

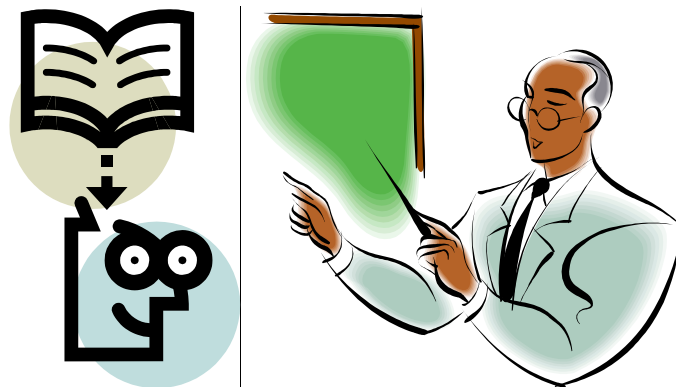


INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E DE GESTÃO

ONDAS

2004 / 05

Exercícios teórico-práticos



FILIPE SANTOS MOREIRA



Índice

ÍNDICE	I
DERIVADAS E INTEGRAIS	1
MOVIMENTOS HARMÓNICOS E ONDAS	4
CAMPOS VECTORIAIS E ESCALARES	7
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.....	11
TRANSMISSÃO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EM MEIOS COM PERDAS E EM MEIOS CONDUTORES.....	13
FIBRAS ÓPTICAS	14



Derivadas e integrais

1. Calcule as derivadas parciais, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, das funções:

a) $z = \frac{x^2}{y}$.

b) $z = \text{sen}(x \cdot y)$.

c) $z = 3e^x - 2e^y + x^2 y^3$.

d) $z = x^2 y + \text{sen } x + x \cdot \cos y$.

e) $z = y \cdot x \cdot e^x$.

f) $z = x^2 \cdot \text{sen}(x \cdot y)$.

2. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, das funções:

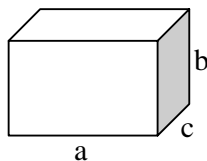
a) $z = 3x \cdot y^3 - 2x \cdot y + \sin x$.

b) $z = 3x^2 + y^2 + e^{x \cdot y}$.

3. Calcule as derivadas parciais, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ e $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$, do vector:

$$\vec{v} = 3x^2 y \hat{i} + 2x \cdot y \cdot z \hat{j} - 3x^4 y^2 \hat{k}.$$

4. Considere o seguinte paralelepípedo:



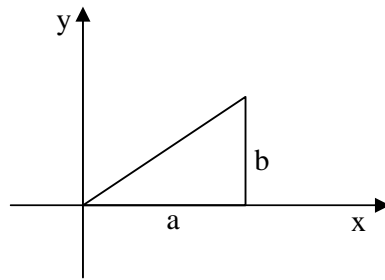
a) Calcule o volume do paralelepípedo usando o integral triplo. (Sugestão: partir do volume elementar).

b) Calcular a massa sabendo que a massa específica é:

$$\rho = x \cdot y^2 \cdot z^3.$$



5. Considere o triângulo da figura seguinte:



Calcule a área do triângulo usando um integral duplo.

6. Calcule os seguintes integrais:

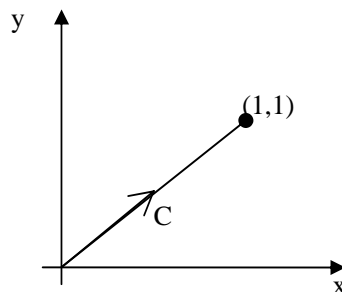
a) $\int_0^2 \int_1^4 (x + 2y) dx dy$.

b) $\int_0^1 \int_0^{2-2y} (4x + 5) dx dy$.

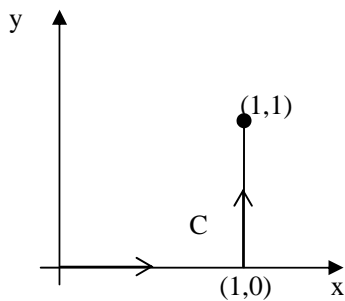
c) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) dx dy dz$.

7. Calcule os seguintes integrais para as curvas representadas:

a) $\int_C 5y^2 dx + 2x \cdot y dy$



b) $\int_C 5y^2 dx + 2x \cdot y dy$



8. Considere o campo $\vec{F} = (3x^2 + y)\hat{i} + (5x - y)\hat{j}$ e a curva definida pela equação $y = 2x^2$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ para o arco da curva entre os pontos A (2,8) e B (3,18).



Movimentos harmônicos e Ondas

9. Um bloco, com massa 680 g, está preso a uma determinada mola, cuja constante de elasticidade é 65 N m^{-1} . O bloco é puxado à distância $x = 11 \text{ cm}$ da sua posição de equilíbrio (em $x = 0$), numa superfície sem atrito e libertado a partir do repouso no instante $t = 0 \text{ s}$.
- Qual a força que a mola exerce sobre o bloco, imediatamente antes de este ser libertado?
 - Qual a frequência angular, a frequência e o período da oscilação resultante?
 - Qual a amplitude da oscilação?
 - Qual o módulo da velocidade máxima do bloco?
 - Qual o módulo da aceleração máxima do bloco?
 - Qual a fase inicial do movimento?
 - Qual a energia mecânica do sistema?
 - Qual a energia potencial e a energia cinética deste oscilador, quando a partícula está a meio do caminho do extremo de oscilação?
10. No instante inicial ($t = 0$), o deslocamento de um bloco preso a uma mola presa na outra extremidade é de $-8,5 \text{ cm}$, a sua velocidade é de $-0,92 \text{ ms}^{-1}$ e a sua aceleração vale 42 ms^{-2} .
- Qual a frequência angular e a frequência do sistema?
 - Qual a fase inicial e a amplitude do movimento?
11. Um condensador de $1,5 \mu\text{F}$ é carregado a 57 V . No instante inicial remove-se a bateria e liga-se aos terminais do condensador uma bobina de 12 mH .
- Qual é a corrente máxima que percorre a bobina?
 - Determinar a expressão da tensão aos terminais da bobina, em função do tempo.
 - Qual a taxa de variação máxima da corrente?
12. Uma onda sinusoidal propaga-se ao longo de uma corda em vibração presa nas suas extremidades, sendo descrita pela equação:
- $$y(x,t) = 0,00327 \text{ sen}(72,1 x - 2,72 t) \text{ (m)}$$
- Qual a amplitude desta onda?
 - Qual o comprimento de onda, o período e a velocidade escalar desta onda?
 - Qual o deslocamento, a velocidade e a aceleração da onda no instante $t = 18,9 \text{ s}$ e na posição $x = 22,5 \text{ cm}$?



13. Uma onda sinusoidal propaga-se ao longo de uma corda em vibração presa nas suas extremidades, sendo descrita pela equação:

$$y = 2,0 \cdot \text{sen} \left[2\pi \left(\frac{t}{0,4} + \frac{x}{80} \right) \right],$$

em que x e y se encontram expressos em cm e t em segundos.

- Trace o gráfico de y em função de x no instante inicial, para $0 \leq x \leq 160$ (cm).
 - Repita a alínea anterior para $t = 0,05$ s e para $t = 0,10$ s.
 - Dos gráficos obtidos anteriormente, qual é a velocidade de propagação da onda e em que sentido a onda se propaga?
14. Qual é a velocidade escalar de uma onda transversal numa corda de comprimento 2,0 m e massa de 60,0 g, sob uma tensão de 500N?
15. A velocidade escalar de uma onda numa corda é $170 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ quando a tensão é 120 N. para que valor se deve aumentar a tensão, para subir a velocidade da onda para $180 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$?

16. Considere a função $f = F \cdot \cos(\omega t - \beta x)$.

Demonstre que esta função satisfaz a equação de onda e determine a sua velocidade de propagação v .

17. Considere as seguintes funções:

- $f = (x + vt)^3$.
- $f = A \cdot e^{jk(x-vt)}$.
- $f = \ln(x - vt)$.
- $f = A \cdot \text{sen}(kx) \cdot \cos(\omega t)$.

Verifique que todas estas funções satisfazem a equação de onda.

18. Verifique se as seguintes equações satisfazem a equação de onda e, em caso afirmativo, determine as respectivas velocidades de propagação:

- $f = (k^2 \cdot x - \gamma \cdot t^2)^4$.
- $f = \cos(\omega t + \omega^4 \cdot \varphi) \cdot \text{sen}(kx - k\theta^2)$.

19. Verifique se as seguintes equações satisfazem a equação de onda e, em caso afirmativo, determine as respectivas velocidades de propagação:



a) $f = (kx - \gamma t)^3$.

b) $f = \cos(\omega t + \phi) \cdot \text{sen}(kx - \theta)$.

20. Considere a função

$$f(x, t) = Ae^{\beta x - t}$$

a) Mostre que esta função satisfaz a equação de onda.

b) Qual é a velocidade de propagação?

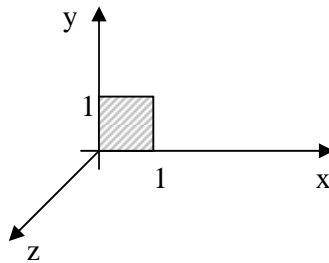


Campos vectoriais e escalares

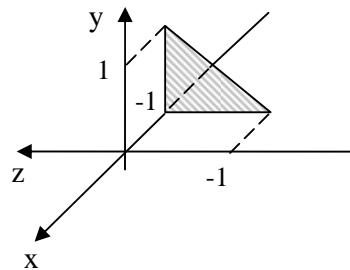
21. Considere o campo vectorial definido do seguinte modo:

$$\vec{V} = (x \cdot y)\hat{i} + z\hat{j} + y\hat{k}.$$

a) Calcule o fluxo que atravessa o quadrado da figura seguinte:

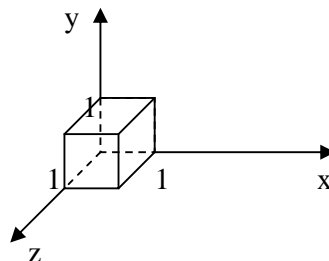


b) Calcule o fluxo que atravessa o triângulo, paralelo ao plano yz, da figura seguinte:



22. Considere o campo vectorial \vec{V} definido no problema anterior.

- a) Calcule a divergência ($\text{div } \vec{V}$) desse campo.
- b) Considere agora um cubo como se mostra na figura seguinte. Mostre que o fluxo dentro desse cubo é igual ao integral da divergência em todo o volume (por outras palavras, aplique o teorema de Green-Ostrogradsky).





23. Calcule o rotacional de cada um dos seguintes vectores.

a) $\vec{v} = (\sin z; y/x; z \cdot \cos x)$.

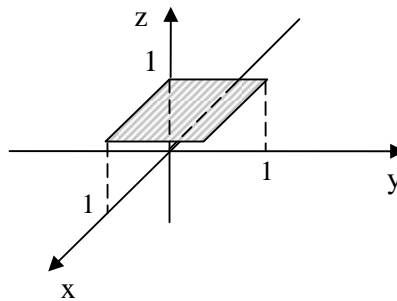
b) $\vec{v} = (\cos y; z \cdot x; y \cdot \sin y)$.

c) $v = (y^2; \sin y; z \cdot \cos y)$.

24. Considere o campo vectorial

$$\vec{v} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}.$$

- a) Determine o fluxo do campo através de um quadrado de lado 1 assente no plano paralelo ao plano xy com $z=1$. O quadrado, como mostra a figura, tem um vértice no eixo dos zz e dois dos lados assentes nos planos coordenados, respectivamente xz e yz .

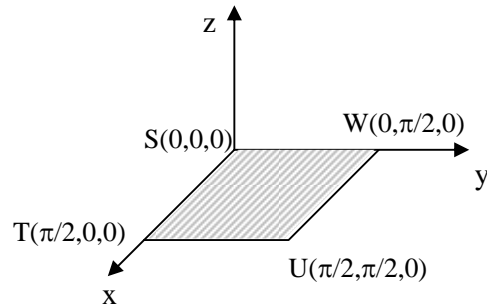


- b) Calcule o rotacional e a divergência do campo.

25. Considere o campo vectorial

$$\vec{v} = \sin x\hat{i} + \cos x\hat{j} + z\hat{k}.$$

- a) Calcule a circulação do campo ao longo do segmento de recta que vai do ponto $S(0, 0, 0)$ até ao ponto $T(\pi/2, 0, 0)$.
- b) Calcule a circulação ao longo do percurso fechado da figura.

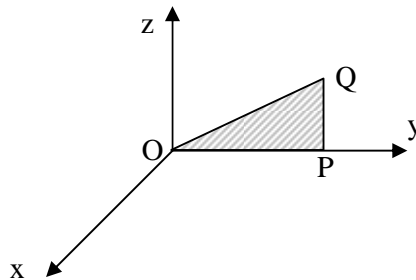


Sugestão: utilize o teorema de Stokes.

26. Considere o campo escalar

$$f = x \cdot y \cdot z.$$

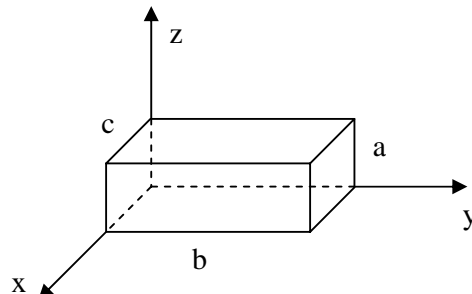
- Calcule o gradiente do campo escalar f .
- Calcule o fluxo do gradiente do campo escalar f , no sentido positivo do eixo dos xx , que atravessa o triângulo de vértices $O (0,0,0)$, $P (0,2,0)$ e $Q (0,2,1)$ representado na figura.



27. Considere o seguinte campo:

$$\vec{V} = 2y \cdot z \hat{i} + 2x \cdot z \hat{j} + z^2 \hat{k}$$

- Calcule o fluxo deste campo que atravessa o paralelepípedo da figura de lados $a=1$, $b=3$ e $c=2$.
Sugestão: utilize o teorema de Green-Ostrogradsky.





b) Calcule o rotacional e a divergência do campo.

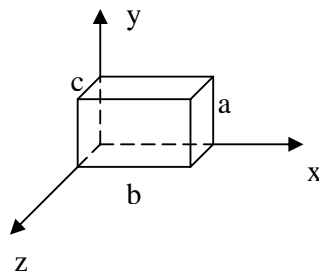
28. Considere o seguinte campo:

$$\vec{V} = \frac{z^2}{6} \hat{i} + \frac{z^2}{2} \hat{j} + \left(\frac{x \cdot z}{3} + y \cdot z + z^2 \right) \hat{k}.$$

a) Calcule o rotacional e a divergência do campo.

b) Calcule o fluxo deste campo que atravessa o paralelepípedo da figura de lados $a=1$, $b=3$ e $c=2$.

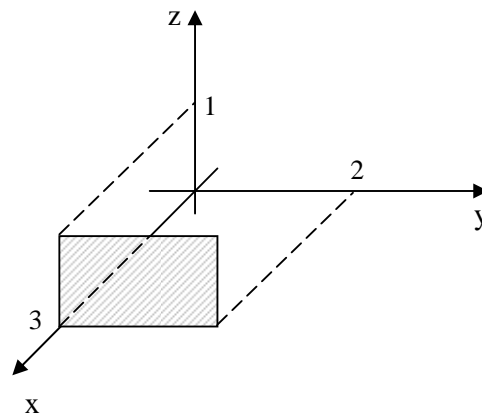
Sugestão: utilize o teorema de Green-Ostrogradsky.



29. Considere o seguinte campo:

$$v = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}.$$

a) Determine o fluxo do campo através de um retângulo de lados 1 e 2 assente no plano paralelo ao plano yz com $x=3$, como mostra a figura. O quadrado, como mostra a figura, tem um vértice no eixo dos zz e dois dos lados assentes nos planos coordenados, respectivamente xz e yz .



b) Calcule o rotacional e a divergência do campo.



Ondas Electromagnéticas

30. As equações de onda dos campos eléctrico e magnético, na direcção segundo o eixo dos xx , são, como se sabe:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Uma solução destas equações é a onda plana monocromática

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_0 \cos(kx - \omega t)$$

- Determine a velocidade de propagação das ondas em função de μ e de ϵ .
- Mostre que a velocidade é

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

31. Sabe-se que uma onda electromagnética se propaga no vazio e está definida pela seguinte equação:

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx + \phi).$$

- Sabendo que a frequência da onda é 50 Hz, determine o comprimento de onda da mesma.
 - Sabendo que a onda é inicializada para $t=0$, $x=0$ com o valor E nulo e com a primeira derivada $\frac{\partial E}{\partial t} = 100 \text{ Vm}^{-1}\text{s}^{-1}$, determine qual o valor de E_0 e qual o valor da fase inicial ϕ .
32. Calcule o comprimento de onda para uma onda AM com 1000 kHz e para uma onda FM com 100MHz.
33. A parte visível do espectro electromagnético está compreendida entre os comprimentos de onda $4 \times 10^{-7} \text{ m}$ (violeta) e $7 \times 10^{-7} \text{ m}$ (vermelho). Determine as frequências limite dessa parte do espectro.
34. Calcule a frequência para:



- a) Uma onda com comprimento de onda de 3 cm.
 - b) Uma onda tipo raio X com comprimento de onda de 0,1 nm.
- 35.** A frequência da luz emitida por uma lâmpada incandescente é de $0,25 \times 10^{15}$ Hz. Sabendo que a potência, isto é, a energia emitida por segundo, da lâmpada é de 200 W, qual é o número de fótons emitidos por unidade de tempo?



Transmissão de ondas Electromagnéticas em meios com perdas e em meios condutores

36. Qual é a perda, por quilómetro, de uma onda plana propagando-se em terra seca? A onda tem uma frequência de 1 MHz e, a esta frequência, a condutividade da terra seca é de $\sigma=10^{-5}$ S/m e a constante dielétrica é 3.
37. Calcular a perda por quilómetro de uma onda plana propagando-se em água destilada com uma frequência de 25 GHz, sabendo que o factor de dissipação e a constante dielétrica ϵ_r a esta frequência são, respectivamente, 0,3 e 34.
38. Qual é a velocidade de uma onda EM com frequência $f=10^4$ Hz, após penetrar no mar? ($\epsilon_r=81$; $\sigma=4$ S/m).
39. Qual é a velocidade de uma onda EM com frequência $f=60$ Hz, após penetrar em cobre? ($\sigma=5,8 \times 10^7$ S/m).



Fibras ópticas

40. Uma fibra óptica tem um factor de atenuação, $\alpha(\lambda)$, de 0,5 dB/km na 3ª janela centrada nos 1550 nm. Dispõe-se de um emissor com uma potência óptica de 10mW.
- Calcular a distância para a qual a potência óptica se reduz a 1 mW.
 - Se agora se operar na 2ª janela, centrada nos 1330 nm, determinar a potência recebida à mesma distância, sabendo que, neste comprimento de onda, o factor de atenuação, $\alpha(\lambda)$, vale 0,75 dB/km.
41. Dispõe-se de uma fibra óptica com largura de banda 5 Gbps x km e um factor de atenuação de 0,5 dB/km. A potência óptica na emissão vale $P_e = 10$ mW e pretende-se uma potência óptica na recepção de valor $P_r = 1$ mW. Todavia, o *link* deve ter comprimento de 100 km e deve operar a um débito binário de 100 Mbps.
- Determinar o número mínimo de repetidores a introduzir no *link*.
 - Se não se impusesse como condição uma potência óptica de 1 mW na recepção, qual seria, então, a potência óptica recebida, sem a intercalação dos repetidores no *link*?
42. Dispõe-se de uma fibra óptica com uma largura de banda de 10 Gbps x km. Qual a distância máxima de uma ligação ponto a ponto, sem ser necessário introduzir qualquer amplificador óptico, sabendo que nessa ligação o débito binário deve ser 100 Mbps?
43. Uma fibra óptica apresenta um factor de atenuação de 0,5 dB/km e uma largura de banda de 15 Gbps x km. Dispõe-se de um emissor óptico em que no acoplamento entre o emissor e a fibra há uma perda de 6 dB. Determinar a distância para a qual a potência óptica se reduz a 1/16 da potência óptica emitida pelo emissor, sabendo que a um terço e a dois terços da distância total se tem um conector que introduz perdas de 1,5 dB.
44. Uma fibra óptica apresenta um factor de atenuação de 0,1 dB/km e uma largura de banda de 30 Gbps x km. Tem-se um emissor óptico com 1 mW de potência nominal e que no acoplamento entre o emissor e a fibra óptica há uma perda de 3 dB. Determinar a distância para a qual a potência óptica se reduz a 1/4 da potência óptica emitida pelo emissor, bem como o débito máximo, sabendo que o receptor óptico se introduz no ponto determinado anteriormente.
45. Uma fibra óptica apresenta um factor de atenuação de 0,5 dB/km e uma largura de banda de 15 Gbps x km. Tem-se um emissor óptico em que, no acoplamento entre o emissor e a fibra óptica, há uma perda de 3 dB. Determinar a distância para a qual a potência óptica se reduz a 1/8 da potência óptica emitida pelo emissor, sabendo que a meia distância tem-se um *Splice* que introduz perdas no valor de 3 dB.