



4 Ondas electromagnéticas

4.1 Onda electromagnética no vazio

As equações dos campos eléctrico e magnético no vazio, como visto anteriormente, são dadas por

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Atendendo à definição de laplaciano de um vector, vê-se que estas duas equações vectoriais se transformam em seis equações escalares:

$$\nabla^2 E_x - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_y - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 E_z - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\nabla^2 B_x - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B_y - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 B_z - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

Desenvolvendo os laplacianos, as equações escrevem-se



$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

São seis equações de onda semelhantes à equação que se viu, a uma variável, para uma corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Agora, cada uma das equações é a três variáveis. Viu-se que, no caso de uma variável, a solução pode ser expressa como um integral duplo de soluções elementares, chamada onda harmônica do tipo

$$y = A \cos(\omega t \pm kx + \delta)$$

Agora pode-se dizer que qualquer solução de cada uma das seis soluções escalares pode ser expressa como um integral quádruplo (em k_x , k_y , k_z e t) de soluções elementares do tipo, por exemplo, para a componente E_x

$$E_x = E_x \cos(\omega t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z + \delta_x)$$

Chama-se a esta solução, uma onda plana monocromática, OPM.



Definindo um vector \vec{K} , vector de onda

$$\vec{K} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}$$

e sendo o vector de posição do ponto dado por

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

pode-se escrever a OPM na forma

$$E_x = E_x \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x)$$

$$E_y = E_y \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_y)$$

$$E_z = E_z \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_z)$$

e

$$B_x = B_x \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_x)$$

$$B_y = B_y \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_y) .$$

$$B_z = B_z \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \psi_z)$$

Primeiro vai-se confirmar que a OPM é solução e quais as condições a impor a ω e a \vec{K} . Tal vai ser feito para a componente E_x , sendo as conclusões válidas para as outras componentes.

A equação é

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

e

$$E_x = E_x \cos(\omega t \pm \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) = E_x \cos(\omega t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z + \delta_x)$$

Tome-se, por exemplo, a solução com o sinal negativo. Então,



$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) \cdot (-k_x) = k_x \cdot E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -k_x^2 \cdot E_x \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) = -k_x^2 \cdot E_x$$

Da mesma forma, concluir-se-ia que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -k_y^2 \cdot E_x \qquad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k_z^2 \cdot E_x$$

Por outro lado

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) \cdot (\omega) = -\omega \cdot E_x \sin(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot E_x \cos(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_x) = -\omega^2 \cdot E_x$$

Substituindo na equação, vem

$$-k_x^2 E_x - k_y^2 E_x - k_z^2 E_x + \varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot E_x = 0$$

Dividindo por E_x , a equação é satisfeita pela OPM se

$$\varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$$

onde K é chamado de número de onda, o módulo do vector de onda \vec{K} , e ω a frequência angular.

$$K = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

A onda plana monocromática pode ser representada, tal como foi feito com a onda harmónica a uma dimensão na corda, na forma complexa¹, vindo

¹ Ver secção 2.1.4.



$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \delta_X)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \delta_Y)}$$

$$E_z = E_Z \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \delta_Z)}$$

e

$$B_x = B_X \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \psi_X)}$$

$$B_y = B_Y \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \psi_Y)}$$

$$B_z = B_Z \cdot e^{j(\omega t - \vec{K}|\vec{r} + \psi_Z)}$$

Sabe-se, já, que para encontrar os campos reais tem que se projectar os complexos no eixo real, isto é, tomar os co-senos dos argumentos das exponenciais.

Inclusive, pode representar-se a solução fasorialmente

$$\underline{E}_x = E_X \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_X)}$$

$$\underline{E}_y = E_Y \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_Y)}$$

$$\underline{E}_z = E_Z \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \delta_Z)}$$

e

$$\underline{B}_x = B_X \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_X)}$$

$$\underline{B}_y = B_Y \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_Y)}$$

$$\underline{B}_z = B_Z \cdot e^{j(-\vec{K}|\vec{r} + \psi_Z)}$$

Sabe-se, agora, que para calcular o campo real, num certo instante, é preciso multiplicar o fasor por $e^{j\omega t}$, rodando de um ângulo ωt e achar os co-senos.



Note-se, também, que fasorialmente é possível simplificar a notação. De facto, em todos aqueles fasores há uma parcela comum, $e^{-j\vec{K}|\vec{r}}$. Então, para o campo eléctrico, se se definir um fasor vectorial

$$\vec{E}_0 = E_X \cdot e^{j\delta_X} \hat{i} + E_Y \cdot e^{j\delta_Y} \hat{j} + E_Z \cdot e^{j\delta_Z} \hat{k}$$

pode escrever-se, para o campo todo,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-j\vec{K}|\vec{r}}$$

Da mesma forma, fazendo

$$\vec{B}_0 = B_X \cdot e^{j\psi_X} \hat{i} + B_Y \cdot e^{j\psi_Y} \hat{j} + B_Z \cdot e^{j\psi_Z} \hat{k}$$

resulta

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{-j\vec{K}|\vec{r}}.$$

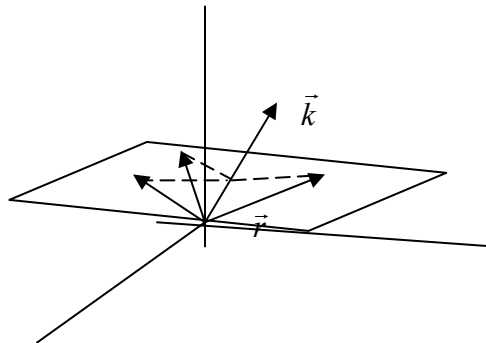
A OPM propaga-se no espaço; interessa saber qual a superfície cujos pontos têm, no mesmo instante, os mesmos valores do campo. Basta considerar as seis equações escalares como se escreveram ao princípio para entender que essas superfícies de igual valor do campo, chamadas frentes de onda, são dadas por

$$\omega t - \vec{K}|\vec{r} = \text{constante}$$

ou, para o mesmo instante,

$$\vec{K}|\vec{r} = \text{constante}$$

Esta situação corresponde à que se verifica na figura seguinte:



Atendendo à figura, vê-se que para que $\vec{K}|\vec{r}$ seja constante, então a projecção de \vec{r} em \vec{K} tem de ocorrer no mesmo ponto; tal só é possível para todos os pontos pertencentes a



um plano normal a \vec{K} , isto é, a frente de onda é plana. A onda plana monocromática diz-se plana justamente por isso. Diz-se monocromática porque envolve uma única frequência (uma única cor no espectro visível, como se verá a seguir).

A onda propaga-se, portanto, na direcção definida por \vec{K} e as frentes de onda, em que os campos \vec{E} e \vec{B} da onda têm, em cada instante, o mesmo valor, são planas perpendiculares a \vec{K} .

Há, também, relações entre os vectores do campo eléctrico \vec{E} , do campo magnético \vec{B} e do vector de onda \vec{K} , que serão vistas adiante.

Mais uma vez, tal como na onda harmónica da corda vibrante, é possível definir o comprimento de onda, λ , com marcação segundo o eixo segundo o qual a onda se propaga, através de

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Da mesma forma o período é

$$T = \frac{1}{f}$$

e a velocidade da onda é

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

Atendendo ao resultado encontrado atrás

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

vê-se que a velocidade de onda é

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

Para os ϵ e μ correspondentes ao vazio, nomeadamente ϵ_0 e μ_0 , constata-se que a velocidade é de $300\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, a velocidade da luz, designada por c , que é uma onda electromagnética, isto é,



$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

As OPMs podem ser expressas na forma complexa como

$$\vec{E} = E_X \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_X)} \hat{i} + E_Y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_Y)} \hat{j} + E_Z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_Z)} \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_X \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_X)} \hat{i} + B_Y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_Y)} \hat{j} + B_Z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \psi_Z)} \hat{k}$$

As equações de Maxwell são

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Substituindo, por exemplo, a OPM na equação do rotacional de \vec{E} , fica, por um lado

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

em que

$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_X)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_Y)}$$

$$E_z = E_Z \cdot e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \delta_Z)}$$

Como a operação de derivar, para E_x , corresponde a multiplicar por $-jk_x$, vem

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -jk_x & -jk_y & -jk_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$



A operação de derivar para E_y corresponde a multiplicar por $-jk_y$ e para E_z corresponde a multiplicar por $-jk_z$.

Atendendo à definição de produto vectorial, pode escrever-se

$$\text{rot } \vec{E} = -j \cdot \vec{K} \times \vec{E}$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j \cdot \omega \cdot \vec{B}$$

Substituindo na equação de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

vem

$$-j \cdot \vec{K} \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B}$$

ou

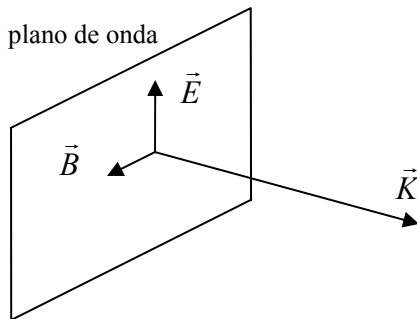
$$\vec{K} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B}$$

Fazendo o mesmo para as outras equações de Maxwell, resulta

$$\vec{K} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{K} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{K} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B} \qquad \vec{K} \times \vec{H} = -\omega \cdot \vec{D}$$

Destas equações, conclui-se que os vectores \vec{K} , \vec{E} e \vec{B} formam um triedro directo, ou seja, os campos \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares a \vec{K} , existem no plano que constitui a frente de onda e são tais que rodando \vec{E} para \vec{B} , um saca-rolhas dá a direcção de \vec{K} .



Faz, então, sentido fazer uma mudança de eixos das coordenadas. O eixo dos zz passa a coincidir em direcção e sentido com o vector de onda \vec{K} . De notar que as frentes de onda são planos paralelos a \vec{K} .

Então,

$$\vec{K} = k \hat{k}$$

isto é, o vector de onda só tem componente segundo o eixo dos zz . Por outro lado, os campos \vec{E} e \vec{B} só têm componentes segundo os eixos dos xx e dos yy (e essas componentes só variam com z).

Os campos reais têm, então, componentes

$$E_x = E_X \cos(\omega t - kz + \delta_X)$$

$$E_y = E_Y \cos(\omega t - kz + \delta_Y)$$

e

$$B_x = B_X \cos(\omega t - kz + \psi_X)$$

$$B_y = B_Y \cos(\omega t - kz + \psi_Y)$$

Na forma complexa

$$E_x = E_X \cdot e^{j(\omega t - kz + \delta_X)}$$

$$E_y = E_Y \cdot e^{j(\omega t - kz + \delta_Y)}$$

e

$$B_x = B_X \cdot e^{j(\omega t - kz + \psi_X)}$$

$$B_y = B_Y \cdot e^{j(\omega t - kz + \psi_Y)}$$



Finalmente

$$\underline{E}_x = E_X \cdot e^{j(-kz + \delta_X)}$$

$$\underline{E}_y = E_Y \cdot e^{j(-kz + \delta_Y)}$$

e

$$\underline{B}_x = B_X \cdot e^{j(-kz + \psi_X)}$$

$$\underline{B}_y = B_Y \cdot e^{j(-kz + \psi_Y)}$$

ou, definindo os fasores de vectores

$$\vec{E}_0 = E_X \cdot e^{j\delta_X} \hat{i} + E_Y \cdot e^{j\delta_Y} \hat{j}$$

$$\vec{B}_0 = B_X \cdot e^{j\psi_X} \hat{i} + B_Y \cdot e^{j\psi_Y} \hat{j}$$

vem

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-jkz}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{-jkz}$$

4.2 Polarização de ondas electromagnéticas

A equação do campo eléctrico pode ser re-escrita da seguinte forma

$$\vec{E} = E_X \cdot e^{j\delta_X} \cdot (\hat{i} + A e^{j\phi} \hat{j}) e^{-jkz}$$

ou ainda

$$\vec{E}(z) = E_X \cdot e^{j\delta_X} \cdot (\hat{i} + A e^{j\phi} \hat{j}) e^{-jkz}$$

em que

$$A = \frac{E_Y}{E_X}$$

e

$$\phi = \delta_Y - \delta_X$$



A polarização de uma onda EM é definida pelos valores de A e Φ descritos nesta equação. De seguida irão ser estudados vários tipos de polarização característicos. De notar que o produto $E_x \cdot e^{j\delta_x}$ é uma constante, pelo que, para efeitos de determinação da polarização da onda EM, se pode escrever

$$\underline{\vec{E}}(z) = (\hat{i} + A e^{j\phi} \hat{j}) e^{-jkz}$$

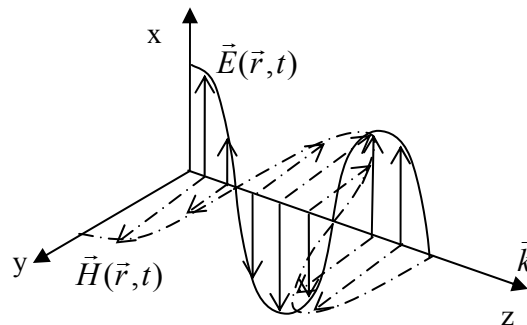
4.2.1 Polarização linear segundo o eixo dos xx

Neste caso tem-se $A = 0$, ficando

$$\underline{\vec{E}}(z) = e^{-jkz} \hat{i}$$

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t - kz)$$

Neste caso os campos eléctrico e magnético irão ter o seguinte comportamento:



Este tipo de polarização diz-se linear segundo os xx , pois só existe campo eléctrico segundo o eixo dos xx e comporta-se como uma linha nesse eixo, vista do eixo dos zz .

4.2.2 Polarização linear fazendo um ângulo de 45° com o eixo dos xx

Agora, tem-se $A = 1$ e $\Phi = 0 \text{ rad}$, vindo

$$\underline{\vec{E}}(z) = (\hat{i} + \hat{j}) e^{-jkz}$$

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y(z, t) = \text{Re}\{e^{-jkz} \cdot e^{j\omega t}\} = \cos(\omega t - kz)$$

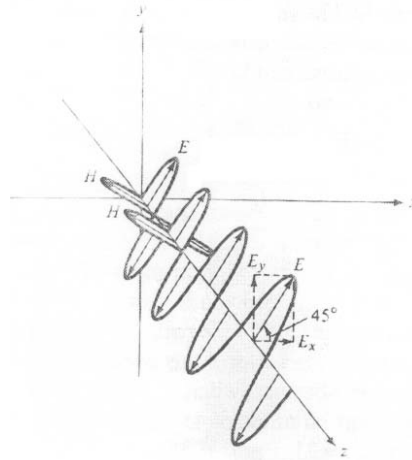
O vector campo eléctrico, $\vec{E}(\vec{r}, t)$, forma 45° com o eixo dos xx e dos yy e tem por módulo e argumento



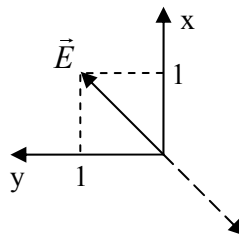
$$\sqrt{\cos^2(\omega t - kz) + \cos^2(\omega t - kz)} = \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - kz)$$

$$\arg \vec{E}(\vec{r}, t) = \arctg(1) = 45^\circ$$

O comportamento dos campo eléctrico e magnético está representado na figura seguinte:



Visto do eixo dos zz , o campo eléctrico tem o seguinte comportamento:



Como se pode observar, o campo eléctrico descreve uma recta que faz um ângulo de 45° quer com o eixo dos xx , quer com o eixo dos yy . Com $\Phi = 0$, tem-se $\Phi_x = \Phi_y$.

4.2.3 Polarização circular à esquerda

Nesta situação, tem-se $A = 1$ e $\Phi = \pi/2 \text{ rad}$, vindo o campo eléctrico

$$\vec{E}(z) = \left(\hat{i} + \hat{j} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jkz}$$

Ficando



$$E_x = \cos(\omega t - k z)$$

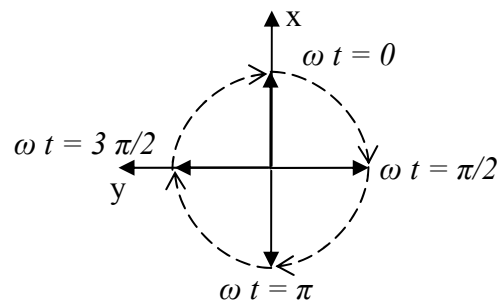
$$E_y = \cos\left(\omega t - k z + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}(\omega t - k z)$$

$$E(\vec{r}, t) = \sqrt{\cos^2(\omega t - k z) + \text{sen}^2(\omega t - k z)} = 1$$

O módulo do campo eléctrico é constante. O argumento é

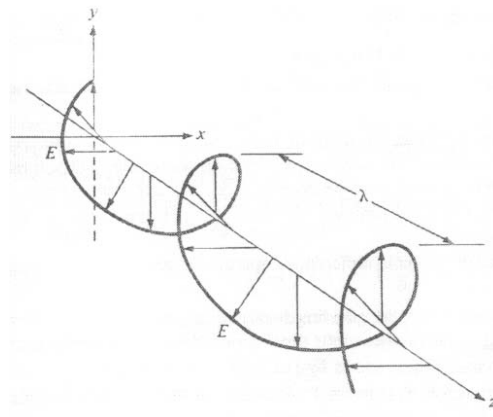
$$\arg \vec{E}(\vec{r}, t) = -\arctg[\text{tg}(\omega t - k z)] = k z - \omega t$$

Visto segundo o eixo dos zz , na posição inicial, isto é, para $z = 0$, ou para posições em que kz seja múltiplo de 2π , o campo eléctrico terá o seguinte comportamento:



Como se pode constatar, o campo eléctrico descreve uma circunferência no sentido dos ponteiros dos relógios; está-se na presença de uma polarização circular à esquerda.

Visto a três dimensões, o seu comportamento é o seguinte:





4.2.4 Polarização circular à direita

Esta situação é em tudo idêntica à anterior, só que agora o desfaseamento entre a componente segundo o eixo dos xx e dos yy é de -90° , ou seja, $A = 1$ e $\Phi = -\pi/2 \text{ rad}$. Nesta situação a expressão do campo eléctrico fica

$$\vec{E}(z) = \left(\hat{i} + \hat{j} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jkz}$$

Ficando

$$E_x = \cos(\omega t - kz)$$

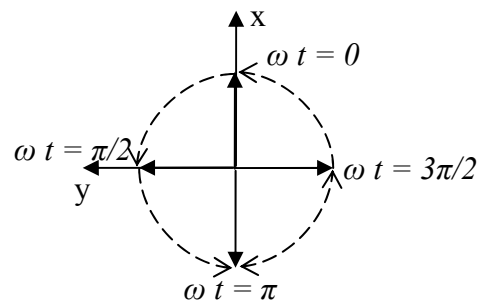
$$E_y = \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(\omega t - kz)$$

$$E(\vec{r}, t) = \sqrt{\cos^2(\omega t - kz) + \text{sen}^2(\omega t - kz)} = 1$$

O módulo do campo eléctrico é constante. O argumento é

$$\arg \vec{E}(\vec{r}, t) = \omega t - kz$$

Visto segundo o eixo dos zz , o campo eléctrico terá o seguinte comportamento:



Como se pode constatar, o campo eléctrico descreve uma circunferência no sentido contrário ao dos ponteiros dos relógios; está-se na presença de uma polarização circular à direita.

4.2.5 Polarização elíptica à esquerda

Considere-se o caso em que $A = 2$ e $\Phi = \pi/2 \text{ rad}$. O campo eléctrico virá, então,



$$\underline{\vec{E}}(z) = \left(\hat{i} + \hat{j} \cdot 2e^{j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jkz}$$

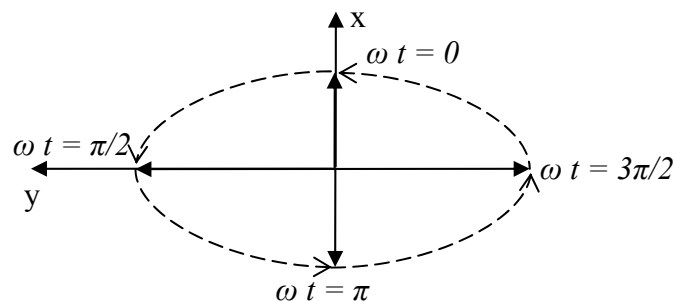
Ficando

$$E_x = \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = 2 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \sin(\omega t - kz)$$

$$E(\vec{r}, t) = \sqrt{\cos^2(\omega t - kz) + 4 \sin^2(\omega t - kz)}$$

Visto segundo o eixo dos zz , o campo eléctrico terá o seguinte comportamento:



Como se pode verificar, a campo eléctrico descreve uma elipse no plano xy rodando no sentido dos ponteiros do relógio. Está-se na presença de uma polarização elíptica à esquerda.

4.2.6 Polarização elíptica à direita

Considere-se o caso em que $A = 2$ e $\Phi = -\pi/2$ rad. O campo eléctrico virá, então,

$$\underline{\vec{E}}(z) = \left(\hat{i} + \hat{j} \cdot 2e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) e^{-jkz}$$

Ficando

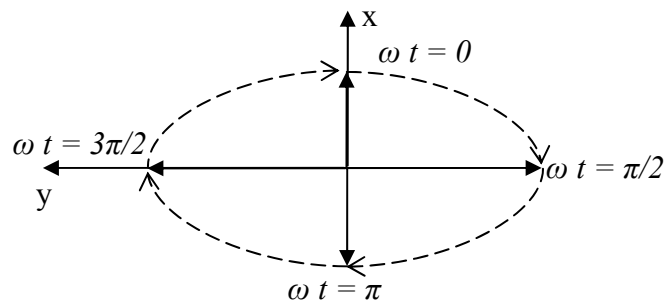


$$E_x = \cos(\omega t - k z)$$

$$E_y = 2 \cos\left(\omega t - k z - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{sen}(\omega t - k z)$$

$$E(\vec{r}, t) = \sqrt{\cos^2(\omega t - k z) + 4 \text{sen}^2(\omega t - k z)}$$

Visto segundo o eixo dos zz , o campo eléctrico terá o seguinte comportamento:



Como se pode verificar, a campo eléctrico descreve uma elipse no plano xy rodando no sentido dos ponteiros do relógio. Está-se na presença de uma polarização elíptica à esquerda.

4.3 Energia e vector de Poynting

Considerem-se as seguintes duas das equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \vec{J} = \text{rot } \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

O produto interno $\vec{E} | \vec{J}$ representa a energia por unidade de volume.

Nos condutores, tem-se $\vec{J}_c = \sigma \cdot \vec{E}$, pelo que $\vec{E} | \sigma \cdot \vec{E} = \sigma \cdot E^2$, o que dá a lei de Joule.

Desenvolvendo o produto interno,

$$\vec{E} | \vec{J} = \vec{E} | \text{rot } \vec{H} - \varepsilon \cdot \vec{E} | \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Por outro lado, tem-se



$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \mid \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \mid \operatorname{rot} \vec{b}$$

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \mid \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \mid \operatorname{rot} \vec{H}$$

pelo que fica

$$\begin{aligned} \vec{E} \mid \vec{J} &= \vec{H} \mid \operatorname{rot} \vec{E} - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \varepsilon \cdot \vec{E} \mid \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= -\mu \cdot \vec{H} \mid \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \vec{E} \mid \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= -\frac{\mu}{2} \cdot \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\partial E^2}{\partial t} - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

Aplicando um integral de volume a ambos os lados desta equação, vem

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV + \iiint_V (\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H})) dV = - \iiint_V (\vec{E} \mid \vec{J}) dV$$

Aplicando o teorema de Green-Ostrogradsky, vem

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV + \iint_S ((\vec{E} \times \vec{H}) \mid \vec{n}) dS = - \iiint_V (\vec{E} \mid \vec{J}) dV$$

ou

$$\iint_S ((\vec{E} \times \vec{H}) \mid \vec{n}) dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV - \iiint_V (\vec{E} \mid \vec{J}) dV$$

em que o produto externo $\vec{E} \times \vec{H}$ dá o vector de Poynting, \vec{S} , isto é,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Pode então escrever-se

$$\iint_S (\vec{S} \mid \vec{n}) dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV - \iiint_V (\vec{E} \mid \vec{J}) dV$$

O termo do lado esquerdo desta equação representa o fluxo de energia através da superfície fechada S que contorna o volume V , enquanto que o primeiro termo da direita da equação representa a taxa de variação da energia armazenada nos campos eléctrico e



magnético dentro do volume V . No caso de todas as fontes se encontrarem fora do volume V , o terceiro termo é uma perda óhmica. O termo da fonte é o vector de Poynting que compreende a fluxo de entrada da energia. Pode, então, escrever-se

$$\underbrace{\left| \iint_S (\vec{S} | \vec{n}) dS \right|}_{\text{termo fonte; entrada de energia devido às fontes exteriores a } V} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV}_{\text{taxa de incremento de energia eléctrica e magnética no volume } V} + \underbrace{\iiint_V (\sigma \cdot E^2) dV}_{\text{energia dissipada por calor}}$$

Quando as fontes se encontram dentro do volume V , o terceiro termo deve conter o termo da fonte. \vec{E} e \vec{J} , quando representam fontes estão em direcções opostas. Assumindo que não há perdas dentro do volume V , a equação do balanço energético vem

$$\underbrace{\iiint_V (\vec{E} | \vec{J}) dV}_{\text{termo fonte}} = \underbrace{\left| \iint_S (\vec{S} | \vec{n}) dS \right|}_{\text{fluxo de saída de energia do volume } V} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \right) dV}_{\text{taxa de incremento de energia armazenada no volume } V}$$

Por último, atendendo a que

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_c$$

pode re-escrever-se

$$\iiint_V (\vec{E} | \vec{J}) dV = \iiint_V (\vec{E} | \vec{J}_s) dV + \iiint_V (\sigma \cdot E^2) dV$$

4.4 Ondas em meios condutores

Recordem-se as equações de radiação e de propagação dos campos eléctrico e magnético:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \text{rot } \vec{J}$$

Nos meios condutores, sem fontes de cargas, têm-se as seguintes relações:

$$\rho = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$



pelo que se pode escrever

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

e

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \sigma \operatorname{rot} \vec{E} = \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

O efeito dos termos de perda, $\mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ e $\mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, nas equações anteriores é atenuar a

onda em propagação, pois a energia é retirada da onda para fornecer as perdas por aquecimento óhmico no meio. Quando este termo é pequeno, por exemplo, num meio dieléctrico de baixas-perdas, em que $\sigma \approx 0$, a onda sofrerá uma pequena atenuação do tipo exponencial à medida que se propaga no meio. Por outro lado, quando as perdas por condução são grandes, $\sigma \gg 1$, a atenuação exponencial será tão rápida que quase nem se pode falar em propagação: é mais uma difusão no meio. Quer se trate de difusão ou de propagação depende dos dois últimos termos da equação para o \vec{E} , que pode ser identificado com a corrente de deslocamento e com a corrente de condução através de:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

em que \vec{J} é a corrente de condução e $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ é a corrente de deslocamento.

Num meio em que a corrente de deslocamento predomine (e se possa desprezar a corrente de condução), então o campo magnético é produzido pela corrente de deslocamento, ficando

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{E} - \mu \cdot \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$



No caso contrário, isto é, se a corrente de condução for predominante e a corrente de deslocamento desprezável, sendo a propagação caracterizada por uma equação de difusão, então fica

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{E} - \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Esta equação é conhecida como a equação de *corrente-eddy*, pois é da mesma forma da equação para a densidade de corrente, \vec{J} . Dado que $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$, a equação que rege o comportamento da corrente é:

$$\nabla^2 \vec{J} - \mu \cdot \sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0.$$

Mostrou-se que num meio em que a corrente de condução predomine (num condutor), o campo electromagnético obedece a uma equação de difusão, enquanto que num meio em que a corrente de deslocamento predomine (num dieléctrico) o campo electromagnético obedece a uma equação de onda.

Procure-se uma solução do tipo mono-freqüência (OPM). Decompondo nas componentes segundo o eixo dos xx e dos yy , vem

$$\nabla^2 E_x - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu \cdot \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

e

$$\nabla^2 E_y - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \mu \cdot \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

com $E_x = E_X \cdot e^{j\omega t}$ e $E_y = E_Y \cdot e^{j\omega t}$, vem, por exemplo, para E_x , que só varia com z ,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \cdot \mu \cdot j^2 \cdot \omega^2 \cdot E_x = \mu \cdot \sigma \cdot j \cdot \omega \cdot E_x$$

ou

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \varepsilon \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot E_x - \mu \cdot \sigma \cdot j \cdot \omega \cdot E_x = 0$$

Definindo uma permissividade complexa do tipo



$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon} \right)$$

e dividindo toda a equação por $e^{j\omega t}$, resulta

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon^* \cdot E_X = 0$$

Esta é a equação de um movimento harmónico que se pode pôr, fazendo $\beta^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon^*$,

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} + \beta^2 \cdot E_X = 0$$

e é satisfeita pela função

$$E_X = E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z}$$

De facto, substituindo, resulta

$$\frac{\partial E_X}{\partial z} = -j \cdot \beta \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = j^2 \cdot \beta^2 \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z} = -\beta^2 \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z}$$

o que, substituindo, fica

$$-\beta^2 \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z} + \beta^2 \cdot E_{X_0} \cdot e^{-j\beta z} = 0 \quad (\text{confirmado})$$

β é um número complexo que se pode colocar na forma

$$\beta = k - j\alpha$$

ficando, então,

$$E_X = E_{X_0} \cdot e^{-j(k-j\alpha)z} = E_{X_0} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

e para o campo

$$E_x = E_{X_0} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$



Esta equação representa uma OPM de amplitude decrescente, em que α é a constante de atenuação e k é o número de onda.

De notar que num dieléctrico, tem-se $\sigma/\omega \cdot \epsilon \ll 1$ pelo que se tem

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \beta^2 \cdot E_x = 0 \quad \text{e} \quad E_x = E_{x_0} \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

em que $\beta^2 = \omega^2 \cdot \epsilon \cdot \mu$ (o que está coincidente com o que foi apresentado anteriormente). De igual modo, num meio altamente condutor, ou seja, $\sigma/\omega \cdot \epsilon \gg 1$, vem

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - j\omega \cdot \sigma \cdot \mu \cdot E_x = 0 \quad \text{e} \quad E_x = E_{x_0} \cdot e^{-z/\delta} \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

em que

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}}$$

e é conhecida por profundidade de penetração no condutor. Para $z = \delta$, a amplitude reduz-se de um factor de $1/e$. Como δ pode tomar valores muito pequenos para condutores muito bons, mesmo a baixas frequências, a onda decresce exponencialmente muito depressa à medida que se propaga no meio, sendo mais característico de uma difusão do que uma propagação, o que, mais uma vez, está de acordo com o exposto anteriormente.

4.4.1 Impedância característica de um meio

A razão entre os módulos do campo eléctrico e do campo intensidade magnética dá a impedância característica de um meio, η , isto é

$$\eta = \frac{E}{H} \quad (\Omega)$$

Este valor pode ser obtido a partir do seguinte:

Considere-se a equação

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Atendendo às expressões obtidas para \vec{E} e para \vec{H} , tem-se



$$\text{rot } \vec{E} = -j\mu \cdot \omega \cdot \vec{H}$$

simplificando

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -j\mu \cdot \omega \cdot H$$

Atendendo à expressão obtida para \vec{E} , vem

$$H_0 = \frac{\beta}{\omega \cdot \mu} E_0$$

Pelo que se pode escrever

$$\eta = \frac{E}{H} = \frac{\omega \cdot \mu}{\beta}$$

No vácuo, β é real, e tem-se

$$\eta_0 = \frac{E}{H} = \frac{\omega \cdot \mu_0}{\omega \sqrt{\epsilon_0} \cdot \mu_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \Omega$$

Num meio dieléctrico com perdas baixas, tem-se

$$\eta^* = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon^*}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \cdot \epsilon}}} = \eta \cdot \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega \cdot \epsilon}\right)$$

Aqui, como $\sigma \approx 0$, então $\eta^* \approx \eta$.

Num meio condutor, tem-se

$$\eta^* = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon^*}} \cong \sqrt{j \frac{\omega \cdot \mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2\sigma}}$$

4.4.2 Onda num meio qualquer

Neste caso define-se a permissividade complexa da seguinte forma:



$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(1 - j \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - j \frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon} \right) = \left(1 - j \frac{\omega \cdot \varepsilon' + \sigma}{\omega \cdot \varepsilon} \right)$$

Esta permissividade pode ser entendida como

$$\varepsilon_{ef} = \varepsilon - j\varepsilon'$$

ou

$$\sigma_{ef} = \sigma + \omega \cdot \varepsilon'$$

A

$$\text{tg } \phi = \frac{\sigma + \omega \cdot \varepsilon'}{\omega \cdot \varepsilon'}$$

chama-se tangente de perdas ou factor de dissipação.

4.5 Reflexão de OPMs por um condutor perfeito

4.5.1 Incidência normal

A componente segundo os xx é

$$E_x = E_X^i \cdot e^{j(\omega t - kz)} + E_X^r \cdot e^{j(\omega t + kz)}$$

correspondentes à onda incidente e reflectida (repare-se o sinal positivo em kz o que indica uma onda que se propaga em sentido contrário à onda incidente com sinal negativo).

Na fronteira, ou seja, em $z = 0$, tem-se

$$E_x|_{z=0} = (E_X^i + E_X^r) \cdot e^{j\omega t} = 0 \quad (\text{das condições fronteira})$$

$$E_X^i = -E_X^r$$

O coeficiente de reflexão, Γ , é dado por

$$\Gamma = \frac{E_X^r}{E_X^i} = -1$$

ou seja, há reflexão total.



A equação da componente segundo os xx pode, então, escrever-se da seguinte forma:

$$E_x = E_X^i \cdot (e^{-jkz} - e^{jkz}) \cdot e^{j\omega t}$$

Aplicando a relação de Euler para o seno, vem

$$E_x = -2jE_X^i \cdot \text{sen}(kz) \cdot e^{j\omega t}$$

e o valor instantâneo é dado por

$$E_x = 2E_X^i \cdot \text{sen}(kz) \cdot \text{sen}(\omega t)$$

o que representa uma onda estacionária.

Adoptando um procedimento idêntico para H_x , chegar-se-ia à solução

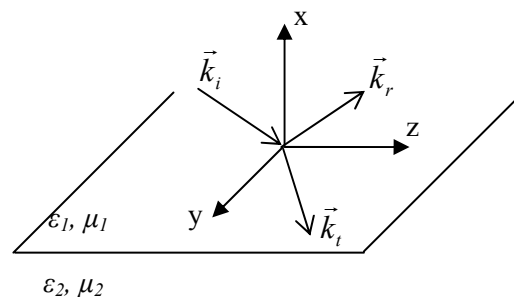
$$H_x = \frac{2H_X^i}{\eta} \cdot \cos(kz) \cdot \cos(\omega t)$$

4.5.2 Condições na fronteira entre dois dieléctricos

Uma onda que viaje num meio e incida num dieléctrico vai ser parcialmente reflectida e parcialmente transmitida para o dieléctrico. Neste caso tem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2} \\ H_{t1} &= H_{t2} \end{aligned}$$

Na figura seguinte, \vec{k} é um fasor, com toda a generalidade, $\underline{\vec{k}}$, sendo em geral um complexo.



As equações fasoriais dos campos incidente, reflectido e transmitido, são



$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_i \cdot e^{-j(\vec{k}_i|\vec{r})}$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_r \cdot e^{-j(\vec{k}_r|\vec{r})}$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_t \cdot e^{-j(\vec{k}_t|\vec{r})}$$

As condições fronteira são independentes do tempo, pelo que se pode escrever

$$\left\{ \vec{E}_i(0, y, z) + \vec{E}_r(0, y, z) \right\}_{\text{tang}} = \left\{ \vec{E}_t(0, y, z) \right\}_{\text{tang}}$$

Para todo o ponto (y, z) da fronteira, $x = 0$, pelo que

$$\left\{ \vec{E}_i \cdot e^{-jk_{iy}y - jk_{iz}z} + \vec{E}_r \cdot e^{-jk_{ry}y - jk_{rz}z} \right\}_{\text{tang}} = \left\{ \vec{E}_t \cdot e^{-jk_{ty}y - jk_{tz}z} \right\}_{\text{tang}}$$

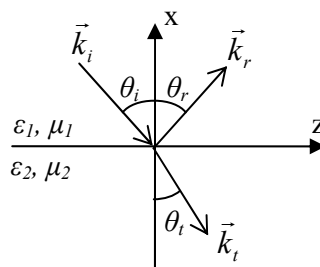
Para ser independente do ponto, deve ser

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y$$

$$k_{iz} = k_{rz} = k_{tz} = k_z$$

Pode-se, então, afirmar que \vec{k}_i , \vec{k}_r e \vec{k}_t são coplanares, num plano normal ao plano de separação.

Rodando os eixos, vem



Donde se tiram as relações



$$\vec{k}_i = -k_1 \cos(\theta_i) \hat{i} + k_1 \sin(\theta_i) \hat{k}$$

$$\vec{k}_r = k_1 \cos(\theta_r) \hat{i} + k_1 \sin(\theta_r) \hat{k}$$

$$\vec{k}_t = -k_2 \cos(\theta_t) \hat{i} + k_2 \sin(\theta_t) \hat{k}$$

Definem-se k_1 e k_2 como

$$k_1 = |\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = \omega \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1}$$

$$k_2 = |\vec{k}_t| = \omega \sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2}$$

Atendendo a que $k_{i_z} = k_{r_z} = k_{t_z}$, tiram-se as seguintes relações:

$$\text{De } k_{i_z} = k_{r_z}, \text{ sen}(\theta_i) = \text{sen}(\theta_r) \Rightarrow \theta_i = \theta_r$$

$$\text{De } k_{i_z} = k_{t_z}, k_1 \cdot \text{sen}(\theta_i) = k_2 \cdot \text{sen}(\theta_t)$$

ou seja,

$$\frac{\text{sen}(\theta_i)}{\text{sen}(\theta_t)} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega \cdot \sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2}}{\omega \cdot \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2}$$

Esta é a lei de Snell para a refração.

4.5.3 Leis de Snell

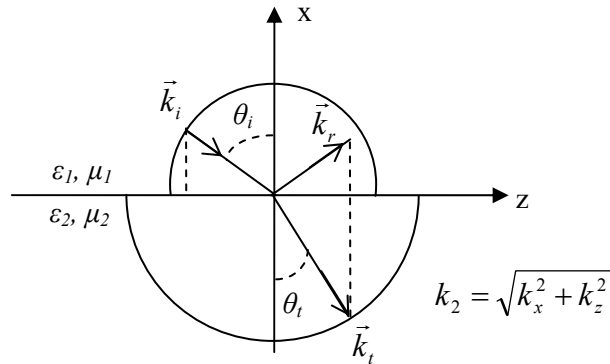
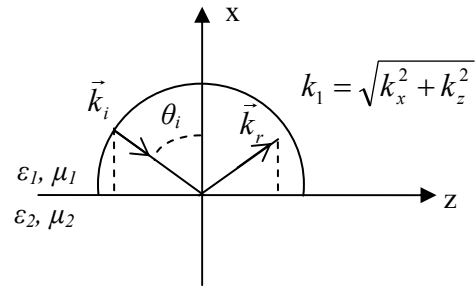
O índice de refração de um dado meio, n , é dado por

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

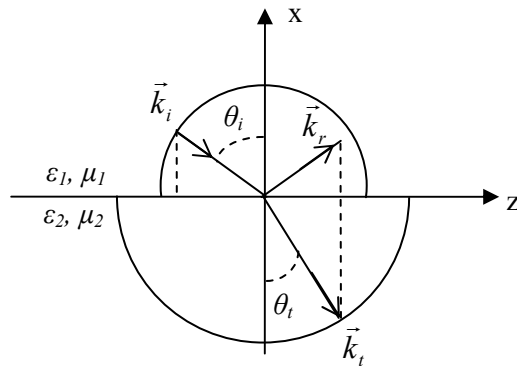
pelo que nos casos em que $\mu_1 = \mu_2$, pode se escrever a lei de Snell do seguinte modo:

$$\frac{\text{sen}(\theta_i)}{\text{sen}(\theta_t)} = \frac{\sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_1}} = \frac{\mu_1 \cdot \sqrt{\varepsilon_2}}{\mu_2 \cdot \sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Atente-se às seguintes figuras:



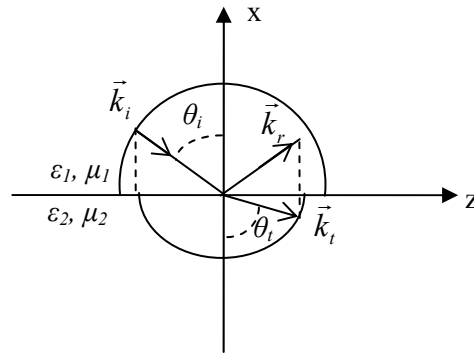
Na situação seguinte, $k_2 > k_1$:



donde se tira

$$k_2 > k_1 \rightarrow \sqrt{\mu_2 \cdot \epsilon_2} > \sqrt{\mu_1 \cdot \epsilon_1} \quad \text{ou} \quad v_1 > v_2 \rightarrow \theta_t < \theta_i$$

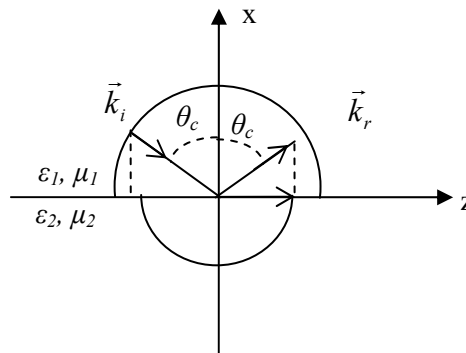
A seguir representa-se o caso em que $k_1 > k_2$:



Agora, tem-se

$$k_1 > k_2 \rightarrow \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1} > \sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2} \quad \text{ou} \quad v_2 > v_1 \rightarrow \theta_t > \theta_i$$

Um caso particular de interesse, é o caso em que há reflexão total; neste caso, o ângulo do segundo meio é 90° , isto é, $\theta_t = 90^\circ$, ficando



Matematicamente, fica

$$k_1 \cdot \text{sen}(\theta_c) = k_2$$

em que θ_c é o chamado ângulo crítico. Tem-se ainda

$$\text{sen}(\theta_c) = \frac{k_2}{k_1}$$

Um outro caso de interesse é quando a incidência é normal à fronteira entre os dois meios, isto é, $\theta_i = 0$. Na fronteira, $z = 0$, tem-se

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t$$

$$H_0^i + H_0^r = H_0^t$$



pelo que se pode escrever

$$1 + \Gamma = \tau$$

e

$$1 - \Gamma = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau$$

em que Γ é o coeficiente de reflexão (definido na secção 4.5.1) e τ é o coeficiente de transmissão e define-se como

$$\tau = \frac{E_t}{E_i}$$

Resolvendo as duas equações anteriores simultaneamente, fica

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

e

$$\tau = \frac{2 \cdot \eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

em que η é a impedância característica do meio.

4.5.4 Campo evanescente

Quando o ângulo de incidência é maior que o ângulo crítico, isto é, quando $\theta_i > \theta_c$, vem

$$k_{t_x} = \sqrt{k_2^2 - k_z^2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cdot \text{sen}^2(\theta_i)}$$

Como, neste caso, $k_1 \cdot \text{sen}(\theta_i) > k_2$, fica

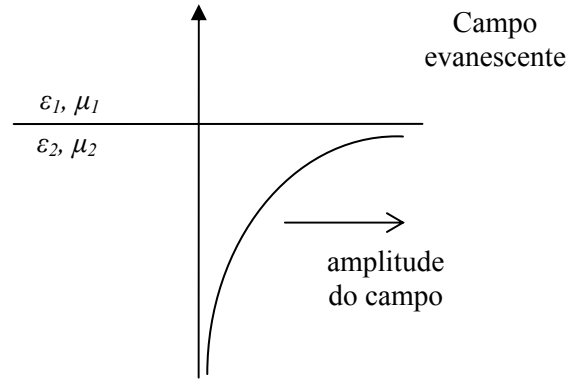
$$k_{t_x} = \pm j \sqrt{k_1^2 \cdot \text{sen}^2(\theta_i) - k_2^2} = \pm j \alpha_{t_x}$$

Substituindo na equação fasorial de \vec{E}_t , vem



$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_t \cdot e^{-j(k_{t_x}x + k_z z)} = \vec{E}_t \cdot e^{-jk_z z} \cdot e^{-jk_{t_x}x} = \vec{E}_t \cdot e^{-jk_z z} \cdot e^{-j(\pm j\alpha_{t_x})x} = \vec{E}_t \cdot e^{-jk_z z} \cdot e^{\pm\alpha_{t_x}x}$$

A solução limitada ocorre quando $k_{t_x} = -j\alpha_{t_x}$, em que se tem

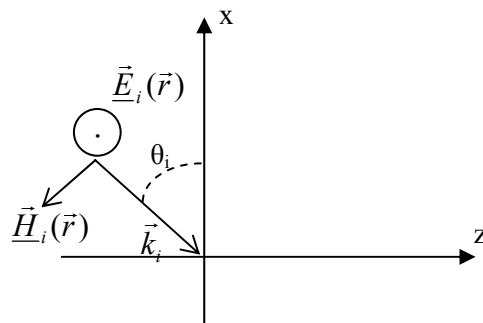


4.6 Ondas transversais

As condições de fronteira impõem ainda relações entre as amplitudes de \vec{E}_i , \vec{E}_r e \vec{E}_t . Para as encontrar, vai decompor-se a onda incidente de polarização arbitrária em duas componentes, uma de polarização ortogonal e ao plano de incidência (plano dos \vec{k}) e outra de polarização paralela, somando-se, depois, os efeitos.

4.6.1 Ondas TE

São ondas de polarização normal ou transversal ao plano de incidência (daí o nome Transversal Eléctrica).



Sem perda de generalidade, pode-se pôr

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = e^{-j(k_{t_x}x + k_z z)} \hat{j}$$



o que equivale a fazer

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = (0,1,0)$$

As ondas reflectida e transmitida, também polarizadas segundo \hat{j} , vêm

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_r \cdot e^{-j(k_{rx}x+k_zz)} \hat{j}$$

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_t \cdot e^{-j(k_{tx}x+k_zz)} \hat{j}$$

Como só há componente segundo os yy , pode escrever-se

$$\underline{E}_r(\vec{r}) = \underline{E}_r \cdot e^{-j(k_{rx}x+k_zz)}$$

$$\underline{E}_t(\vec{r}) = \underline{E}_t \cdot e^{-j(k_{tx}x+k_zz)}$$

onde \underline{E}_r e \underline{E}_t são fasores, constantes complexas, do tipo

$$\underline{E}_r = E_r \cdot e^{j\phi_r}$$

$$\underline{E}_t = E_t \cdot e^{j\phi_t}$$

Tem-se, então,

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_i(\vec{r}) &= e^{-jk_{ix}x} \\ \vec{E}_r(\vec{r}) &= R \cdot e^{-jk_{rx}x} \\ \vec{E}_t(\vec{r}) &= T \cdot e^{-jk_{tx}x} \end{aligned} \right\} \cdot e^{-jk_zz} \hat{j}$$

A partir de

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \cdot \mu} \cdot \vec{K} \times \vec{E}$$

Defina-se



$$R^{(TE)} = \frac{\underline{E}_r}{\underline{E}_i} \quad \text{coeficiente de reflexão}$$

$$T^{(TE)} = \frac{\underline{E}_t}{\underline{E}_i} \quad \text{coeficiente de transmissão}$$

então obtém-se

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = \frac{1}{\omega \cdot \mu} (-k_{i_x} \hat{k} - k_z \hat{i}) e^{-jk_{i_x}x} \cdot e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = \frac{R}{\omega \cdot \mu} (k_{r_x} \hat{k} - k_z \hat{i}) e^{-jk_{r_x}x} \cdot e^{-jk_z z}$$

$$\vec{H}_t(\vec{r}) = \frac{T}{\omega \cdot \mu} (-k_{t_x} \hat{k} - k_z \hat{i}) e^{-jk_{t_x}x} \cdot e^{-jk_z z}$$

Impondo a condição de igualdade das componentes tangenciais, vem, para $x = 0$,

$$1 + R = T \quad \text{(do campo eléctrico)}$$

$$-\frac{1}{\omega \cdot \mu_1} k_{i_x} + \frac{R}{\omega \cdot \mu_1} k_{r_x} = -\frac{T}{\omega \cdot \mu_2} k_{t_x} \quad \text{(do campo magnético)}$$

Atendendo a que

$$k_{i_x} = k_{r_x}$$

fica

$$\frac{1}{\mu_1} k_{i_x} \cdot (1 - R) = \frac{1}{\mu_2} k_{t_x} \cdot T$$

$$1 - R = \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot T$$

De



$$1 + R = T$$

$$1 - R = \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot T$$

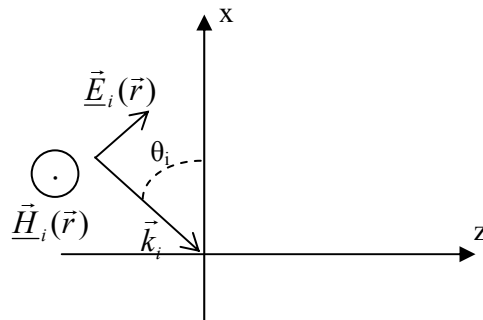
tira-se

$$R^{(TE)} = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}$$

$$T^{(TE)} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}$$

4.6.2 Ondas TM

Neste caso, a polarização é paralela ao plano, portanto é $\vec{H}_i(\vec{r})$ que é normal, ou transversal (daí o nome Transversal Magnética).



Por dualidade

$$\begin{aligned} E &\rightarrow H \\ H &\rightarrow E \\ \mu &\rightarrow \epsilon \\ \epsilon &\rightarrow \mu \end{aligned}$$



$$R^{(TM)} = \frac{H_r}{H_i} = \frac{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}$$

$$T^{(TM)} = \frac{H_t}{H_i} = \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{k_{t_x}}{k_{i_x}}}$$

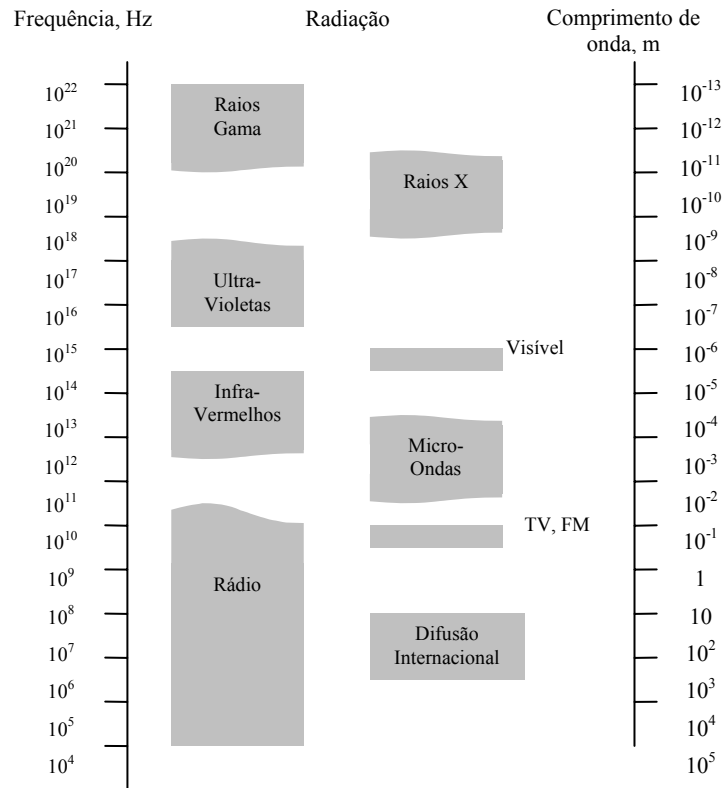
Toda a onda que encontra objectos ou fendas de dimensões superiores ao comprimento de onda pode ser parcialmente analisada em termos de raios: é o campo da óptica.

Fenómenos que envolvem objectos ou fendas de dimensão do comprimento de onda exigem tratamento rigoroso; o mesmo acontece nos fenómenos de interferência.

4.7 Espectro electromagnético

As ondas electromagnéticas propagam-se no vazio e no ar a uma velocidade de 3×10^8 ms^{-1} . A gama de frequências das ondas electromagnéticas vai desde as “baixas frequências” – utilizadas nas comunicações rádio – até às altas-frequências que se encontram nos raios X e Gama.

Ao conjunto de frequências das ondas EM chama-se espectro electromagnético, representado na figura seguinte:



Para uma melhor ideia do significado do espectro, atente-se à tabela seguinte:

Espectro electromagnético			
Comprimento de onda (λ)	Frequência (f)	Designação	Utilização comum
30 km	10^4 Hz	VLF	Comunicação rádio a distâncias longas Comunicação submarina
3 km	10^5 Hz	Ondas Longas	
30 m	10^7 Hz = 10 MHz	Ondas Curtas	
30 cm	10^9 Hz = 1 GHz	UHF	TV, radar
3 cm	10 GHz	Ondas Centimétricas	Satélite, radar
0,3 cm = 300 μ m	10^{12} Hz		
3 μ m = 3000 nm	10^{14} Hz	Infravermelhos, espectro molecular	
700 nm	$4,2 \times 10^{14}$ Hz	Luz	
40 nm	$7,5 \times 10^{14}$ Hz		
30 nm = 300 Å	10^{16} Hz	Ultravioleta, espectro atómico	
300 pm	10^{18} Hz	Raios X	
< 3 pm	10^{20} Hz	Raios γ	



4.8 Antenas

As equações de radiação e de propagação dos campos eléctrico e magnético já foram vistas na secção 3.10.3 e são:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \text{rot } \vec{J}$$

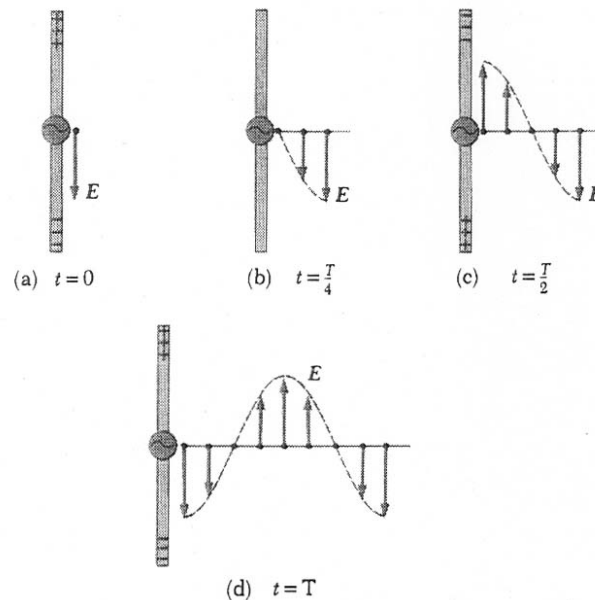
Estas equações descrevem o comportamento dos campos eléctrico e magnético aquando da sua propagação para pontos no espaço longe dos circuitos que os criaram. Quando tal não acontece está-se perante o problema de antenas, que é abordado nesta secção.

Como se viu anteriormente, as ondas electromagnéticas são geradas como consequência de um de dois efeitos: ou a partir de um campo magnético variável que produza um campo eléctrico ou a partir de um campo eléctrico variável que produza um campo magnético. Torna-se, então, claro, que nem cargas estacionárias, nem correntes constantes são capazes de gerar ondas electromagnéticas. Quando uma corrente que circule num condutor variar no tempo, então o condutor irá emitir radiação electromagnética. O mecanismo fundamental responsável por essa irradiação é a aceleração de partículas carregadas, isto é, sempre que uma partícula carregada sofre uma aceleração, então irradia energia.

Uma técnica comum para acelerar partículas carregadas, consiste em aplicar uma tensão nos condutores de uma antena, sendo a fonte das ondas de rádio emitidas pelas antenas das estações rádio-emissoras.

A figura seguinte¹ ilustra a produção de uma onda electromagnética através das cargas oscilantes de uma antena:

¹ Retirada de [8].



Neste caso ligam-se duas hastes metálicas a um gerador de corrente alternada, o que irá provocar a oscilação das cargas entre as duas hastes, sendo, neste caso, a tensão aos terminais do gerador, sinusoidal. No instante inicial, isto é, em $t = 0$ s, a haste de cima tem uma carga positiva máxima enquanto que a haste de baixo tem uma carga igual mas negativa. Também está representado o campo eléctrico nas vizinhanças da antena nesse instante. Quando a carga oscila, as hastes ficam menos carregadas, fazendo com que o campo nas vizinhanças das hastes diminua de intensidade, enquanto que o campo eléctrico gerado no instante inicial se afasta das hastes. Quando as cargas se neutralizam, como se pode ver na alínea b) da figura, a campo eléctrico fica também nulo; tal ocorre passado um quarto de período de oscilação. Continuando o processo, de seguida a haste superior aumenta a sua carga negativa, até atingir um máximo, ficando, nesse instante, a haste inferior com a carga positiva máxima, originando um campo eléctrico dirigido de baixo para cima, como se pode ver na alínea c) da figura. Este instante ocorre meio período depois de iniciado o processo. A seguir, ocorre um processo inverso, até se atingir a situação em que a haste de cima fica com a carga positiva máxima e a de baixo com a carga negativa máxima, isto é, volta-se à posição inicial – situação descrita na alínea d) da figura. Neste instante decorreu um período de oscilação, seguindo-se, posteriormente, uma repetição de todo este processo.

Do que foi descrito, pode concluir-se que foi gerado um campo eléctrico que se foi afastando (propagando) das duas hastes, pelo que se diz que estas formam uma antena. Perpendicularmente ao campo eléctrico, e ao mesmo tempo, é também criado um campo magnético, através de um processo análogo. Está-se, então, na presença de uma fonte dos campos eléctrico e magnético, ou seja, da radiação electromagnética.

Um processo inverso, mas análogo, ocorre quando as hastes “estão no caminho” de uma onda electromagnética: aos seus terminais ter-se-á, então, uma tensão alternada, de acordo com o campo electromagnético da onda (a antena deixa de ser uma “torneira”, para passar a ser um “ralo” do campo electromagnético).