3 Equações de Maxwell

3.1 Campos escalares e vectoriais

Um campo é, grosso modo, um ente físico que toma diferentes valores em pontos distintos do espaço. A posição do ponto do espaço determina o valor do campo no ponto a cada instante.

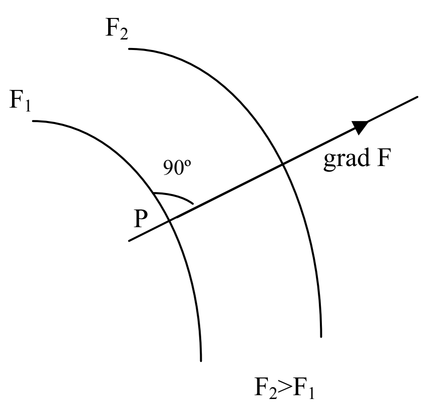
A grandeza física pode ser um escalar. Tem-se, então, uma função das três coordenadas do ponto. A temperatura duma sala é em campo escalar.

O ente físico também pode ser de natureza vectorial. As velocidades das partículas dum fluído em movimento, por exemplo a água, formam um campo vectorial. A cada ponto do espaço (onde está o fluído) está associado um vector.

Os campos vectoriais podem ser representados por vectores, pelas tangentes, em cada ponto, ao vector correspondente a esse ponto – as chamadas linhas de força do campo – ou por superfícies a que estas linhas são perpendiculares – as superfícies de nível do campo. Num campo escalar representam-se as superfícies onde o campo é constante.

3.2 Gradiente de um campo escalar

Dado um campo escalar *F(P, t)* é possível, com algumas restrições matemáticas que aqui não serão abordadas, definir um novo campo a partir dele, sendo este novo campo um campo vectorial, chamado gradiente do campo escalar.
A cada ponto do espaço, associa-se um vector que tem a direcção e o sentido segundo os quais o campo escalar cresce mais rapidamente e o seu módulo é, justamente, o valor desse crescimento, por unidade de comprimento. Esse vector é perpendicular às superfícies de igual valor do campo escalar – as suas superfícies de nível.



$$gradF = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

O gradiente de F é calculável directamente a partir de *F*; se o campo estiver expresso em coordenadas cartesianas *F(x, y, z, t)* é

$$gradF = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}$$

Como, ao longo de uma superfície equipotencial, F não varia, definindo um vector $\vec{u}$ tangente à superfície, tem-se

$$gradF \mid \vec{u} = 0$$

Logo, *grad F* tem de ser perpendicular à superfície de nível que passa por P.

3.2.1 Operador Nabla

O operador nabla, ∇, é definido por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

logo

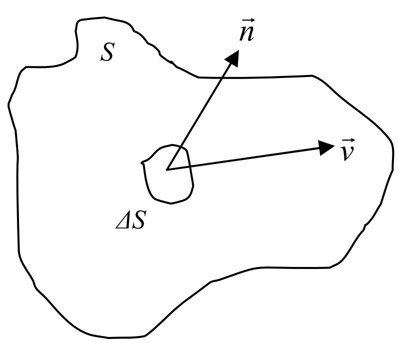
$$gradF = \nabla F$$

3.3 Fluxo de um campo vectorial

Fluxo: "quantidade" que passa por uma superfície por unidade de tempo.

Exemplo: quantidade de água que passa através de uma dada secção de uma conduta (por exemplo) por unidade de tempo.

Suponha-se uma superfície S e defina-se uma superfície elementar ΔS sobre ela. Seja $\vec{n}$ o versor normal a ΔS. Seja $\vec{v}$ um campo vectorial, por exemplo, o campo de velocidade de água.



A quantidade $\vec{v} \mid \vec{n}\, \Delta S$, obtida projectando $\vec{v}$ segundo $\vec{n}$, ou seja, a velocidade da água, na direcção da normal e multiplicando pela área *ΔS*, dá o volume de água que atravessa essa superfície elementar por unidade de tempo.

Se se pretender saber qual o volume de água que passa por unidade de tempo em toda a superfície, ter-se-ia de considerar outras superfícies elementares e somar as quantidades correspondentes.

Como a superfície considerada é contínua, considera-se uma superfície infinitesimal, *dS*, e substitui-se, no limite, a soma por um integral, obtendo-se, desse modo, o fluxo do campo $\vec{v}$ através da superfície *S*, ϕ_S.

$$\phi_S = \iint_S \vec{v} \mid \vec{n}\, dS$$

A noção de fluxo permite deduzir um campo escalar a partir de um campo vectorial.

3.4 Divergência

Suponha-se um ponto qualquer do espaço, *P*, e considere-se uma superfície fechada, *S*, que o contém. Chama-se divergência do campo vectorial no ponto *P* a:

$$div\, \vec{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint_S \vec{v} \mid \vec{n}\, dS}{\Delta V}$$

Por outras palavras, calcula-se o fluxo que sai através da superfície fechada que contém o ponto (o símbolo $\oiint$ significa integração sobre uma superfície fechada) e divide-se pelo volume limitado por essa superfície, *ΔV*. Depois, calcula-se o limite deste quociente quando o volume tende para zero. Isso equivale a considerar o fluxo através de superfícies cada vez mais apertadas englobando o ponto. No limite está-se a calcular o fluxo através de uma superfície que engloba à justa o ponto.

Se este limite, a divergência, for nulo, o ponto é um ponto normal, por onde a água simplesmente passa. Isso significa que a água que entra por um lado da superfície sai pelo outro.

Contudo, se o limite não for nulo, o ponto é divergente do normal, ou seja, tem divergência não nula. Se for positivo, isso significa que está a ser criada água nesse ponto, ou então está a ser introduzida do exterior. Se se pensar no espaço que se está a estudar como uma banheira, o ponto é uma torneira pontual. Se, ao contrário, a divergência for negativa, a água está desaparecer nesse ponto, é um ralo.

Então, a partir do campo vectorial inicial, definiu-se um novo campo escalar e a cada ponto do espaço está associado um escalar, a divergência do campo vectorial.

A divergência pode calcular-se directamente a partir do campo vectorial por uma expressão matemática que se deduz directamente da definição. De facto, exprimindo o campo vectorial em coordenadas cartesianas, vem

$$\vec{v}(x,y,z,t,) = v_x(x,y,z,t,)\,\hat{\imath} + v_y(x,y,z,t,)\,\hat{\jmath} + v_z(x,y,z,t,)\,\hat{k}$$

e

$$div\ \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \mid \vec{v}$$

3.4.1 Teorema de Green-Ostrogradsky

Um teorema muito importante é o teorema de Green-Ostrogradsky:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{v} \mid \vec{n}\ dS = \iiint_V div\ \vec{v}\ dV$$

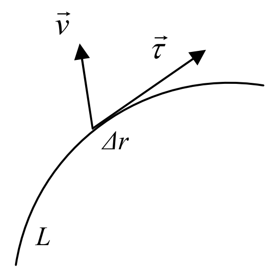
Este teorema é fácil de entender a partir do exemplo da banheira (referido anteriormente, podendo, mesmo, chamá-lo de "teorema das banheiras"); este teorema diz que a água que sai através da superfície *S* que limita a banheira (superfície fechada) é igual à água que entra pelas torneiras menos a que sai pelos ralos. Há que contar a água que entra ou sai, que é exactamente a divergência nesses pontos ou conjunto de pontos, e somar, ou, no limite, integrar, a todo o volume *V*.

Dito em termos mais precisos, o teorema diz que o fluxo de um campo vectorial através de uma superfície fechada é igual ao integral da divergência do campo estendido ao volume limitado pela superfície.

3.5 Circulação de um campo vectorial. Rotacional

Uma outra operação sobre campos vectoriais que será aqui abordada é a de circulação do campo ao longo de uma linha. Esta operação é semelhante ao integral de linha, já abordado.

Suponha-se uma linha *L* e defina-se um comprimento elementar *Δr* sobre a linha. Seja $\vec{\tau}$ o versor tangente à linha. Seja $\vec{v}$ um campo vectorial.

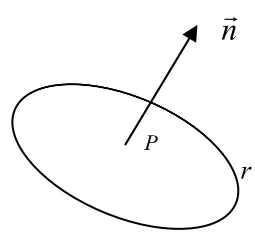


A quantidade $\vec{v}\,|\,\vec{\tau}\;\Delta r$ é obtida projectando $\vec{v}$ na direcção da tangente e multiplicando pelo comprimento Δr. Esta quantidade dá a circulação da água, se $\vec{v}$ for o campo de velocidade da água, ao longo do comprimento Δr. Para calcular a circulação ao longo da linha, haveria que somar estas circulações elementares e, no limite, integrar, obtendo-se

$$C_L = \int_L \vec{v}\,|\,\vec{\tau}\;dr$$

A noção de circulação permite definir, a partir do campo vectorial $\vec{v}$, um novo campo escalar.

Suponha-se um ponto no espaço P e considere-se uma direcção definida por um versor $\vec{n}$. Considere-se uma linha fechada num plano perpendicular a $\vec{n}$, englobando o ponto P.



Define-se como componente de um vector, chamado rotacional do campo $\vec{v}$, segundo $\vec{n}$, como

$$rot\;\vec{v}\,|\,\vec{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{v}\,|\,\vec{\tau}\;dr}{\Delta S}$$

Calcula-se, assim, a circulação do campo ao longo da linha fechada r, divide-se pela área, ΔS, limitada pela linha L e obtendo-se o limite quando ΔS tende para zero. Isso equivale a considerar linhas fechadas cada vez mais ajustadas ao ponto P.

Se o limite for nulo, isto é, se o rotacional não tiver componente segundo a direcção definida por $\vec{n}$, isso significa que não há circulação na linha r. Mas, se for não nulo, no limite, quando a linha se fecha cada vez mais, isso significa que há um vórtice de um redemoinho no ponto que tem componente segundo $\vec{n}$ e provoca rotação da água na linha.

Agora, está-se a associar, a cada ponto, um novo vector e, portanto, a definir um novo campo, o rotacional do campo inicial. Precisamente porque é um vector, vai ter direcção e sentido. Como a divergência pode ser entendida como dando a quantidade de água que entra ou sai, respectivamente numa torneira ou ralo, o rotacional pode ser entendido como uma colher que provoca uma rotação da água em torno de si própria. Naturalmente, tem-lhe associada uma direcção e sentido, a ele e ao vórtice que cria.

O rotacional também se pode calcular directamente a partir do campo vectorial. A partir da definição, deduz-se, para um campo expresso em coordenadas cartesianas

$$rot\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

em que o determinante deve ser desenvolvido segundo a primeira linha, ficando

$$rot\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k}\,.$$

Atendendo à definição de produto vectorial, é imediato constatar que

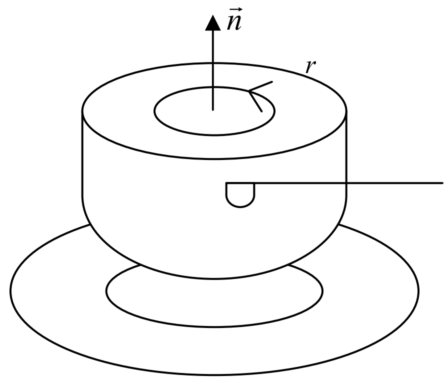
$$rot\ \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$$

3.5.1 Teorema de Stokes

Existe um teorema que relaciona um campo vectorial com o seu rotacional, o teorema de Stokes

$$\oint \vec{v} \mid \vec{\tau}\ dr = \iint_S rot\ \vec{v} \mid \vec{n}\ dS$$

O teorema entende-se bem pensando o que acontece numa chávena de café, sendo, por isso, aceitável chamar-lhe teorema das chávenas de café. Suponha-se, então, que se pretende calcular a circulação do café ao longo do bordo da chávena; quer dizer, o percurso r é o bordo da chávena. Então, tem de se contar as colheres que se metem na chávena. Contudo, nem todas as colheres dão rotação como a que se quer. Se se conseguisse meter uma colher como mostra a figura, em paralelo ao plano do bordo, e do pires, não se conseguia a rotação do café como o pretendido, por mais que se rodasse a colher. Quer isto dizer que tem de se contar as "partes úteis" das colheres, a sua projecção na normal ao bordo da chávena, $rot\ \vec{v} \mid \vec{n}$. Contar significa, no limite, integrar a toda a superfície do bordo. E, assim, se obtém o fluxo de colheres, ou fluxo do rotacional, através da superfície, $\iint_S rot\ \vec{v} \mid \vec{n}\ dS$.



Em termos matemáticos, o teorema diz que a circulação de um campo vectorial ao longo de uma linha fechada é igual ao fluxo do rotacional do campo através da superfície limitada pela linha.

3.6 Determinação de campos vectoriais

Só há duas maneiras de criar um campo vectorial: criando torneiras e/ou ralos, ou introduzindo colheres. Pense-se, por exemplo, numa banheira cheia de água: só há duas maneiras de a pôr em movimento: uma é abrir uma torneira ou um ralo. As partículas de água vão, então, da torneira para o ralo. A outra maneira é introduzindo uma colher e rodando-a; as partículas de água andam, então, à volta da colher em circuito fechado.

Dito de outro modo, só há duas maneiras de criar um campo vectorial. Uma é criar pontos de divergência não nula. Então, as linhas de força do campo (às quais o campo é tangente) vão dos pontos de divergência positiva para os pontos de divergência negativa. Outra forma é criar pontos com rotacional não nulo. Então, as linhas de força do campo são fechadas sobre si. O campo definido apenas por pontos de divergência não nula, chamam-se irrotacionais; os definidos apenas por pontos de rotacional não nulo, chamam-se solenoidais.

Então, dar a divergência e o rotacional do campo vectorial, é caracterizar, completamente, o campo.

3.7 Operações sobre os campos

Dado agora um campo, escalar ou vectorial, vários outros campos podem ser derivados a partir dos campos gradiente, divergência e rotacional.

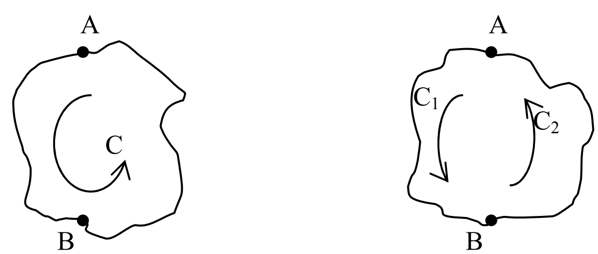
Por exemplo, é fácil mostrar, aplicando as respectivas expressões, que

$$rot\ grad\ F = \vec{0}$$

O teorema das chávenas de café implica, imediatamente, que

$$\oint_C grad\ F \mid \vec{\tau}\ dr = \iint_S rot\ grad\ F \mid \vec{n}\ dS = 0$$

A circulação do gradiente de um campo escalar ao longo de uma linha fechada é sempre nula. Isso implica que a circulação entre dois pontos quaisquer não depende do trajecto.



$$C = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

ou

$$\int_A^B grad\ F\ ds + \int_B^A grad\ F\ ds = 0$$

ou

$$\int_A^B grad\ F\ ds = -\int_B^A grad\ F\ ds$$

Mostra-se, até, que

$$\int_A^B grad\ F\ ds = F_B - F_A$$

Isto é, a circulação do gradiente do campo F do ponto A ao ponto B não depende do trajecto e é igual ao valor do campo F no ponto de chegada menos o valor do campo F no ponto de partida.

Inversamente, se um campo vectorial tem circulação nula num percurso fechado ou, dito de outra forma, é irrotacional, então existe um campo escalar que é gradiente, isto é

$$rot\,\vec{v} = \vec{0}$$

ou

$$\oint_s \vec{v} \mid \vec{\tau}\; ds = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = grad\ F$$

Geralmente não interessa, dado $\vec{v}$, determinar *F*, mas sim o seu simétrico, que tem significado físico:

$$V = -F$$

ficando

$$\vec{v} = -grad\ V$$

A *V* chama-se potencial do campo $\vec{v}$.

Outra operação combinada, com interesse, é

$$div\ grad\ F$$

Atendendo a que

$$gradF = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}$$

e

$$div\ \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

conclui-se, pondo $\vec{v} = grad\ F$, que

$$div\ grad\ F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Chama-se, a este novo campo, laplaciano do campo escalar *F* e, usando o operador nabla, pode escrever-se como

$$lap\ F = \nabla^2 F$$

Uma operação idêntica pode ser definida sobre um campo vectorial; chama-se laplaciano de um campo vectorial $\vec{v}$, um novo campo vectorial, cujas componentes são os laplacianos das componentes do campo inicial. Isto é, se $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$, vem

$$lap\,\vec{v} = \nabla^2\vec{v} = \nabla^2 v_x\,\hat{i} + \nabla^2 v_y\,\hat{j} + \nabla^2 v_z\,\hat{k}$$

com

$$\nabla^2\, v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\, v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\, v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}.$$

3.8 Campo Eléctrico

Considere-se a situação em que há duas cargas em dois pontos quaisquer do espaço, distando de si uma distância *r*. Essas duas cargas vão criar entre si uma força, a força eléctrica, que será de atracção caso as cargas sejam de natureza – sinal – contrária e será de repulsão caso sejam de igual natureza. Essa força será exercida nas duas cargas.

A lei de Coulomb diz que

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\vec{u} = k_e\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\vec{u}$$

em que $\vec{u}$ é o versor[1] da linha recta que une as duas cargas q_1 e q_2, k_e é a constante de Coulomb e vale aproximadamente 9 x 10^9 Nm^2C^{-2}.Caso estejam presentes mais de duas cargas, então a força eléctrica que será exercida em cada carga, será a soma de todas as forças eléctricas criadas por todas as cargas eléctricas.

$$\vec{F}_{e_{total}} = \sum_i \vec{F}_{e_i} = k_e\cdot Q\cdot\sum_i\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

em que *Q* é carga considerada. Se se dividir essa força pelo valor da própria carga, obtém-se a expressão de um campo criado pelas cargas no ponto onde está a carga: o campo eléctrico, que é dado pela equação

[1] Versor ou vector unitário

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q} = k_e \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Como se comprova por esta equação, o campo eléctrico, num dado ponto, não depende da(s) carga(s) aí presente(s), mas sim das outras cargas "vizinhas" desse ponto; o campo eléctrico é um campo exterior à carga.

Devido ao sinal de Q, o campo eléctrico, num dado ponto, pode ser contrário ou não à força eléctrica exercida nessa carga; se a carga for positiva, então a força eléctrica e o campo eléctrico terão o mesmo sentido e a mesma direcção; caso a carga Q seja negativa, então a força eléctrica exercida nessa carga terá a mesma direcção do campo eléctrico nesse ponto, contudo o sentido será o oposto.

Até agora, consideraram-se cargas cujas distâncias entre si são relativamente grandes; acontece que, muitas vezes, as cargas estão muito juntas em comparação com as distâncias aos pontos do campo; nessa situação, o sistema de cargas pode ser considerado contínuo, isto é, assume-se que o sistema de cargas muito juntas seja equivalente a uma carga total distribuída continuamente num certo volume ou numa certa superfície.

Para calcular o campo eléctrico de uma distribuição contínua de cargas, divide-se a carga em pequenos elementos, cada um com uma carga Δq, calcula-se o campo eléctrico criado por essa carga e depois, aplicando o princípio da sobreposição, somam-se todos os campos criados por todas as cargas, resultando

$$\Delta\vec{E} = k_e \cdot \frac{\Delta q}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{E} = k_e \cdot \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = k_e \cdot \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

Na realização destes cálculos é conveniente ter a noção de densidade de carga; caso a carga Q esteja uniformemente distribuída por uma linha de comprimento l, então a densidade de carga por unidade de comprimento, ρ_{Ql}, é dada por

$$\rho_{Ql} = \frac{Q}{l}$$

Caso a carga esteja distribuída uniformemente por uma superfície de área S, então a densidade de carga por unidade de área, ρ_{QS}, é dada por

$$\rho_{QS} = \frac{Q}{S}$$

Por fim, se a carga estiver uniformemente distribuída por um volume V, então a densidade de carga por unidade de volume, $\rho\ QV$, é dada por

$$\rho_{QV} = \frac{Q}{V}$$

Caso a carga não esteja uniformemente distribuída numa linha, superfície ou volume, então as densidades de carga correspondentes são dadas por

$$\rho_{Ql} = \frac{dQ}{dl} \qquad \rho_{QS} = \frac{dQ}{dS} \qquad \rho_{QV} = \frac{dQ}{dV}$$

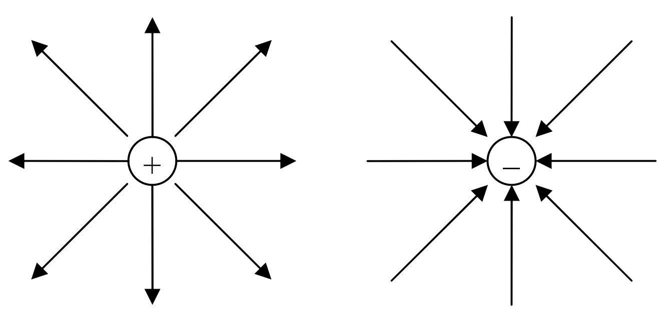
onde dQ é a quantidade de carga num elemento de linha, superfície ou volume.

3.8.1 Linhas do campo eléctrico

Uma forma conveniente de visualizar a configuração de um campo eléctrico consiste em traçar curvas que tenham sempre, em, qualquer ponto, a mesma direcção do vector campo eléctrico. Essas linhas, denominadas **linhas do campo eléctrico**, relacionam-se com o vector campo eléctrico, $\vec{E}$, da seguinte forma:

a) o vector campo eléctrico, $\vec{E}$, é tangente, em cada ponto, à linha do campo eléctrico que passa pelo ponto
b) o número de linhas, por unidade de área, que atravessam uma superfície perpendicular às linhas do campo, é proporcional ao valor do campo eléctrico na região (isto quer dizer que, se $\vec{E}$ tiver módulo grande, as linhas do campo estarão muito juntas e se o módulo for pequeno as linhas estarão mais afastadas).

Se se considerar uma carga, q, então as linhas do campo eléctrico terão o seguinte aspecto:



Esta imagem é uma representação bidimensional; na realidade as linhas serão radiais em todas as direcções.

No caso de q ser positiva, colocando uma carga, q_1, positiva neste campo, esta será repelida pela carga q, pelo que as linhas dirigem-se para fora da carga. No caso de q ser negativa, então a mesma carga positiva, q_1, irá ser atraída pela carga q, pelo que as linhas do campo, neste caso, dirigem-se para a carga.

Em qualquer dos casos, as linhas são radiais e estendem-se até ao infinito.

As regras para traçar as linhas do campo eléctrico são as seguintes:

c) as linhas dirigem-se das cargas positivas para as cargas negativas
d) o número de linhas que sai de uma carga positiva, ou que se aproximam de uma carga negativa, é proporcional ao módulo da carga
e) não há cruzamento das linhas do campo eléctrico.

3.9 Campo Magnético

O fenómeno do magnetismo era conhecido dos gregos, quando estes observaram que certas pedras, actualmente denominadas de *magnetite*, atraíam pedaços de ferro.

O vector campo magnético $\vec{B}$, analogamente ao campo eléctrico e ao campo gravítico, pode ser definido em função da força (de natureza magnética) exercida num corpo de prova. A questão ficará, assim, reduzida a definir qual esse corpo. A unidade do campo magnético é o **Tesla** (T).

Considere-se uma região do espaço em que não existe qualquer campo eléctrico ou gravítico; só existe um campo magnético. As experiências com o movimento de partículas carregadas electricamente, nessas regiões, levaram às seguintes observações:

a) há uma força presente, a força magnética, que é proporcional à carga q e ao módulo da velocidade v da partícula;
b) o módulo e a direcção da força magnética dependem da velocidade da partícula e da direcção e módulo do campo magnético;
c) quando uma partícula se move numa trajectória paralela ao vector campo magnético, a força magnética exercida sobre a partícula é nula;
d) se o vector velocidade fizer um ângulo θ com o vector campo magnético, a força magnética actua numa direcção perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{B}$; por outras palavras, a força magnética é perpendicular ao plano definido por $\vec{v}$ e $\vec{B}$;
e) a força magnética exercida sobre uma carga positiva tem sentido oposto à força magnética exercida sobre uma carga negativa que se mova com o mesmo vector velocidade;
f) se o vector velocidade fizer um ângulo θ com o vector campo magnético, o módulo da força magnética é proporcional a *sen* θ.

Estas observações podem resumir-se na seguinte equação:

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Esta força tem a direcção dada pela direcção de $\vec{v} \times \vec{B}$, que, pela definição de produto vectorial, é perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{B}$; o sentido da força é, assim, dado pela regra da mão direita (ou do saca-rolhas).

Na secção anterior considerou-se que as cargas presentes no campo eléctrico estavam paradas. Contudo, como elas vão estar sujeitas a uma força – a força eléctrica, o mais natural é moverem-se; mesmo que, num dado ponto, a força eléctrica seja nula, se a carga já estiver em movimento, então ela continuará a mover-se. Qual a consequência, se alguma, desse movimento?

É óbvio que, quando num campo eléctrico, a carga se mova e que a sua velocidade seja "influenciada" pelo campo eléctrico. Por outro lado, já se viu que uma carga em movimento, quando em presença de campo magnético, vai "sofrer" os efeitos da existência desse campo. É, assim, natural que a presença simultânea de um campo eléctrico e de um campo magnético, também influencie o seu movimento. Quando tal acontece, existe uma força, a força de Lorenz, que é dada por

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

3.10 Campo electromagnético

3.10.1 Equações de Maxwell

O campo electromagnético é formado por dois campos vectoriais: o campo eléctrico e o campo magnético. São caracterizados definindo as suas torneiras (e ralos) e as suas colheres, isto é, a sua divergência e o seu rotacional. As equações que fazem essas definições são as equações de Maxwell:

$$div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad div\, \vec{B} = 0$$

$$rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad rot\, \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Nestas equações, ρ é a densidade de carga e $\vec{J}$ é a densidade de corrente. Se ρ_m for a densidade de carga móvel e $\vec{v}$ for a velocidade dessa carga,

$$\vec{J} = \rho_m \cdot \vec{v}$$

Por outro lado, a corrente que atravessa uma superfície é o fluxo de densidade de corrente através da superfície:

$$I_S = \iint_S \vec{J} \mid \vec{n}\ dS$$

ε, a permissividade eléctrica e μ, a permeabilidade magnética, são constantes características do meio onde se estudam os campos.

As equações de Maxwell podem, agora, ler-se de forma clara.

De $div\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$, conclui-se, que os pontos de densidade de carga positiva são torneiras do campo eléctrico e os pontos de densidade de carga negativa, os ralos. As cargas são, englobando uma característica do meio – a permissividade eléctrica, ε – as torneiras e os ralos do campo eléctrico.

Mas o campo eléctrico também é criado por colheres. De $rot\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, conclui-se que a derivada em ordem ao tempo do campo magnético é colher do campo eléctrico.

O campo magnético não é criado por torneiras e ralos, pois $div\ \vec{B} = 0$. Não há carga magnética equivalente à carga eléctrica. Mas é criado por colheres. De $rot\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, conclui-se que há dois tipos de colheres: a densidade de corrente e a derivada em ordem ao tempo do campo eléctrico. O campo magnético só é criado por colheres, logo é um campo solenoidal.

É usual definir dois novos campos a partir dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, através das equações

$$\vec{D} = \varepsilon\ \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu\ \vec{H}$$

$\vec{D}$ chama-se deslocamento eléctrico e $\vec{H}$ excitação magnética. Estas duas equações dizem-se equações constitutivas. Uma terceira equação relaciona, nos meios condutores, a densidade de corrente com o campo eléctrico:

$$\vec{J} = \sigma\ \vec{E}$$

em que σ é a condutibilidade do condutor. Esta equação é outra forma de exprimir a lei de Ohm.

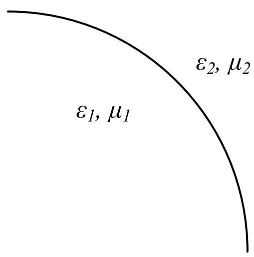
Com estes dois novos campos, as equações de Maxwell podem ser escrever-se:

$$div\ \vec{D} = \rho \qquad\qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad rot\ \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Repare-se que as constantes características da matéria, ε e μ, desapareceram das equações.

Entretanto, temos estado a falar do que se passa num meio caracterizado por uns certos ε e μ. As equações, no entanto, são válidas nas fronteiras entre os meios e delas tiram-se as seguintes equações de fronteira



$$E_{1t} = E_{2t} \qquad H_{1t} = H_{2t}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad B_{1n} = B_{2n}$$

Ou seja, na fronteira de dois materiais, as componentes tangenciais de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são iguais bem como as componentes normais de $\vec{D}$ e $\vec{B}$.

3.10.2 Situações Estacionárias

Uma parte importante do estudo do electromagnetismo é o das situações estacionárias. São as situações em que o comportamento macroscópico não é alterado no tempo. Assim sendo, as derivadas em ordem ao tempo nas equações de Maxwell são nulas, ficando

$$div\ \vec{D} = \rho \qquad\qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = \vec{0} \qquad\qquad rot\ \vec{H} = \vec{J}$$

O campo magnético, agora chamado magnetostático, continua a ser solenoidal e o campo eléctrico, agora chamado electrostático, é agora irrotacional, isto é, só de torneiras e ralos.

O campo eléctrico, agora tendo rotacional nulo, é gradiente de um campo escalar. Tomando o simétrico, como visto atrás, vem

$$\vec{E} = -grad\ V$$

A V chama-se potencial eléctrico ou tensão eléctrica e, tal como visto anteriormente,

$$V_B - V_A = \int_B^A \vec{E} \mid d\vec{s}$$

Os teoremas das “chávenas de café”[1] e das “banheiras”[2] podem aplicar-se aos campos. Aplicando o teorema das banheiras ao campo eléctrico, tem-se

$$\oiint_S \vec{D} \mid \vec{n}\ dS = \iiint_V div\ \vec{D}\ dV = \iiint_V \rho\ dV = Q$$

onde Q é a carga total no volume. Esta é a lei de Gauss, que diz que o fluxo do deslocamento eléctrico através de uma superfície fechada é igual à carga total no volume definido pela superfície.

Aplicando ao campo magnético, conclui-se que

$$\oiint_S \vec{B} \mid \vec{n}\ dS = \iiint_V div\ \vec{B}\ dV = 0$$

Aplicando o teorema das chávenas de café ao campo eléctrico, obtém-se

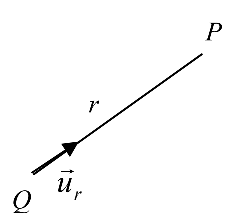
$$\oint_s \vec{E} \mid \vec{\tau}\ ds = \iint_S rot\ \vec{E} \mid \vec{n}\ dS = 0$$

O mesmo teorema aplicado ao campo magnético resulta em

$$\oint_s \vec{H} \mid \vec{\tau}\ ds = \iint_S rot\ \vec{H} \mid \vec{n}\ dS = \iint_S \vec{J} \mid \vec{n}\ dS = I_s$$

em que I é a corrente total que atravessa a superfície limitada pela linha. Esta é a lei de Ampère que diz que a circulação do campo excitação magnética ao longo de uma superfície fechada é igual à corrente que atravessa a superfície limitada pela curva.

Das equações de Maxwell é possível retirar as expressões dos campos criados por uma carga pontual:

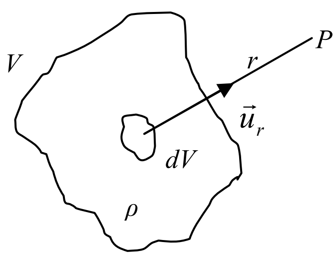


[1] Teorema de Stokes.
[2] Teorema de Green-Ostrogradsky.

Para o campo eléctrico resulta

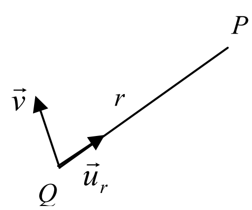
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Se se tiver um volume carregado com densidade ρ, então o campo criado pelo volume é o integral dos campos criados por cargas elementares $\rho\ dV$.



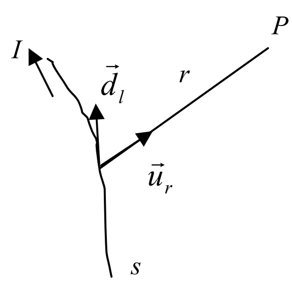
$$\vec{E} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\rho}{r^2} dV\ \vec{u}_r$$

O campo magnético só é criado por cargas em movimento.



$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot Q \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Daqui pode passar-se para o campo criado por uma corrente num circuito



$$\vec{B} = \int_s \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\vec{dl} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Esta expressão para o campo $\vec{B}$ é a lei de Biot-Savart.

É possível determinar as forças que estes campos vectoriais criam.

A força provocada pelo campo eléctrico sobre uma carga q é

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

O campo magnético só actua sobre outra carga q se ela tiver uma velocidade $\vec{v}$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Este capítulo já tinha sido abordado anteriormente, mas aqui fez-se uma abordagem mais analítica do que tinha sido então descrito.

3.10.3 Situação Geral

A situação geral é mais complexa, embora muitos dos resultados anteriores sejam ainda válidos. As equações de Maxwell nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são, então,

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad\qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad rot\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Uma forma de abordar o problema é a seguinte: pegue-se na equação

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Aplique-se o rotacional aos dois membros da equação

$$rot\ rot\ \vec{E} = rot\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Isto não foi tratado aquando do tratamento de operações múltiplas, mas é fácil mostrar, a partir das respectivas expressões, que

$$rot\ rot\ \vec{E} = grad\ div\ \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

Por outro lado, o lado direito da igualdade pode escrever-se como

$$rot\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} rot\ \vec{B}$$

A equação fica, então

$$grad\ div\ \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\ \vec{B}$$

Substituindo das equações de $div\,\vec{E}$ e $rot\,\vec{B}$, pelas obtidas nas equações de Maxwell, vem

$$grad\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\cdot\vec{J}+\varepsilon\cdot\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

que pode ser escrito na forma

$$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\cdot\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon}grad\ \rho+\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

Aplicando o operador rotacional à equação que define $rot\,\vec{B}$, encontra-se

$$\nabla^2\vec{B}-\varepsilon\cdot\mu\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=-\mu\cdot rot\,\vec{J}$$

Estas duas equações governam o comportamento dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e representam as equações de radiação e propagação dos campos eléctrico e magnético.

Agora não se irá tratá-las com esta generalidade, embora isso seja feito mais tarde. Estas são equações que regem desde o comportamento de circuitos com correntes variáveis no tempo até aos campos electromagnéticos que a partir de aí se projectam no espaço e que constituem, como se verá, ondas electromagnéticas. Para já, vai ser abordado o problema da propagação destes campos no espaço longe dos circuitos que os criaram, não sendo abordado, portanto, o problema da radiação e das antenas.

3.10.4 Propagação de ondas electromagnéticas no vazio

As equações ficam, então, uma vez que no vazio não há cargas ou densidades de correntes ($\rho=0$ e $\vec{J}=\vec{0}$),

$$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\cdot\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\vec{B}-\varepsilon\cdot\mu\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

É fácil ver como é que os campos se propagam. De facto, as equações de Maxwell ficam, na ausência de cargas ou correntes na forma

$$div\ \vec{E} = 0 \qquad\qquad div\ \vec{B} = 0$$

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad rot\ \vec{B} = \varepsilon \cdot \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Os dois campos são, agora, ambos solenoidais. A propagação dos campos dá-se porque a derivada em ordem ao tempo de cada um vai sendo a "colher" do outro.