

Instruções:

- É permitida a consulta bibliográfica.
- Os cálculos deverão ser efectuados recorrendo ao software Octave ou Matlab.
- Os cálculos devem ser efectuados com o máximo de precisão possível.
- Apresente os resultados dos cálculos com uma precisão de pelo menos 4 dígitos significativos.
- Os computadores só poderão ser ligados à *Internet* no final do exame com a permissão do docente.

I - Parte teórica (Duração: 30 min, cotação: 5 valores).

1. Indique a razão pela qual é necessário conhecer o valor da função y em um instante t_0 para que a solução da EDO $y' = f(t, y)$ seja única.
2. Porque razão os métodos implícitos são mais eficientes do que os explícitos na resolução de equações diferenciais?
3. Proponha resumidamente uma estratégia para a resolução numérica de uma EDP do tipo parabólica.
4. Que vantagens apresentam os métodos iterativos comparativamente com os métodos directos na resolução de sistemas de equações algébricas lineares resultantes da aplicação do método das diferenças finitas à resolução de EDPs?

II - Parte prática (duração: 1 h e 30 min, cotação: 15 valores)

1. Considere o problema de valor inicial correspondente a uma massa suspensa numa mola com amortecimento. A equação da distancia à origem é

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

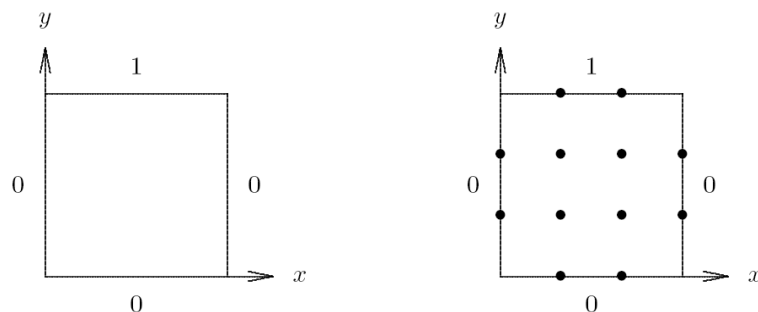
e as condições iniciais são $y(0) = 1$ e $y'(0) = -5$.

- (a) Escreva este problema na forma de um sistema de EDOs de primeira ordem.
- (b) Classifique este problema em relação à estabilidade da sua solução.
- (c) Determine $y(t)$, a posição da massa, para $0 \leq t \leq 1$ usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo $h = 0.2$ (o programa Matlab/Octave usado para obter a solução deverá ser entregue ou enviado por e-mail ao docente).
- (d) Analise graficamente a posição da massa em função do tempo e indique aproximadamente o momento a partir do qual a posição da massa estabiliza (o programa Matlab/Octave usado para obter o gráfico deverá ser entregue ou enviado por e-mail ao docente).

2. Considere a resolução por diferenças finitas da equação de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = x + y$$

num quadrado unitário com as condições de fronteira abaixo indicadas.



- Obtenha o sistema de equações algébricas lineares correspondente à malha usada para discretizar o domínio (lado direito da figura).
- Calcule os valores aproximados da variável independente u nos pontos interiores do domínio.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2} (x_1^2 - x_2)^2 + \frac{1}{2} (1 - x_1)^2.$$

- Qual o valor mínimo desta função?
- Efectue duas iterações do método do Newton para aproximar o ponto onde a função é mínima. Use como aproximação inicial o ponto $\mathbf{x}_0 = [2 \ -2]^T$. Apresente todos os cálculos efectuados (se optar por efectuar um programa em Octave/Matlab deverá entregá-lo ou enviá-lo por e-mail ao docente).