ADIÇÃO

- **Soma de dois números**

  Dados dois conjuntos, A e B, finitos e disjuntos, a soma dos seus cardinais é igual ao cardinal da sua reunião. Simbolicamente,

$$\#A + \#B = \#(A \cup B) \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

- **Adição como aplicação**

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$(a, b) \mapsto a + b$

$\forall_{a,\, b\, \in\, \mathbb{N}}\, \exists'_{c\, \in\, \mathbb{N}} : c = a + b$

- **Propriedades da adição em $\mathbb{N}_0$**

✡ *Comutatividade*

$$a + b = b + a \,,\ \forall_{a,\, b\, \in}\, \mathbb{N}_0$$

✡ *Associatividade*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \,,\ \forall_{a,\, b,\, c\, \in}\, \mathbb{N}_0$$

✡ *Existência de elemento neutro*

$$a + 0 = 0 + a = a \,,\ \forall_{a\, \in}\, \mathbb{N}_0$$

- **Adição iterada**

Seja n um número natural diferente de 1.

Chama-se **soma de *n* números** $a_1 , a_2 , ..., a_n$ ao número que se obtém adicionando o primeiro com o segundo, adicionando o resultado com o terceiro, e assim sucessivamente, até chegar ao último. A soma dos n números dados – chamados parcelas, representa-se pela notação $a_1 + a_2 + ... + a_n$, ou ainda pela notação mais condensada $\sum_{k=1}^{n} a_k$ - lê-se somatório de a_k de 1 a n.

Para $n = 2$, vem

$$a_1 + a_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k$$

Para n = 3, vem

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k$$

Para n = 4, vem

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{k=1}^{4} a_k$$

Define-se **soma de um único número** como sendo esse mesmo número. Simbolicamente,

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

ou

$$\sum_{k=2}^{2} a_k = a_2$$

A comutatividade e a associatividade estendem-se à adição iterada, ou seja,

✡ *Comutatividade generalizada* a soma de vários números não se altera quando se muda a ordem das parcelas.

✡ *Associatividade generalizada* a soma de vários números não se altera quando se substituem duas das mais parcelas pela sua soma.

- **Relação de grandeza entre números**

Diz-se que o número de elementos de um conjunto A é **menor** que o número de elementos de um conjunto B, quando A é equipotente a uma parte de B, mas não é equipotente a B.

✡ A inclusão estrita entre conjuntos finitos A e B (não vazios) dá lugar à relação de grandeza, expressa pelo sinal < , entre números naturais. Simbolicamente,

$$A \subset B \wedge A \neq B \Rightarrow \#A < \#B$$

✡A relação ≤ entre números traduz a relação ⊂ entre conjuntos. Simbolicamente,

$$A \subset B \Rightarrow \#A \leq \#B$$

- **Adição e relação de grandeza**

✍ **Proposição 1 –** A soma de dois números naturais é sempre maior que qualquer desses números. Simbolicamente,

$$a < a + x\ ,\ \forall_{a,\, x\, \in\, \mathbb{N}}$$

✍ **Proposição 2 –** Dados dois números naturais, a e b, tais que, $a < b$, existe sempre um número natural x tal que $a + x = b$. Simbolicamente,

$$\forall_{a,\, b\, \in\, \mathbb{N}} : a < b \Rightarrow \exists_{x\, \in\, \mathbb{N}} : a + x = b$$

✍ A conjunção das proposições 1 e 2 pode enunciar-se como:

$$a < b \Leftrightarrow \exists_x\ ,\ a + x = b$$

✍ A adição é uma operação monótona, i.e., adicionando o mesmo número a ambos os membros duma relação de grandeza, a relação mantém-se. Simbolicamente,

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c\ ,\ \forall_{a,\, b,\, c\, \in\, \mathbb{N}}$$

✍ **Propriedade da redução** ou **propriedade do corte**

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b\ ,\ \forall_{a,\, b,\, c\, \in\, \mathbb{N}}$$

✍ Dados dois números, a, $b \in \mathbb{N}$, não pode existir mais de um $x \in \mathbb{N}$ tal que $a + x = b$. Simbolicamente,

$$a + x = b \wedge a + y = b \Rightarrow x = y$$