



Instituto politécnico de Bragança
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Engenharia Informática

Física II

1º Ano – 2º Semestre

1. Cálculo vectorial

1.1. Introdução

A análise vectorial é um assunto do âmbito da matemática e não propriamente da Engenharia. No entanto, é quase impossível estudar Electrostática e Magnetismo sem usar cálculo vectorial. As simplificações introduzidas na realização dos cálculos e na compreensão dos resultados justificam a sua utilização.

1.2. Escalares e vectores

É conveniente começar por fazer uma distinção clara entre escalar e vector. O termo escalar refere-se a uma grandeza, cujo valor pode ser representado por um único número. Por exemplo, as variáveis x , y e z são escalares, tal como as grandezas que elas representam. Se falarmos de um corpo que cai a uma distância L do ponto de referência, no instante t , podemos dizer que L e t são escalares.

Outros exemplos bastante comuns de grandezas escalares são a massa, a pressão, o volume, a resistividade, etc.

Uma grandeza vectorial tem sempre associada uma intensidade, uma direcção e um sentido no espaço. Estamos a referir-nos a espaços bi e tridimensionais, mas um vector pode ser definido em espaços n -dimensionais em aplicações mais avançadas. Grandezas como força, velocidade e aceleração são exemplos bastante comuns de grandezas vectoriais.

Podemos constatar, desde já, que um vector tem concentrada mais informação do que um escalar e que as operações aritméticas realizadas com vectores são mais complexas do que as realizadas com escalares.

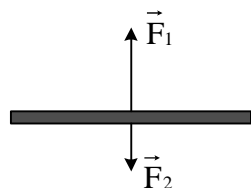
No contexto desta disciplina, iremos falar frequentemente em campos escalares e vectoriais, relativos a grandezas que podem ser definidas por escalares e vectores, respectivamente.



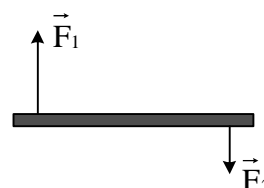
1.3. Operações elementares realizadas com vectores

Quando nos referimos a operações elementares realizadas com vectores, estamos a referir-nos à adição vectorial, subtracção de vectores, multiplicação e divisão por um escalar. O produto de vectores é uma operação mais complexa, que será tratada posteriormente.

É, ainda, de salientar que só se podem realizar operações com vectores, se eles tiverem o mesmo ponto de aplicação. Se num mesmo corpo estiverem a ser aplicadas duas forças com o mesmo ponto de aplicação, a força resultante exercida sobre o corpo será a soma das duas. Se os pontos de aplicação forem diferentes a força resultante já não será a soma das duas e diz-se que o corpo está sujeito a um momento de forças.



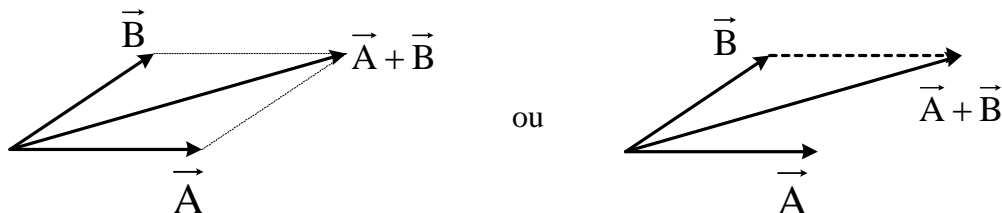
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



$$\vec{F}_R \neq \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

1.3.1. Adição vectorial

A adição vectorial segue a regra do paralelogramo.



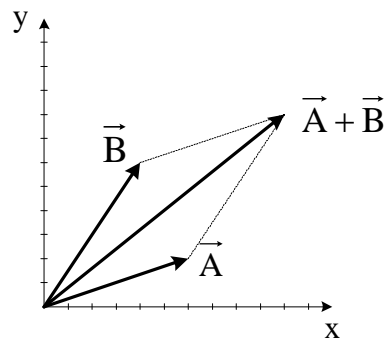
É fácil verificar graficamente que $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$, ou seja, que a adição vectorial goza da propriedade comutativa.

A adição vectorial também obedece à propriedade associativa:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}.$$



Vectorios coplanares, ou seja, vectorios pertencentes a um plano comum, podem também ser somados, expressando-se cada vectorio em termos da componente vertical e horizontal e somando-se as componentes correspondentes.



$$\vec{A} = 3\hat{i} + 1\hat{j}$$

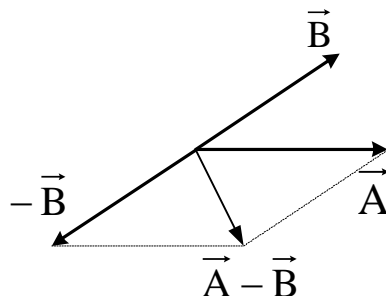
$$\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 1\hat{j} + 2\hat{i} + 3\hat{j} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$$

Os vectorios definidos no espaço tridimensional podem, da mesma forma, serem somados, expressando-se os vectorios em termos das três componentes e somando-se as componentes correspondentes.

1.3.2. Subtração de vectorios

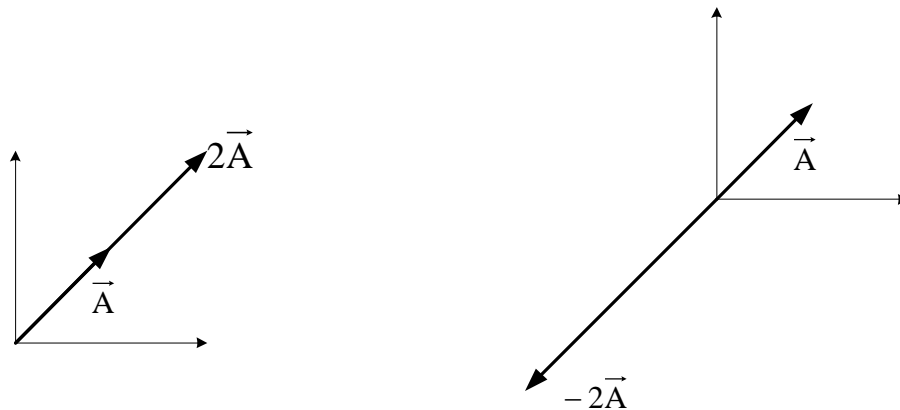
A regra da subtração de vectorios segue a regra da adição, pois podemos sempre expressar $\vec{A} - \vec{B}$ como $\vec{A} + (-\vec{B})$. Inverter o sinal do segundo vectorio implica inverter-lhe o sentido, sendo este adicionado ao primeiro pela regra da adição normal.



1.3.3. Multiplicação escalar



Todos os vectores podem ser multiplicados por escalares. O módulo do vector varia, mas o sentido continua o mesmo se o escalar for positivo. No caso do escalar ser negativo, o módulo do vector varia e o seu sentido é invertido.



A multiplicação de um vector por um escalar também obedece às propriedades comutativa, associativa e distributiva.

$$(r + s) \times (\vec{A} + \vec{B}) = r \times (\vec{A} + \vec{B}) + s \times (\vec{A} + \vec{B}) = r \times \vec{A} + r \times \vec{B} + s \times \vec{A} + s \times \vec{B}$$

1.3.4. Divisão de um vector por um escalar

A divisão de um vector por um escalar é simplesmente realizada a partir da multiplicação pelo inverso do escalar.

Dois vectores são iguais se a sua diferença for zero: $\vec{A} = \vec{B}$ se $\vec{A} - \vec{B} = 0$.

1.3.5. Produto de vectores

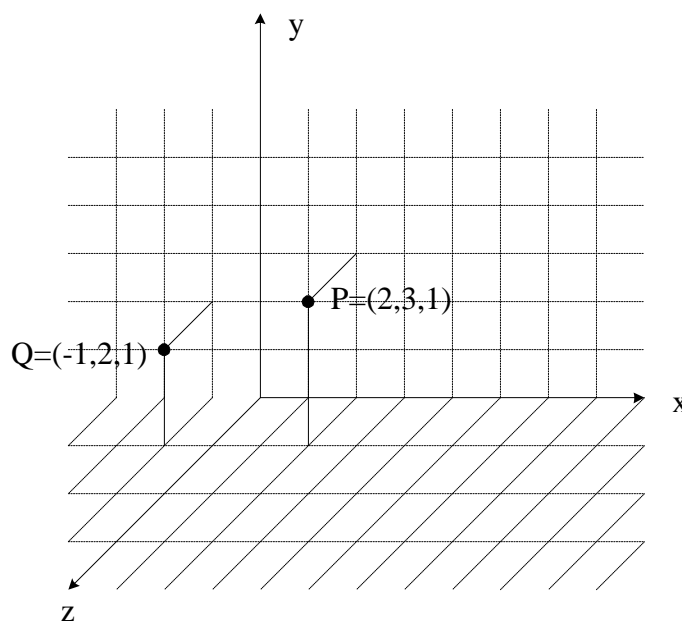
A operação correspondente ao produto de dois vectores é mais complicada do que as outras operações e do que o produto entre escalares. Por isso, é conveniente introduzir mais alguns conceitos, nomeadamente os sistemas de coordenadas. O mais utilizado é o sistema de coordenadas cartesianas do qual iremos falar a seguir.



1.4. Sistema de coordenadas cartesianas

Para descrever um vector, necessitamos de conhecer o seu módulo, a sua direcção e sentido, ângulos, projecções ou componentes e expressar tudo isto num sistema de eixos. O mais simples é o sistema de coordenadas cartesianas ou rectangulares, constituído pelos eixos x , y e z que fazem entre si ângulos de 90° .

Um ponto é localizado pelas coordenadas x , y e z . Estas são, respectivamente, as distâncias da origem à intersecção de uma projecção do ponto nos eixos x , y e z . Um método alternativo de interpretação dos valores das coordenadas é o de considerar o ponto como sendo a intersecção de três planos, dados por $x = \text{constante}$, $y = \text{constante}$ e $z = \text{constante}$, sendo as constantes o valor das coordenadas no ponto.

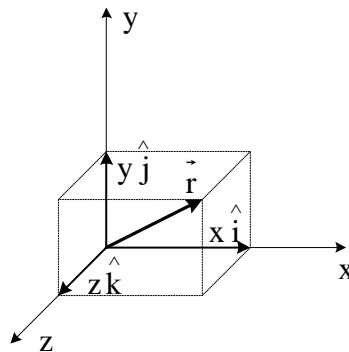


A figura anterior mostra os pontos P e Q , cujas coordenadas são $P=(2,3,1)$ e $Q=(-1,2,1)$, respectivamente. O ponto P está localizado no ponto comum da intersecção dos planos $x=2$, $y=3$ e $z=1$, enquanto que o ponto Q está localizado na intersecção dos planos $x=-1$; $y=2$ e $z=1$.

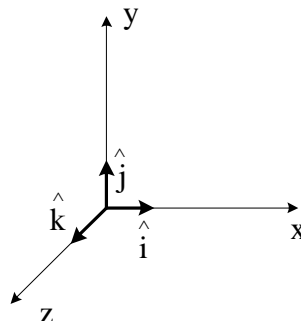
1.5. Componentes de vector e vectores unitários ou versores



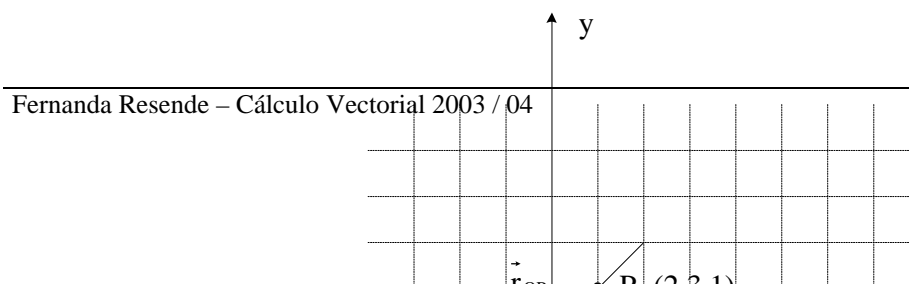
Para descrever um vector num sistema de coordenadas cartesianas, consideremos um vector \vec{r} que parte da origem. Um modo lógico de identificar este vector é fornecer as suas três componentes vectoriais, relativas aos três eixos coordenados. Se as componentes do vector \vec{r} são x , y e z , então $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Podemos assim expressar o vector em termos das suas três componentes.



Cada uma das componentes tem um módulo que depende do vector dado, mas cada uma tem uma direcção e sentido conhecidos e fixos. Isto sugere o uso de vectores unitários ou versores, dirigidos ao longo dos eixos coordenados, no sentido crescente dos mesmos. Assim, um vector unitário será, por exemplo, o vector $\vec{a} = 1\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}$.



Podemos também dizer que os pontos P e Q se posicionam relativamente à origem dos eixos coordenados através dos vectores \vec{r}_P e \vec{r}_Q .





Instituto politécnico de Bragança
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Engenharia Informática

Física II

1º Ano – 2º Semestre

Assim o vector \vec{r}_P , dirigido da origem para o ponto $P=(2,3,1)$ pode ser obtido da seguinte forma:

$$\vec{r}_P = (2, 3, 1) - (0, 0, 0) = (2, 3, 1) = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k}$$

O vector \vec{r}_Q pode ser obtido da mesma forma;

$$\vec{r}_Q = (-1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 2, 1) = -1\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k}$$

Por sua vez, o vector \vec{r}_{PQ} pode ser obtido através da regra da adição vectorial. Assim o vector que liga a origem ao ponto P, somado ao vector que liga o ponto P ao ponto Q é igual ao vector que liga a origem ao ponto Q. Assim o vector \vec{r}_{PQ} é dado por:

$$\vec{r}_{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \left(-1\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k}\right) - \left(2\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k}\right) = -3\hat{i} - 1\hat{j} + 0\hat{k}$$

O vector \vec{r}_{PQ} não parte da origem dos eixos coordenados. Contudo, já verificamos que vectores com o mesmo módulo e apontando com a mesma direcção e sentido são iguais, de modo que, para melhor visualizarmos o processo, deslocamos o vector para a origem antes de determinar as suas componentes.



Se estivermos a estudar um vector força, \vec{F} , podemos escrevê-lo através das suas componentes escalares, $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$. O módulo ou intensidade do vector \vec{F} , $\|\vec{F}\|$ ou simplesmente F é dado por: $\|\vec{F}\| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Cada um dos sistemas de coordenadas tem os seus vectores unitários mutuamente perpendiculares que vão servir para analisar qualquer vector em termos das suas componentes. Contudo, vectores unitários não estão limitados a esta aplicação. Frequentemente é útil escrever um vector unitário com uma direcção e sentido específicos. Tal é simples, uma vez que um vector unitário que aponta com uma dada direcção e sentido pode ser obtido dividindo o vector pelo seu módulo.

Assim, o vector unitário ou versor do vector \vec{F} , é $\hat{u}_F = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$.

1.6. Produto escalar entre vectores

Estamos a considerar inicialmente o primeiro de dois tipos de multiplicação vectorial, chamado produto escalar ou produto interno entre dois vectores. Assim, dados dois vectores \vec{A} e \vec{B} , o produto interno é definido como sendo o módulo de \vec{A} pelo módulo de \vec{B} e pelo coseno do menor ângulo entre os dois.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \cos \theta_{AB} \quad \text{ou} \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A \times B \times \cos \theta_{AB}$$

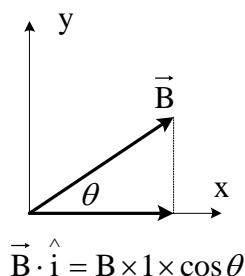
A partir da definição de produto interno ou produto escalar, representado por um ponto, entre dois vectores podemos dizer que o seu resultado é um escalar e que obedece à propriedade comutativa, pois o sinal do ângulo não afecta a função cos, que é uma função par. Assim, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.



Se estivermos a trabalhar no espaço tridimensional, não é muito fácil determinar com frequência o ângulo entre dois vectores e, por essa razão, a definição de produto escalar não é utilizada na sua forma mais básica. É mais fácil obter o resultado considerando-se os dois vectores cujas componentes cartesianas sejam $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ e $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$. O produto escalar entre \vec{A} e \vec{B} é então dado através da expressão seguinte, que não envolve ângulos.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

O termo geométrico projecção é também utilizado como produto escalar. Assim, por exemplo, $\vec{B} \cdot \hat{i} = B \cos \theta$ não é mais do que a projecção do vector \vec{B} segundo o eixo dos xx.



$$\vec{B} \cdot \hat{i} = B \times 1 \times \cos \theta$$

1.7. Produto vectorial

Dados dois vectores \vec{A} e \vec{B} , designamos produto vectorial de \vec{A} por \vec{B} a expressão $\vec{A} \wedge \vec{B}$. O resultado do produto vectorial é um vector, cujo módulo é o produto dos dois vectores pelo seno do menor ângulo entre eles. A direcção é perpendicular ao plano definido pelos vectores \vec{A} e \vec{B} e o sentido é dado pela regra da mão direita ou do “parafuso” ou ainda do “saca rolhas”.

Em forma de equação podemos escrever:



Instituto politécnico de Bragança
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Engenharia Informática

Física II

1º Ano – 2º Semestre

$\vec{A} \wedge \vec{B} = A \times B \times \text{sen} \theta \hat{u}_n$, em que \hat{u}_n designa um versor perpendicular (normal) ao plano definido pelos vectores \vec{A} e \vec{B} .

O cálculo do produto vectorial através da definição exige mais trabalho que o cálculo do produto escalar, pois é necessário saber o ângulo entre os vectores e o versor que dá a direcção e o sentido do resultado do produto vectorial. Assim podemos resolver o produto vectorial entre dois vectores através de um determinante, de acordo com o apresentado a seguir:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$