal à fronteira entre os dois meios, isto é, $\theta_i = 0$. Na fronteira, $z = 0$, tem-se

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t$$

$$H_0^i + H_0^r = H_0^t$$



pelo que se pode escrever

$$1 + \Gamma = \tau$$

e

$$1 - \Gamma = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau$$

em que Γ é o coeficiente de reflexão (definido na secção 4.5.1) e τ é o coeficiente de transmissão e define-se como

$$\tau = \frac{E_t}{E_i}$$

Resolvendo as duas equações anteriores simultaneamente, fica

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

e

$$\tau = \frac{2 \cdot \eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

em que η é a impedância característica do meio.

4.5.4 Campo evanescente

Quando o ângulo de incidência é maior que o ângulo crítico, isto é, quando $\theta_i > \theta_c$, vem

$$k_{t_x} = \sqrt{k_2^2 - k_z^2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cdot \text{sen}^2(\theta_i)}$$

Como, neste caso, $k_1 \cdot \text{sen}(\theta_i) > k_2$, fica

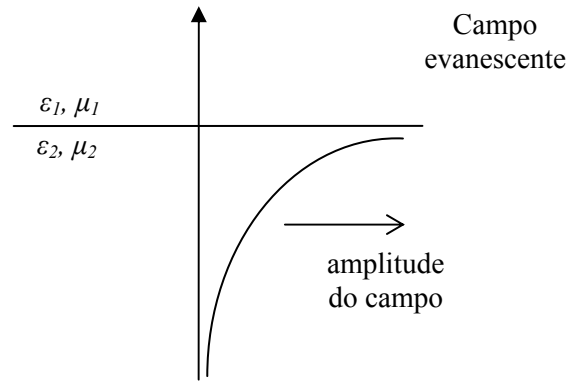
$$k_{t_x} = \pm j \sqrt{k_1^2 \cdot \text{sen}^2(\theta_i) - k_2^2} = \pm j \alpha_{t_x}$$

Substituindo na equação fasorial de \vec{E}_t , vem



$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_t \cdot e^{-j(k_{t_x}x + k_z z)} = \vec{E}_t \cdot e^{-jk_z z} \cdot e^{-jk_{t_x}x} = \vec{E}_t \cdot e^{-jk_z z} \cdot e^{-j(\pm j\alpha_{t_x})x} = \vec{E}_t \cdot e^{-jk_z z} \cdot e^{\pm\alpha_{t_x}x}$$

A solução limitada ocorre quando $k_{t_x} = -j\alpha_{t_x}$, em que se tem

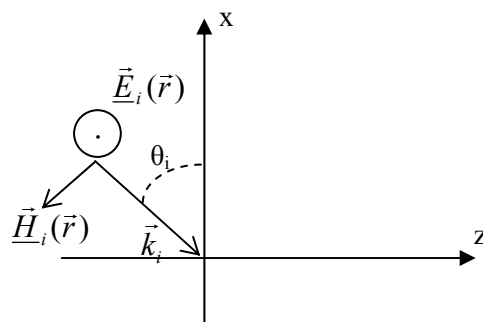


4.6 Ondas transversais

As condições fronteira impõem ainda relações entre as amplitudes de \vec{E}_i , \vec{E}_r e \vec{E}_t . Para as encontrar, vai decompor-se a onda incidente de polarização arbitrária em duas componentes, uma de polarização ortogonal e ao plano de incidência (plano dos \vec{k}) e outra de polarização paralela, somando-se, depois, os efeitos.

4.6.1 Ondas TE

São ondas de polarização normal ou transversal ao plano de incidência (daí o nome Transversal Eléctrica).



Sem perda de generalidade, pode-se pôr

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = e^{-j(k_{t_x}x + k_z z)} \hat{j}$$



o que equivale a fazer

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = (0,1,0)$$

As ondas reflectida e transmitida, também polarizadas segundo \hat{j} , vêm

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_r \cdot e^{-j(k_{rx}x+k_zz)} \hat{j}$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_t \cdot e^{-j(k_{tx}x+k_zz)} \hat{j}$$

Como só há componente segundo os yy , pode escrever-se

$$\underline{E}_r(\vec{r}) = \underline{E}_r \cdot e^{-j(k_{rx}x+k_zz)}$$

$$\underline{E}_t(\vec{r}) = \underline{E}_t \cdot e^{-j(k_{tx}x+k_zz)}$$

onde \underline{E}_r e \underline{E}_t são fasores, constantes complexas, do tipo

$$\underline{E}_r = E_r \cdot e^{j\phi_r}$$

$$\underline{E}_t = E_t \cdot e^{j\phi_t}$$

Tem-se, então,

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_i(\vec{r}) &= e^{-jk_{ix}x} \\ \vec{E}_r(\vec{r}) &= R \cdot e^{-jk_{rx}x} \\ \vec{E}_t(\vec{r}) &= T \cdot e^{-jk_{tx}x} \end{aligned} \right\} \cdot e^{-jk_zz} \hat{j}$$

A partir de

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \cdot \mu} \cdot \vec{K} \times \vec{E}$$

Defina-se



$$R^{(TE)} = \frac{\underline{E}_r}{\underline{E}_i} \quad \text{coeficiente de reflexão}$$

$$T^{(TE)} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{E}_i} \quad \text{coeficiente de transmissão}$$

então obtém-se

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = \frac{1}{\omega \cdot \mu} (-k_{i_x} \hat{k} - k_z \hat{i}) e^{-jk_{i_x}x} \cdot e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = \frac{R}{\omega \cdot \mu} (k_{r_x} \hat{k} - k_z \hat{i}) e^{-jk_{r_x}x} \cdot e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}_t(\vec{r}) = \frac{T}{\omega \cdot \mu} (-k_{t_x} \hat{k} - k_z \hat{i}) e^{-jk_{t_x}x} \cdot e^{-jk_z z}$$

Impondo a condição de igualdade das componentes tangenciais, vem, para $x = 0$,

$$1 + R = T \quad \text{(do campo eléctrico)}$$

$$-\frac{1}{\omega \cdot \mu_1} k_{i_x} + \frac{R}{\omega \cdot \mu_1} k_{r_x} = -\frac{T}{\omega \cdot \mu_2} k_{t_x} \quad \text{(do campo magnético)}$$

Atendendo a que

$$k_{i_x} = k_{r_x}$$

fica

$$\frac{1}{\mu_1} k_{i_x} \cdot (1 - R) = \frac{1}{\mu_2} k_{t_x} \cdot T$$

$$1 - R = \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot T$$

De



$$1 + R = T$$

$$1 - R = \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot T$$

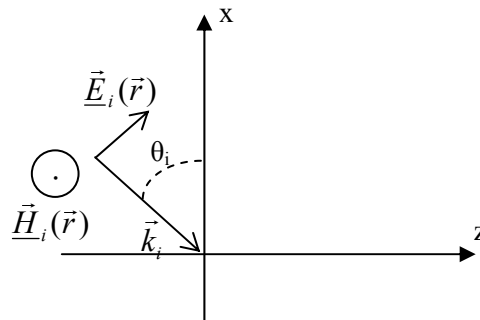
tira-se

$$R^{(TE)} = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}$$

$$T^{(TE)} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}$$

4.6.2 Ondas TM

Neste caso, a polarização é paralela ao plano, portanto é $\vec{H}_i(\vec{r})$ que é normal, ou transversal (daí o nome Transversal Magnética).



Por dualidade

$$E \rightarrow H$$

$$H \rightarrow E$$

$$\mu \rightarrow \varepsilon$$

$$\varepsilon \rightarrow \mu$$



$$R^{(TM)} = \frac{H_r}{H_i} = \frac{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}$$

$$T^{(TM)} = \frac{H_t}{H_i} = \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}$$

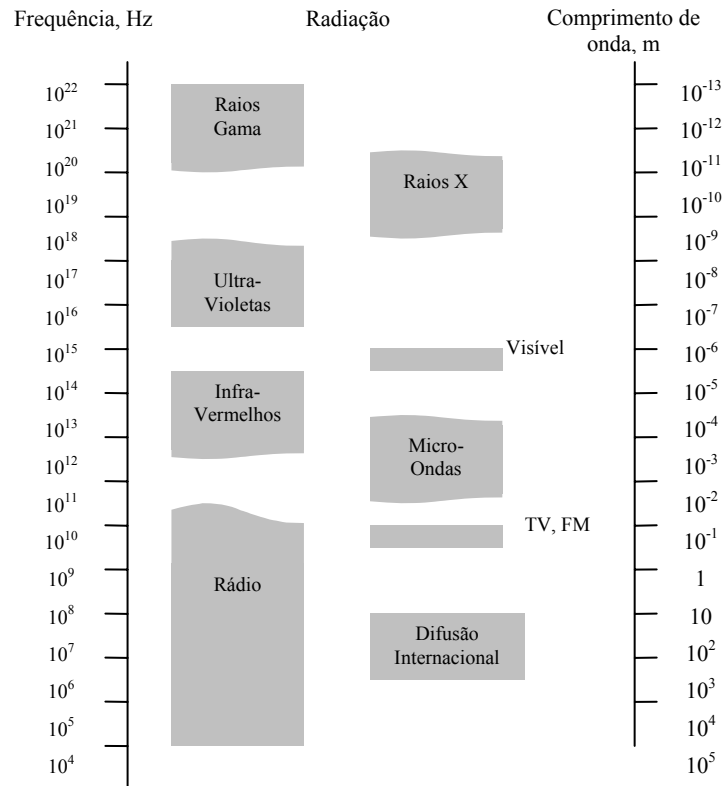
Toda a onda que encontra objectos ou fendas de dimensões superiores ao comprimento de onda pode ser parcialmente analisada em termos de raios: é o campo da óptica.

Fenómenos que envolvem objectos ou fendas de dimensão do comprimento de onda exigem tratamento rigoroso; o mesmo acontece nos fenómenos de interferência.

4.7 Espectro electromagnético

As ondas electromagnéticas propagam-se no vazio e no ar a uma velocidade de 3×10^8 ms^{-1} . A gama de frequências das ondas electromagnéticas vai desde as “baixas frequências” – utilizadas nas comunicações rádio – até às altas-frequências que se encontram nos raios X e Gama.

Ao conjunto de frequências das ondas EM chama-se espectro electromagnético, representado na figura seguinte:



Para uma melhor ideia do significado do espectro, atente-se à tabela seguinte:

Espectro electromagnético			
Comprimento de onda (λ)	Frequência (f)	Designação	Utilização comum
30 km	10^4 Hz	VLF	Comunicação rádio a distâncias longas Comunicação submarina
3 km	10^5 Hz	Ondas Longas	
30 m	10^7 Hz = 10 MHz	Ondas Curtas	
30 cm	10^9 Hz = 1 GHz	UHF	TV, radar
3 cm	10 GHz	Ondas Centimétricas	Satélite, radar
0,3 cm = 300 μ m	10^{12} Hz		
3 μ m = 3000 nm	10^{14} Hz	Infravermelhos, espectro molecular	
700 nm	$4,2 \times 10^{14}$ Hz	Luz	
40 nm	$7,5 \times 10^{14}$ Hz		
30 nm = 300 Å	10^{16} Hz	Ultravioleta, espectro atómico	
300 pm	10^{18} Hz	Raios X	
< 3 pm	10^{20} Hz	Raios γ	



4.8 Antenas

As equações de radiação e de propagação dos campos eléctrico e magnético já foram vistas na secção 3.10.3 e são:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \text{rot } \vec{J}$$

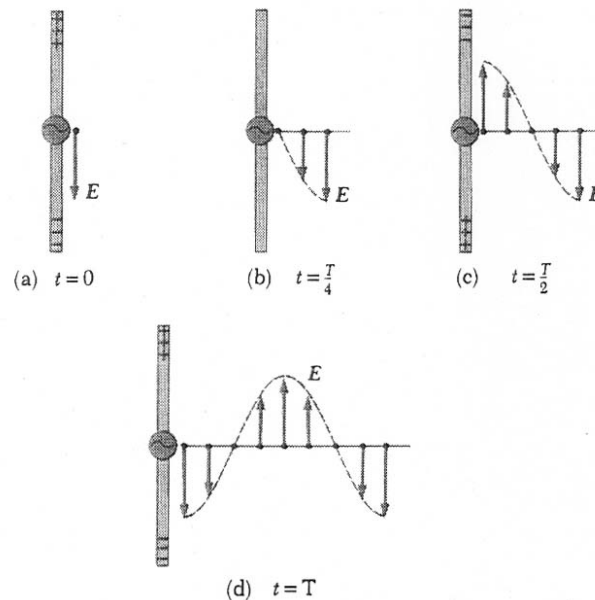
Estas equações descrevem o comportamento dos campos eléctrico e magnético aquando da sua propagação para pontos no espaço longe dos circuitos que os criaram. Quando tal não acontece está-se perante o problema de antenas, que é abordado nesta secção.

Como se viu anteriormente, as ondas electromagnéticas são geradas como consequência de um de dois efeitos: ou a partir de um campo magnético variável que produza um campo eléctrico ou a partir de um campo eléctrico variável que produza um campo magnético. Torna-se, então, claro, que nem cargas estacionárias, nem correntes constantes são capazes de gerar ondas electromagnéticas. Quando uma corrente que circule num condutor variar no tempo, então o condutor irá emitir radiação electromagnética. O mecanismo fundamental responsável por essa irradiação é a aceleração de partículas carregadas, isto é, sempre que uma partícula carregada sofre uma aceleração, então irradia energia.

Uma técnica comum para acelerar partículas carregadas, consiste em aplicar uma tensão nos condutores de uma antena, sendo a fonte das ondas de rádio emitidas pelas antenas das estações rádio-emissoras.

A figura seguinte¹ ilustra a produção de uma onda electromagnética através das cargas oscilantes de uma antena:

¹ Retirada de [8].



Neste caso ligam-se duas hastes metálicas a um gerador de corrente alternada, o que irá provocar a oscilação das cargas entre as duas hastes, sendo, neste caso, a tensão aos terminais do gerador, sinusoidal. No instante inicial, isto é, em $t = 0$ s, a haste de cima tem uma carga positiva máxima enquanto que a haste de baixo tem uma carga igual mas negativa. Também está representado o campo eléctrico nas vizinhanças da antena nesse instante. Quando a carga oscila, as hastes ficam menos carregadas, fazendo com que o campo nas vizinhanças das hastes diminua de intensidade, enquanto que o campo eléctrico gerado no instante inicial se afasta das hastes. Quando as cargas se neutralizam, como se pode ver na alínea b) da figura, a campo eléctrico fica também nulo; tal ocorre passado um quarto de período de oscilação. Continuando o processo, de seguida a haste superior aumenta a sua carga negativa, até atingir um máximo, ficando, nesse instante, a haste inferior com a carga positiva máxima, originando um campo eléctrico dirigido de baixo para cima, como se pode ver na alínea c) da figura. Este instante ocorre meio período depois de iniciado o processo. A seguir, ocorre um processo inverso, até se atingir a situação em que a haste de cima fica com a carga positiva máxima e a de baixo com a carga negativa máxima, isto é, volta-se à posição inicial – situação descrita na alínea d) da figura. Neste instante decorreu um período de oscilação, seguindo-se, posteriormente, uma repetição de todo este processo.

Do que foi descrito, pode concluir-se que foi gerado um campo eléctrico que se foi afastando (propagando) das duas hastes, pelo que se diz que estas formam uma antena. Perpendicularmente ao campo eléctrico, e ao mesmo tempo, é também criado um campo magnético, através de um processo análogo. Está-se, então, na presença de uma fonte dos campos eléctrico e magnético, ou seja, da radiação electromagnética.

Um processo inverso, mas análogo, ocorre quando as hastes “estão no caminho” de uma onda electromagnética: aos seus terminais ter-se-á, então, uma tensão alternada, de acordo com o campo electromagnético da onda (a antena deixa de ser uma “torneira”, para passar a ser um “ralo” do campo electromagnético).



5 Fibras ópticas

5.1 Introdução

O grande interesse na comunicação por fibras ópticas surgiu em 1960 com o aparecimento do laser, que permitiu uma fonte óptica coerente. Como as frequências ópticas se encontram na ordem dos 5×10^{14} Hz, o laser dispõe de uma capacidade de informação teórica que excede a dos sistemas de micro-ondas por um factor de 10^5 , ou seja, aproximadamente 10 milhões de canais de televisão.

Contudo, o ar não se mostrou um bom meio de transmissão para a tecnologia óptica, como para as micro-ondas, devido às limitações que esse canal – o ar – impõe por causa da chuva, da neve ou das poeiras que inviabilizam um sistema óptico que seja rápido e barato. Já as fibras ópticas fornecem um canal muito mais fiável e versátil. Há um pequeno senão: é que para que tal suceda é necessário que o vidro empregue seja extremamente puro, isto é, não pode conter um elevado número de impurezas, pois tal introduz uma atenuação elevada no sinal. De facto, com a purificação do material empregue, reduziram-se de tal forma as perdas numa fibra óptica até ao ponto em que se tornaram possíveis os sistemas de comunicação ópticos.

O desenvolvimento e aplicação dos sistemas de fibra óptica cresceu da combinação da tecnologia de semicondutores, que fornecem as fontes de luz e os fotodetectores necessários, e a tecnologia de guias-de-onda ópticas. O resultado foi o estabelecimento de um circuito com várias vantagens sobre os sistemas de cobre, tais como:

- Baixa perda na transmissão e grande largura de banda: as fibras ópticas têm perdas de transmissão menores e larguras de banda maiores que os fios de cobre, o que significa que os sistemas de cabo de fibras ópticas podem percorrer grandes distâncias, diminuindo o número de fios e o número de repetidores necessários para estes domínios; esta redução de equipamento e de componentes diminui o custo do sistema e a sua complexidade;
- Tamanho e peso reduzidos: o baixo peso e as reduzidas dimensões (espessura de um cabelo) das fibras oferecem uma clara vantagem face aos pesados, e “espaçosos” cabos de fios nas condutas de grandes cidades densamente populosas ou em sistemas montados nos telhados; esta questão também é importante nos aviões, nos satélites e nos navios, onde cabos pequenos e leves são claramente vantajosos, e em aplicações militares, em que são necessárias grandes quantidades de cabos;
- Imunidade à interferência: um aspecto particularmente importante das fibras ópticas diz respeito à sua natureza dielétrica; esta característica permite guias-de-onda ópticas imunes às interferências electromagnéticas (EMI), tais como os picos de fios transportadores de sinal e os relâmpagos; também assegura liberdade quanto aos efeitos dos impulsos electromagnéticos (EMP), com particular interesse nas aplicações militares;
- Isolamento eléctrico: como as fibras ópticas são construídas em vidro, que é um isolante eléctrico, não é necessário preocupar-se com anéis de terra, *crosstalk* de fibra para fibra e os problemas das interfaces dos equipamentos



são simplificadas; também as torna particularmente atractivas em meios de risco, pois as fibras não originam arcos nem faíscas;

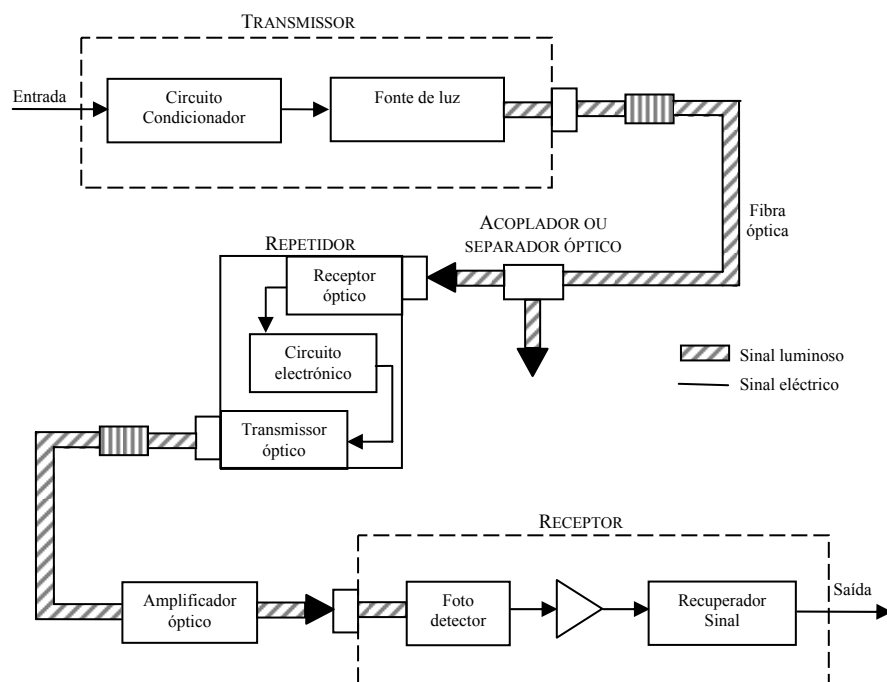
- Segurança do sinal: ao usar uma fibra óptica, o grau de segurança de dados é grande, pois o sinal óptico está bem confinado dentro da guia-de-onda (com as eventuais emanações a serem absorvidas por um revestimento opaco da fibra), o que torna as fibras atractivas em aplicações em que a segurança da informação seja importante, como em redes bancárias, de computadores ou de sistemas militares, por exemplo;
- Abundância de matéria-prima: a principal matéria-prima é o vidro que é feito a partir da areia, que é abundante e barato; o principal factor de encarecimento da fibra é o processo de purificação necessário para obter vidro muito puro a partir da areia.

As primeiras aplicações dos sistemas de transmissão de fibra óptica foram para as troncas de linhas telefónicas; actualmente usam-se RDIS (voz, fax, comunicação de dados, serviços de difusão de serviços áudio e vídeo). As taxas de transmissão vão desde os 1,7 Gbps (nas troncas telefónicas) até aos 10 Gbps (para RDIS de banda larga).

A detecção coerente oferece melhorias significativas na sensibilidade dos receptores e na selectividade do comprimento de onda sobre a detecção directa e permite o uso de equalização electrónica para compensação dos efeitos de dispersão dos impulsos ópticos na fibra. As aplicações incluem LANs, anéis de assinantes e distribuição de televisão.

5.2 Noção de circuito óptico

Um circuito óptico tem, basicamente, os seguintes elementos:



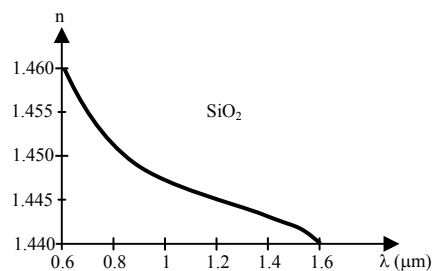


Os elementos chave do circuito são o transmissor, que consiste numa fonte de luz e os circuitos apropriados para converter o sinal eléctrico num sinal luminoso apropriado, um cabo que ofereça protecção mecânica e ambiental às fibras ópticas contidas no seu interior e um receptor que consista num fotodetector, amplificador e um recuperador (restaurador) do sinal eléctrico. Podem existir vários componentes adicionais, tais como ligadores (acopladores), divisores de sinal, agrupadores de sinal e repetidores. O cabo de fibra óptica é um dos elementos mais importantes num circuito óptico, pois, para além de proteger as fibras de vidro durante a instalação e ao longo da utilização, podem conter fios de cobre para alimentar os repetidores que são necessários para amplificar e restaurar o sinal periodicamente, quando os circuitos cobrem grandes distâncias. O cabo contém, normalmente, várias fibras cilíndricas, da espessura de um cabelo, cada uma sendo um canal de comunicação independente.

Tal como os cabos de cobre, a instalação dos cabos de fibra óptica pode ser aérea, em condutas, submersa ou enterrada no solo. Como resultado das limitações de fabrico e/ou instalação, os comprimentos de cabos individuais podem ir de algumas centenas de metros até centenas de quilómetros; as questões práticas, como o peso do cabo ou a largura da conduta, por exemplo, determinam o comprimento que terá uma única secção de cabo: as distâncias mais curtas tendem a ser usadas em condutas, enquanto que as distâncias maiores são para uso em aplicações aéreas ou enterradas no solo.

A linha de transmissão de longa distância completa é formada pela divisão ou conexão destas secções individuais de cabo.

Uma das características principais das fibras ópticas é o facto da sua atenuação ser em função do comprimento de onda utilizado, ou, por outras palavras, a mesma fibra apresentar diferentes atenuações para comprimentos de onda diferentes, como se pode ver a seguir:



Inicialmente, a tecnologia fazia uso exclusivo da banda correspondente com comprimentos de onda dos 800 aos 900 nm, pois as fibras feitas na altura apresentavam uma curva com atenuação mínima nesta região; esta região é muitas vezes referida por 1ª janela. Ao aperfeiçoar o fabrico das fibras, tornou-se possível a existência de fibras com atenuações muito baixas na faixa dos 1100 aos 1600 nm, sendo esta largura de banda espectral normalmente designada de região de comprimentos de onda grandes. Nesta região definem-se duas janelas, estando a 2ª janela centrada à volta dos 1330 nm e a 3ª janela à volta dos 1550 nm. Os investigadores continuam a estudar novos tipos de materiais para as fibras, com baixas atenuações na banda dos 3 a 5 μm .



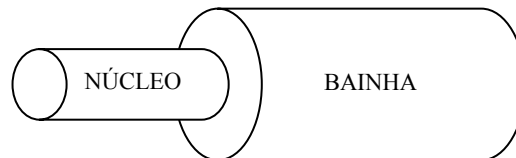
Após se instalar o cabo, lança-se um sinal com uma determinada potência óptica a partir de uma fonte de luz que seja compatível, em termos de dimensões, com o núcleo da fibra. Os LEDs e os lasers são fontes de luz adequadas, pois a sua saída luminosa pode ser modulada rapidamente alterando a sua corrente.

Após se introduzir a luz na fibra, o sinal óptico vai se atenuando e distorcendo com o aumento da distância devidos aos efeitos de difusão, absorção e dispersão. No extremo de recepção o sinal óptico atenuado e distorcido que sai da fibra vai ser detectado por um fotodetector. A concepção do receptor é mais complexa, pois tem de amplificar e refazer o sinal degradado pelo receptor.

Por vezes, o sinal óptico percorre uma determinada distância e torna-se necessário à linha amplificar e refazer o sinal. Um repetidor óptico consiste num receptor e num transmissor colocado em ambos os extremos. A secção do receptor detecta o sinal óptico e converte-o num sinal eléctrico, que é amplificado, refeito e enviado para a entrada eléctrica da secção de transmissão; esta irá converter este sinal eléctrico num sinal óptico e envia-o pela guia-de-onda da fibra óptica.

5.3 Tipos de fibras ópticas

Uma fibra óptica trata-se de uma guia-de-onda de luz em “vidro”, que irá propagar a luz numa direcção paralela ao seu eixo, constituída por duas camadas sobrepostas: o núcleo (a camada interna) e a bainha (a camada externa), como se pode ver na figura seguinte:



A função do núcleo é transportar a informação em forma de luz. A bainha tem como função reduzir a dispersão, melhorar a força (resistência) mecânica, impedir o núcleo de absorver contaminadores que poderiam entrar em contacto com o núcleo; por estas razões, a bainha torna-se útil, mas não é indispensável.

Os materiais constituintes da fibra óptica apresentam índices de refração diferentes, isto é, o índice de refração do núcleo, n_1 , é diferente do índice de refração da bainha, n_2 . Normalmente, tem-se $n_2 < n_1$, em que

$$n_i = \frac{c}{v_{p_i}} = \frac{\eta_i}{\eta_0}, \quad \eta_0 = 120 \pi \Omega$$

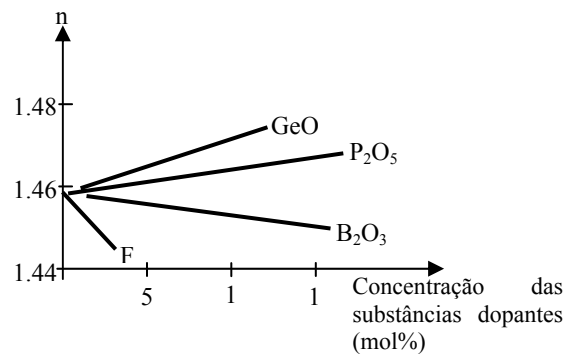
Os materiais constituintes do núcleo e da bainha são materiais dieléctricos, de modo a se aproveitar a baixa atenuação no seu seio.

A propagação da luz dentro de uma guia-de-onda pode ser descrita em termos de um conjunto de ondas electromagnéticas chamadas modos. Cada modo consiste num padrão de linhas dos campos eléctrico e magnético que se repete ao longo da fibra em intervalos



iguais ao comprimento de onda. A propagação ao longo da fibra só é possível a um determinado número discreto de modos; estes modos são as ondas electromagnéticas que satisfazem a equação de onda na fibra e as condições de fronteira nas superfícies das guias-de-onda.

Normalmente, a substância utiliza-se para fabricar a fibra óptica é o dióxido de silício; a variação do índice de refração é feita através da adição de substâncias dopantes. A seguir apresentam-se a variação do índice de refração como função das substâncias dopantes:



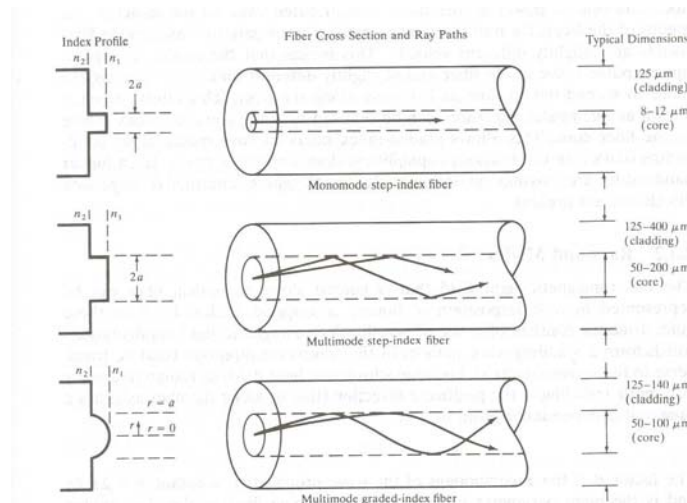
Como se pode verificar a adição de GeO₂ ou de P₂O₅ aumenta o índice de refração, enquanto que o aumento de B₂O₃ ou de F o diminui. Como o núcleo tem de ter um índice de refração menor, exemplos das composições da fibra seriam:

1. Núcleo de GeO₂-SiO₂; bainha de SiO₂
2. Núcleo de P₂O₅-SiO₂; bainha de SiO₂
3. Núcleo de SiO₂; bainha de B₂O₃-SiO₂
4. Núcleo de SiO₂; bainha de F-SiO₂

A notação utilizada indica que, no caso de GeO₂-SiO₂, se trata de um vidro (dióxido de silício) dopado com GeO₂.

As variações na composição do material de núcleo dão origem aos dois tipos de fibras mais comuns, mostrados na figura seguinte¹:

¹ Retirada de [7]

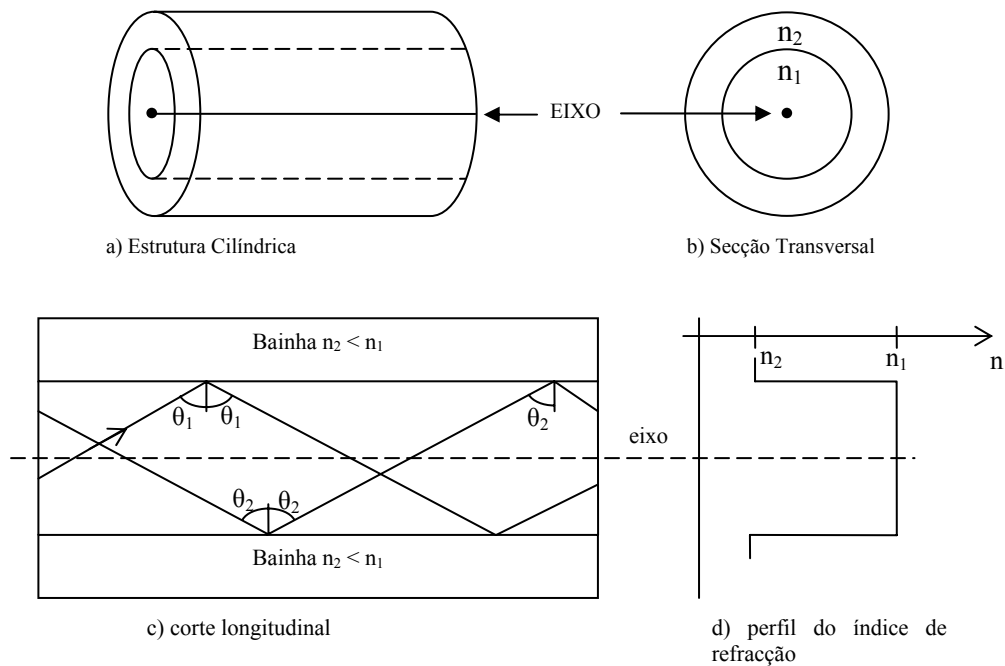


No primeiro caso o índice de refração do núcleo é uniforme e ocorre uma mudança brusca na fronteira com a bainha; este tipo de fibra designa-se *step-index* (índice em degrau); no último caso, o índice de refração do núcleo é feito de forma a variar com a distância radial ao eixo da fibra: são as chamadas fibras de *graded-index*, ou (índice gradual). Ambos os tipos de fibras podem ser divididas nas classes de mono-modo (só permitem a propagação de um modo) ou de multi-modo (permitem a propagação de vários modos).

As fibras multi-modo apresentam várias vantagens quando comparadas com as mono-modo, nomeadamente é mais fácil incidir a potência óptica na fibra devido ao seu maior raio e como tal podem ser usados LEDs, em vez de lasers, como fontes ópticas (o que é vantajoso devido às características dos LEDs face aos lasers). A principal desvantagem é a ocorrência de dispersão inter-modal: quando se incide um impulso óptico na fibra, a potência óptica distribui-se por todos os modos; cada modo viaja pela fibra com velocidades ligeiramente diferentes, o que significa que os modos que viajam na fibra chegam em instantes ligeiramente diferentes ao extremo de receção da fibra, o que faz com que os impulsos se espalhem no tempo à medida que viajam pela fibra. Este efeito, a dispersão inter-modal, pode ser atenuado usando um perfil de índice gradual no núcleo, o que permite às fibras de índice gradual terem uma maior largura de banda (com maior capacidade de transmissão) do que as fibras de índice em degrau.

5.4 Propagação nas fibras ópticas

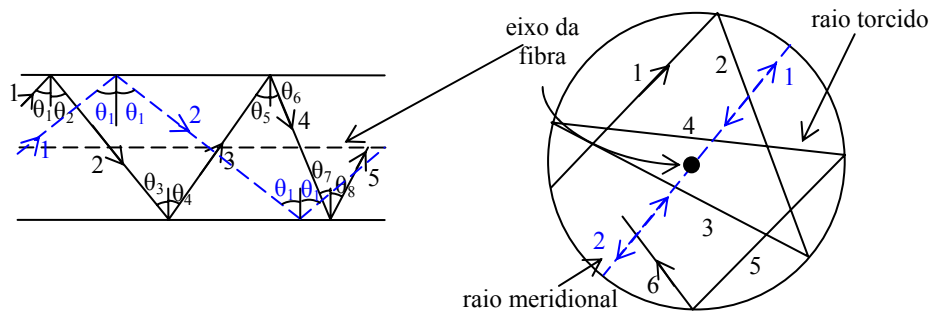
A propagação é feita no interior do núcleo, através de múltiplas reflexões na fronteira de separação entre o núcleo e a bainha. Na figura seguinte pode constatar-se o mecanismo de propagação, visto longitudinalmente.



Os raios irão propagar-se ao longo da fibra e irão “esbarrar” na fronteira entre os dieléctricos, o núcleo e a bainha, seguindo uma direcção paralela ao eixo da fibra. Contudo, o percurso que esses raios vão realmente percorrer, dependem da incidência inicial. Assim, existem vários tipos de raios:

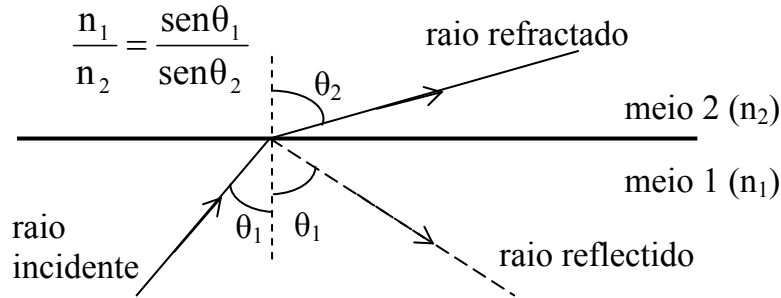
- Os raios meridionais, que são os raios contidos no plano que contém o eixo da fibra;
- Os raios torcidos, que são todos os outros.

Uma ilustração destes tipos de raios encontra-se a seguir (onde só se encontra representado o núcleo):



Os princípios de propagação são, numa perspectiva geométrica, os mecanismos descritos pela lei de Snell¹ e encontram-se apresentados a seguir:

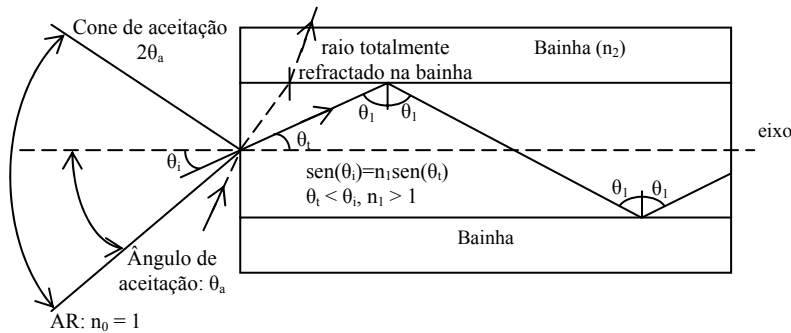
¹ Ver secção 4.5.3.



O valor do ângulo crítico acontece para

$$\theta_c = \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Daqui se pode concluir que há reflexão total se $\theta_i > \theta_c$, enquanto que há reflexão parcial $\theta_c > \theta_i$. O ângulo de incidência máximo que permita a penetração/radiação na/da fibra de raios luminosos, sem perdas por refração, chama-se ângulo de aceitação, θ_a , como se pode constatar na figura seguinte:



O valor do ângulo de aceitação, θ_a , é dado por

$$\theta_a = \arcsen\left[\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}\right] \underset{(Se\ n_0=1)}{=} \arcsen\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

em que n_0 é o índice de refração do meio em que a fibra está inserida (normalmente é o ar). Define-se abertura numérica de uma fibra óptica (AN) como

$$AN = n_0 \cdot \sen\theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Pode-se exprimir este valor como

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$$



$$\Delta \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (\text{se } \Delta \ll 1)$$

$$AN \approx n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (\text{se } \Delta \ll 1)$$

A abertura numérica é extremamente útil, uma vez que serve para quantificar a maior ou menor capacidade de captar e transmitir luz.

Define-se frequência normalizada, V , como

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad a = \text{raio do núcleo da fibra}$$

$$V \approx \frac{2\pi a}{\lambda} n_1 \sqrt{2\Delta}$$

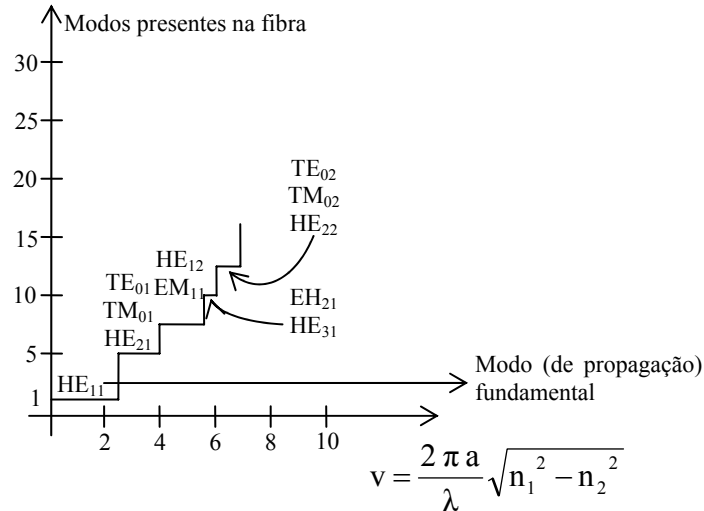
A frequência normalizada serve para determinar os diferentes modos de propagação na fibra.

5.4.1 Modos de transmissão

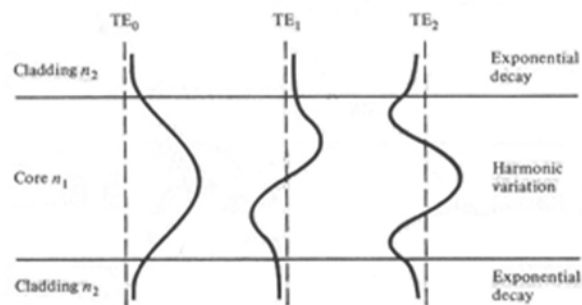
Cada modo de transmissão é um padrão de linhas do campo electromagnético que se repete ao longo da fibra em intervalos iguais ao comprimento de onda. Assim, os tipos de modos de propagação do ponto de vista da teoria da propagação são:

MODOS	ABREVIATURA	CARACTERÍSTICAS
Transversal Electromagnético	TEM	\vec{E} e $\vec{H} \perp$ à direcção de propagação
Transversal Eléctrico	TE	$\vec{E} \perp$ à direcção de propagação
Transversal Magnético	TM	$\vec{H} \perp$ à direcção de propagação
Híbridos	HE ou EH	\vec{E} e \vec{H} com componentes axiais (\parallel à direcção de propagação)

Os modos presentes numa fibra multi-modo com degrau de índice apresentam o seguinte aspecto:



A seguir¹ pode ser observado o padrão do campo eléctrico, numa vista perpendicular à secção da fibra ao longo do seu eixo, para modos de ordem baixa. A ordem de um modo é igual ao número de zeros do campo ao longo da guia e está igualmente relacionada com o ângulo que o raio correspondente a este modo faz com o plano da guia-de-onda. Como se pode observar o campo eléctrico dos modos guiados não estão completamente restringidos à parte correspondente ao dieléctrico central (o núcleo), isto é, não vai a zero na interface núcleo-bainha, mas prolongam-se parcialmente na bainha, e quanto maior for a ordem dos modos, maior é a penetração do campo na bainha, ao passo que para ordens mais baixas se tem uma concentração dos raios no regia à volta do eixo da fibra.



¹ Retirada de [7].



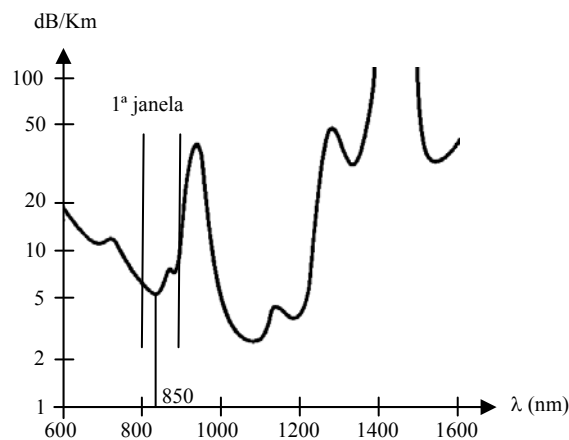
5.5 Degradação do sinal em fibras ópticas

A atenuação do sinal (também conhecida como perda da fibra ou perda do sinal) é uma das propriedades mais importantes de uma fibra óptica, pois determina, em grande parte, a separação máxima sem repetidores entre um transmissor e um receptor. Como os repetidores são caros de fabricar, instalar e manter o grau de atenuação numa fibra tem uma grande influência no custo do sistema. A distorção do sinal também é bastante importante, pois os mecanismos de dispersão fazem com que os impulsos se alarguem à medida que viajam pela fibra; se os impulsos viajarem suficientemente longe, podem sobrepor-se a impulsos vizinhos, criando, conseqüentemente, erros na saída do receptor, pelo que limitam a capacidade de transporte de informação.

Os mecanismos básicos de atenuação são a absorção, a difusão e as perdas de radiação da energia óptica. A absorção está relacionada com o material da fibra, enquanto que a dispersão está associada com o material da fibra e com as imperfeições estruturais no núcleo da fibra óptica. A atenuação devido aos efeitos de radiação tem origem nas perturbações (microscópicas e macroscópicas) da geometria da fibra.

5.5.1 Atenuação

A atenuação do sinal define-se como a razão entre a potência óptica de saída, P_o , de uma fibra de comprimento L , e a potência de entrada, P_i . O ideal, obviamente, seria $P_o = P_i$. Esta razão é função do comprimento de onda, λ , como se pode ver na figura seguinte:



Normalmente exprime-se a atenuação (ou factor de atenuação) em decibel por quilometro (dB / km) e representa-se por α , de tal modo que

$$\alpha = \frac{10}{L} \log \left(\frac{P_i}{P_o} \right) \quad \text{dB / Km}$$



5.5.2 Absorção

Os três principais mecanismos de absorção são:

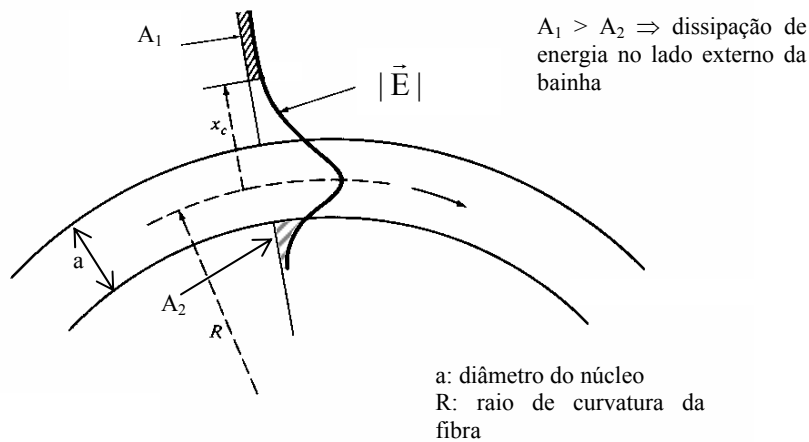
- Absorção devido aos defeitos atômicos na composição do vidro, que podem ser a falta de moléculas, alta densidade assimétrica de grupos de átomos ou defeitos de oxigénio na estrutura do vidro; este tipo de perdas é normalmente desprezável, quando comparadas com as outras, tornando-se significativa quando se expõe a fibra a altos níveis de radiação;
- Absorção extrínseca do material, que se deve à presença de impurezas no vidro que resultam de metais de transição como o ferro, o crómio, o cobalto e o cobre e dos iões da água; corresponde ao principal tipo de perdas por absorção;
- Absorção intrínseca do material que é determinada pela maior ou menor transparência do material constituinte: idealmente deveria ter-se dióxido de silício (SiO_2) em estado puro; resulta das bandas de absorção electrónica na região ultravioleta e das bandas de vibração atómicas na região dos infravermelhos; a absorção ocorre quando um fóton interage com um electrão na banda de valência e excita-o para um nível de energia mais elevado; este tipo de perdas estabelece o mínimo de perdas por absorção de um determinado material.

5.5.3 Dispersão

As perdas por dispersão surgem devido às variações microscópicas na densidade do material, como flutuações de composição, não-homogeneidades estruturais ou defeitos durante o processo de fabrico.

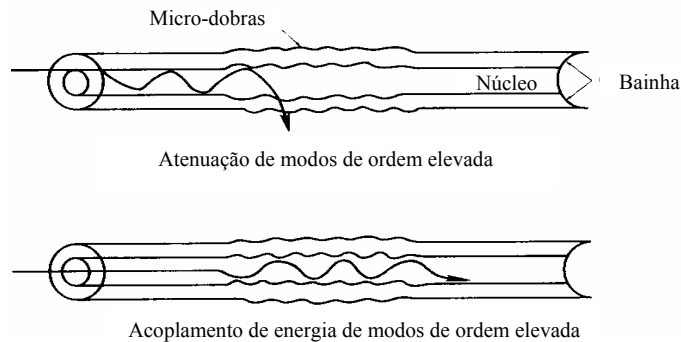
5.5.4 Perdas devido à curvatura da fibra

As perdas de radiação ocorrem sempre que uma fibra óptica sofre uma curvatura com um raio de curvatura finito, isto é, sempre que não está em linha recta, ou se dobra a fibra. Assim, as fibras podem ficar sujeitas a dois tipos de dobras: as dobras macroscópicas, que têm um raio grande, comparado com o diâmetro da fibra (por exemplo, quando um cabo contorna um canto), e as dobras microscópicas, que podem ocorrer quando se incluem as fibras num cabo. Comece-se pelas dobras macroscópicas, ou simplesmente, dobras. Se esta for ligeira, a perda é extremamente pequena, sendo mesmo desprezável; só a partir de um determinado raio de curvatura (quando este diminui), então as perdas aumentam exponencialmente até um raio crítico, em que a perda se torna observável. Se, a partir deste ponto, se diminuir um pouco o raio de curvatura, as perdas tornam-se extremamente grandes. Para se perceber o que se passa, atente-se à seguinte figura:



Daqui pode-se ver que qualquer modo na fronteira do núcleo possui uma cauda de um campo evanescente na bainha, que decresce exponencialmente em, função da distância ao núcleo; como esta cauda do campo se move juntamente com o campo no núcleo, então parte da energia do modo em propagação viaja pela bainha da fibra. Quando se dobra a fibra, a cauda do campo na parte mais distante do centro da curvatura tem de se mover mais depressa de modo a acompanhar o campo no núcleo; a uma determinada distância crítica, x_c , do centro da fibra, a cauda do campo teria de se mover mais depressa que a velocidade da luz, para acompanhar o campo no núcleo; como isto não é possível, a energia na cauda do campo para lá de x_c vai radiar energia. A quantidade de radiação óptica de uma fibra dobrada irá depender do valor do campo em x_c e do raio da curvatura, R .

Um outro tipo de perdas de radiação em guias-de-onda ópticas resulta do emparelhamento de modos causado pelas micro-dobras aleatórias na fibra. As micro-dobras são flutuações repetitivas de escala pequena no raio de curvatura do eixo da fibra, como ilustrado na figura seguinte:



As micro-dobras são causadas por não-uniformidades no processo de fabrico da fibra ou por pressões laterais não-uniformes criadas durante a criação do cabo de fibras, isto é, quando se inserem as várias fibras dentro do cabo óptico, sendo este efeito denominado de perdas de empacotamento. O aumento da atenuação resulta das micro-dobras porque a



curvatura da fibra origina emparelhamento repetitivo de energia entre os modos guiados e modos de fugas, ou não-guiados, na fibra. Um modo de minimizar estas perdas consiste em colocar uma cobertura na fibra à pressão; quando forem aplicadas forças exteriores a esta configuração, a cobertura irá deformar-se, mas a fibra irá manter-se praticamente em linha recta.

5.5.5 Perdas núcleo-bainha

Quando se medirem as perdas por atenuação numa fibra, todas as perdas, quer por dissipação, quer por dispersão, irão ocorrer em simultâneo. Como o núcleo e a bainha têm índices de refração diferentes e, conseqüentemente, composições diferentes, o núcleo e a bainha têm normalmente coeficientes de atenuação diferentes, denominados α_1 e α_2 , respectivamente. Se a influência do emparelhamento modal for ignorada, a perda para um modo de ordem (v, m) numa guia-de-onda com índice em degrau é

$$\alpha = \alpha_1 \frac{P_{\text{núcleo}}}{P_{\text{tot}}} + \alpha_2 \frac{P_{\text{bainha}}}{P_{\text{tot}}}$$

No caso de uma fibra com índice gradual a situação é mais complexa, pois quer os coeficientes de atenuação, quer a potencia dos modos tendem a vir em função da coordenada radial; assim, a uma distância r do eixo do núcleo, a perda é

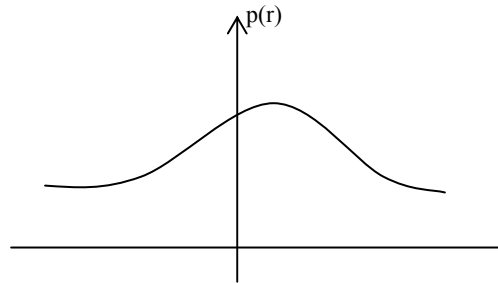
$$\alpha(r) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{n^2(0) - n^2(r)}{n^2(0) - n_2^2}$$

em que α_1 e α_2 são os coeficientes de atenuação do núcleo e da bainha, respectivamente e os n são os índices de refração.

A perda de um determinado modo é dada por

$$\alpha = \frac{\int_0^{+\infty} \alpha(r) \cdot p(r) \cdot r \, dr}{\int_0^{+\infty} p(r) \cdot r \, dr}$$

em que $p(r)$ é a densidade de potência do modo à distância r (a seguir encontra-se ilustrado um exemplo). Normalmente, verifica-se que a perda aumenta com o aumento do número do modo.



5.6 Distorção do sinal

À medida que viaja na fibra, o sinal óptico torna-se cada vez mais distorcido, como consequência da dispersão intra-modal e os efeitos de atraso inter-modal. Estes efeitos podem ser explicados examinando o comportamento das velocidades de grupo dos modos guiados, em que a velocidade de grupo é a velocidade à qual a energia de um determinado modo viaja através da fibra. Como consequência, haverá um alargamento dos impulsos ópticos, causando interferência inter-simbólica (ISI).

A dispersão intra-modal ocorre em fibras mono-modo e consiste no alargamento dos impulsos ópticos que ocorrem no modo de propagação, sendo o resultado do facto da velocidade de grupo ser função do comprimento de onda. Como a dispersão intra-modal depende do comprimento de onda, o seu efeito na distorção do sinal aumenta com a largura espectral da fonte óptica (esta largura espectral consiste na banda de comprimentos de onda na qual a fonte de luz emite luz). As duas principais causas da distorção intra-modal são:

1. Dispersão do material que se deve ao facto das variações do índice de refração do núcleo com o comprimento de onda $n_1 = n_1(\lambda)$, também designada por dispersão cromática (uma vez que $\lambda_{\text{VERDE}} \neq \lambda_{\text{AZUL}} \neq \lambda_{\text{VERMELHO}}$, por exemplo), ou seja, a velocidade de propagação depende de λ : $v_p = v_p(\lambda)$; é Muito severo em lasers pouco precisos que “saltitem” o comprimento de onda num intervalo definido não nulo;
2. Dispersão na guia-de-onda: uma fibra óptica mono-modo retém, tipicamente, 80% da luz no núcleo; contudo os restantes 20% na bainha são susceptíveis de se propagarem mais rápido, uma vez que $n_2 < n_1$, logo $v_2 > v_1$, havendo componentes que são recebidas mais rapidamente do que outras, o que implica um alargamento dos impulsos ópticos.

O outro factor que origina um espalhamento dos impulsos ópticos é o atraso de inter-modal, presente em fibras multi-modo, que resulta do facto de cada modo ter um valor de velocidade de grupo diferente a uma única frequência. Este efeito pode ser muito severo se os lasers funcionarem num comprimento de onda que não é fixo, mas sim numa gama de comprimentos de onda, quando há vários modos em diferentes comprimentos de onda.

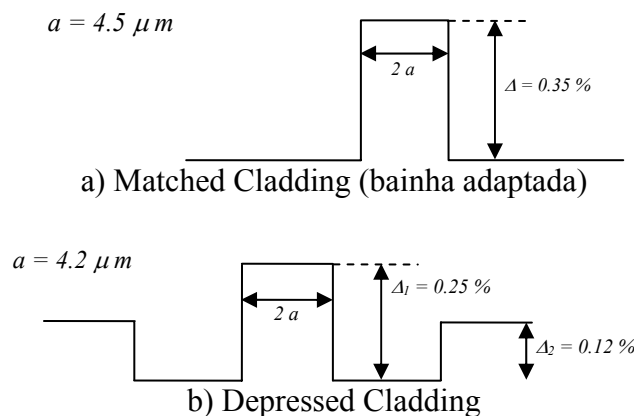
Destes três tipos de distorção, a dispersão de guia-de-onda pode ser, normalmente, ignorada em fibras multi-modo, mas pode ser extremamente significativo em fibras mono-modo. O efeito total destes três mecanismos, na prática, é raramente observado



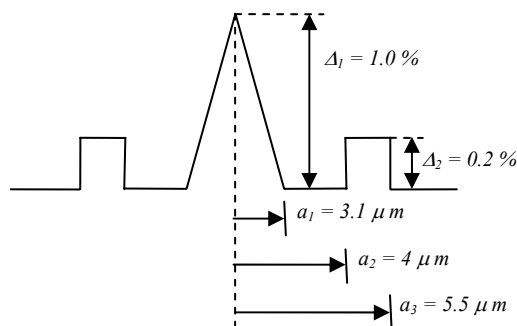
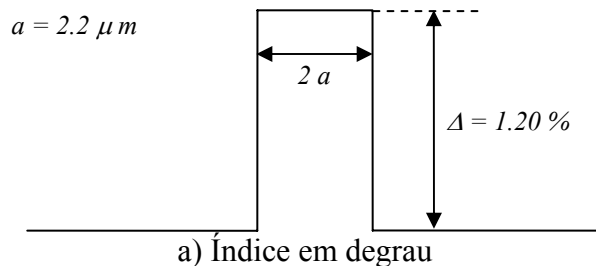
pois tendem a ser misturados com outros factores, como a existência de perfis do índice de refração não ideais, as condições de injeção de potência óptica, atenuação dos modos não uniforme e mistura dos modos na fibra e nos divisores, bem como pelas variações estatísticas destes efeitos ao longo da fibra.

Como as empresas de telecomunicações utilizam fibras mono-modo como o principal meio de transmissão óptica, e por causa da importância das fibras mono-modo nas aplicações localizadas de microondas velozes, vai ser dada alguma atenção a soluções que permitam evitar a dispersão intra-modal nas fibras ópticas (dado que esse é o principal factor limitador da distância e da velocidade de operação das fibras ópticas); para tal, fabricam-se fibras ópticas com vários perfis do índice de refração do núcleo. A dispersão básica do material é difícil de alterar significativamente, mas é possível alterar a dispersão na guia-de-onda passando-se de um simples perfil de índice em degrau para perfis de índice mais complexos.

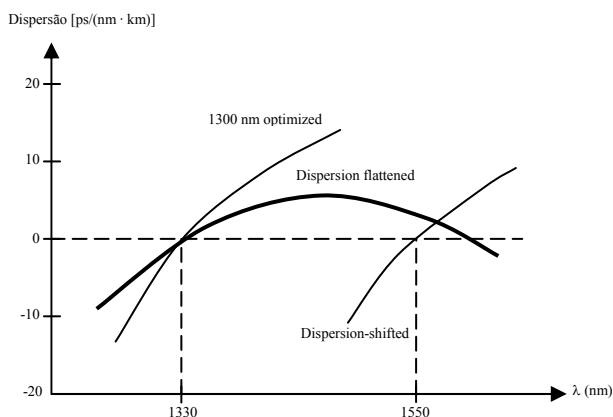
As fibras mais populares nos sistemas de telecomunicações são as fibras de índice quase em degrau, que são optimizadas para operar nos 1330 nm; estas fibras optimizadas aos 1330 nm, podem ser de bainha adaptada – *matched cladding* – ou *depressed cladding*, cujo perfil se representa a seguir:



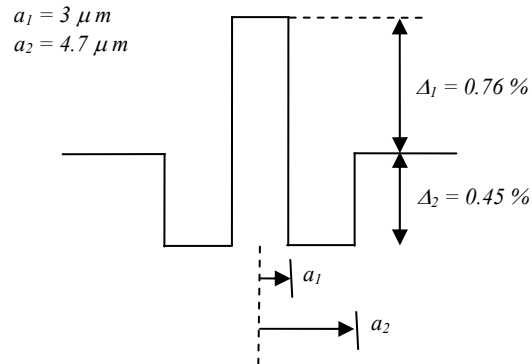
No caso da alínea a), existe um índice de refração uniforme ao longo da bainha, ao passo que no caso da alínea b), a região mais da bainha próxima do núcleo tem um índice de refração mais baixo que a região exterior. Enquanto que a dispersão do material depende unicamente da composição, já a dispersão da guia-de-onda é uma função da distância do raio do núcleo, da diferença entre os índices de refração e da forma do perfil do índice de refração. Assim sendo, a dispersão guia-de-onda pode variar drasticamente com os parâmetros de concepção da fibra. Mudando esta dispersão para comprimentos de onda superiores e assumindo um valor constante para a dispersão do material, a adição destes dois tipos de dispersão pode ser nula aos 1550 nm. As guias-de-onda resultantes são denominadas de fibras com dispersão deslocada (*shifted-dispersion fibers*). Dois exemplos desses tipos de fibras são demonstrados a seguir:



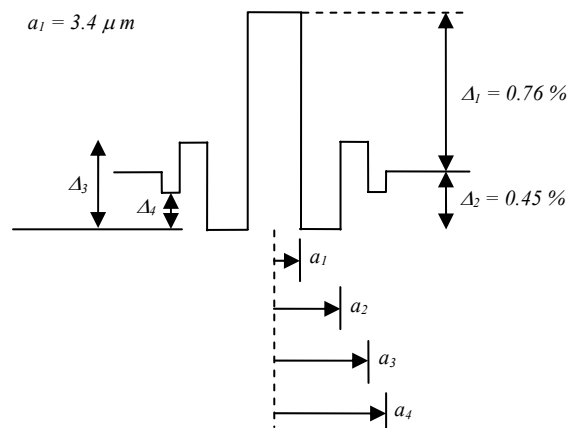
A curva de dispersão total resultante é a seguinte:



Uma alternativa consiste em reduzir a dispersão espalhando o mínimo de dispersão por uma maior gama. Esta abordagem é conhecida como *dispersion flatenning*. Este tipo de fibras é mais complexo de conceber do que as fibras com dispersão mudada, pois a dispersão tem de ser considerada ao longo de uma grande gama de comprimentos de onda. Contudo, elas oferecem características desejáveis numa gama de comprimentos de onda muito superior, pelo que podem ser utilizadas para multiplexagem por divisão de comprimentos de onda. A seguir representam-se alguns perfis do índice de refração característicos:



a) Double-clad or W profile (dupla bainha ou perfil em W)



b) Quadruple-clad profile (perfil de bainha quadruplo)

5.7 Lasers, LEDs e fotodetectores

5.7.1 Fontes luminosas de sinal

As principais fontes de luz usadas nas comunicações por fibra óptica são díodos semicondutores laser com estrutura de hetero-junção (*heterojunction*), também referidos como Díodos Laser de Injeção (*Injection Laser Diodes*), ILDs, (ou, aqui, simplesmente lasers) e os díodos de emissão luminosa (*Light-Emitting Diodes*), LEDs. Uma hetero-junção consiste em dois materiais semicondutores adjacentes com diferentes energias de banda de passagem (*band-gap*). Estes dispositivos são bons para sistemas de transmissão por fibras pois apresentam uma potência de saída adequada para uma grande gama de aplicações, sendo a sua potência óptica de saída directamente modulada variando a corrente de entrada do dispositivo, têm uma grande eficiência e as suas dimensões são compatíveis com as das fibras ópticas.

Para sistemas de comunicação óptica que requeiram taxas de informação aproximadamente inferiores a 100 a 200 Mbits / s, juntamente com potências ópticas na ordem das dezenas de micro-watt, os LEDs são normalmente a melhor escolha para fonte de luz. Como não necessitam de circuitos de estabilização óptica nem térmica, requerem circuitos menos complicados e podem ser fabricados mais baratos.



Para ser útil em aplicações de transmissão por fibra, um LED deve ter uma radiância de saída elevada, um tempo de resposta de emissão curto e uma grande eficiência quântica. A sua radiância, ou brilho, é uma medida em watt da potência óptica radiada num sólido num ângulo por unidade de área da superfície emissora.

As altas radiâncias são necessárias para introduzir níveis de energia óptica suficientemente elevados numa fibra. O tempo de resposta de emissão é o atraso entre a aplicação de um impulso de corrente e a correspondente emissão óptica; este factor limita a largura de banda com que a fonte pode ser directamente modulada variando a corrente injectada. A eficiência quântica está relacionada com a fracção de pares electrão-buraco que se recombina.

Existem lasers que variam, em dimensões, desde o tamanho de um grão de sal até ocupar uma sala inteira. O meio de um laser pode um gás, um líquido, um cristal isolador ou um semiconductor. Nos sistemas de transmissão óptica, os lasers usados são quase sempre semicondutores, apresentado, como quase todos, uma coerência espacial e temporal na radiação emitida, isto é, a radiação de saída é altamente monocromática e o raio de luz é bastante direccional.

Comparando os dois tipos de fontes ópticas, pode dizer-se que as vantagens do laser quanto ao LED são:

- Um tempo de resposta mais curto, pelo que são possíveis maiores taxas de informação;
- Uma largura espectral de saída mais estreita, o que implica uma menor distorção do sinal por dispersão;
- Um nível de potência óptica muito superior, o que permite comunicações a maiores distâncias.

Como desvantagens, tem-se:

- A sua construção é mais complicada, principalmente por causa da necessidade de restringir a sua corrente numa cavidade muito pequena;
- O nível de saída óptica depende bastante da temperatura, o que aumenta a complexidade do circuito de transmissão; se se pretender usar um laser numa situação em que haja uma grande variação da temperatura, deverá ser usado um mecanismo de arrefecimento para manter o laser a uma temperatura constante ou, então, um circuito com um sensor de um limiar que ajuste a corrente do laser com as variações de temperatura;
- Uma maior susceptibilidade à degradação das facetas do material, o que reduz o tempo de vida do dispositivo.

5.7.2 Fotodetectores

Os semicondutores *pin* e os fotodiodos de avalanche são os principais dispositivos para detectar os fótons nos circuitos de fibra óptica devido à compatibilidade de tamanho com as fibras, as suas altas sensibilidades nos comprimentos de onda pretendidos e os seus tempos de resposta curtos.



Quando a luz possuindo energia de fótons maiores ou iguais à energia da banda de passagem do material semiconductor incide num fotodetector, os fótons podem “desistir” da sua energia e excitar os electrões da banda de valência para a banda de condução. Este processo gera pares electrão-buraco que são conhecidos como foto-portadores. Quando se aplica uma tensão inversa no fotodetector, o campo eléctrico resultante faz com os portadores se separem, o que dá origem a um fluxo de corrente num circuito externo, denominada de foto-corrente.

A sensibilidade de um fotodetector, e o receptor que lhe está associado, é determinada essencialmente pelos ruídos do fotodetector resultantes da natureza estatística do processo de conversão fóton-electrão e os ruídos térmicos no circuito de amplificação. As principais correntes de ruído de um fotodetector, são:

- Corrente de ruído quântico que surge da natureza estatística da produção e colecção de foto-electrões;
- Corrente escura que surge dos electrões e/ou buracos que são gerados termicamente na junção pn do fotodíodo;
- Corrente negra de superfície (ou corrente de fuga) que depende dos defeitos da superfície, da limpeza, da tensão inversa e da área de superfície.

De forma a reproduzir fielmente o sinal de entrada, o fotodíodo deve ser capaz de seguir de uma forma precisa as variações do seu sinal, o que depende do seu coeficiente de absorção no comprimento de onda pretendido, a largura da camada de depleção do fotodíodo e das várias capacitâncias e resistências do fotodíodo e do restante circuito de recepção.



6 Bibliografia

- [1]. *Análisis Vectorial*, H. B. Phillips, Union Tipográfica Editorial Hispano Americana, 1960
- [2]. *Apontamentos Teóricos de Electromagnetismo*, Prof. Carlos Espain
- [3]. *Apontamentos Teóricos de Ondas*, Prof. Carlos Espain
- [4]. *Applied Electromagnetics*, M. Plonus, Mc Graw-Hill, 1986
- [5]. *Electromagnetismo*, W. H. Hayt Jr., LTC, 1995
- [6]. *Engineering Mathematics – A Modern Foundation For Electronic, Electrical and Systems Engineers*, A. Croft, R. Davison, M. Hargreaves, Addison-Wesley, Essex, 1996
- [7]. *Fiber Communications*, Keiser, G., Mc-Graw Hill, 1993
- [8]. *Física – um curso universitário*, M. Alonso, E. J. Finn, Editora Edgard Blücher, 1981
- [9]. *Física para Cientistas e Engenheiros, com Física Moderna*, R. Serway, LTC, 1996
- [10]. *Física*, D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane, LTC, 1996
- [11]. *Física*, P. Tipler, LTC, 1995
- [12]. *Fundamentos de Física*, D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, LTC, 1995
- [13]. *Introdução ao Electromagnetismo*, S. K. Mendiratta, Fundação Calouste Gulbenkian, 1995



Anexo I

Análise de Fourier do movimento ondulatório

De acordo com o teorema de Fourier, qualquer movimento periódico pode ser expresso como uma sobreposição de movimentos harmônicos simples de frequências ω , 2ω , ..., $n\omega$, ... (ou períodos P , $P/2$, ..., P/n , ...). O mesmo resultado também se aplica a um movimento ondulatório periódico.

Seja

$$\zeta(x, t) = f(x - vt)$$

um movimento ondulatório periódico. Tal pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\zeta(x, t) = f(x - vt) = f[x - v(t \pm P)] = f(x - vt \pm vP)$$

Isto significa que, para um dado tempo, ζ repete-se quando x aumenta ou diminui vP , $2vP$, ..., nvP , Deste modo, se em vez de se variar t , se variar x pelo valor $\lambda = vP$, a onda repete-se no espaço. Logo, um movimento ondulatório no tempo, também o é no espaço.

Seja $\xi = f(x) = f(x + \lambda)$ uma função periódica no espaço. Usando o teorema de Fourier, temos

$$\xi = f(x) = a_0 + a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + \dots + a_n \cos nkx + \dots + b_1 \sin kx + b_2 \sin 2kx + \dots + b_n \sin nkx + \dots$$

ou seja

$$\xi = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nkx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nkx)$$

onde $k = 2\pi / \lambda$.

Os coeficientes desta expressão são dados por:



$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Se

$$\xi = f(x - vt) = a_0 + a_1 \cos k(x - vt) + a_2 \cos 2k(x - vt) + \dots + a_n \cos nk(x - vt) + \dots + b_1 \sin k(x - vt) + b_2 \sin 2k(x - vt) + \dots + b_n \sin nk(x - vt) + \dots$$

como $\omega = kv$

$$\xi = f(x - vt) = a_0 + a_1 \cos(kx - \omega t) + a_2 \cos 2(kx - \omega t) + \dots + a_n \cos n(kx - \omega t) + \dots + b_1 \sin(kx - \omega t) + b_2 \sin 2(kx - \omega t) + \dots + b_n \sin n(kx - \omega t) + \dots$$

ou seja

$$\xi = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n(kx - \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n(kx - \omega t) .$$

Isto indica que qualquer movimento ondulatório pode ser escrito como uma sobreposição de movimentos ondulatórios com frequências $\omega, 2\omega, \dots, n\omega, \dots$ e comprimentos de onda $\lambda, 2\lambda, \dots, n\lambda, \dots$