

2º Ano de Engenharia Civil, Química e Gestão Industrial

Métodos Numéricos - 2º semestre 2007/2008

Propostas de Trabalho

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

1. Elabore um relatório com as respostas a cada uma das seguintes solicitações sobre a resolução de sistemas de equações lineares pelo método do Gradiente Conjugado:

- (a) Pesquise informações sobre o método iterativo do Gradiente Conjugado (CG) para a resolução de sistemas de equações lineares. Elabore uma breve descrição deste método referindo o seu funcionamento, algoritmo, propriedades, convergência, etc... Não transcreva textos, resuma por palavras suas a informação que achar mais importante e que é capaz de compreender e indique qual foi a bibliografia consultada.
- (b) Considere o programa de geração aleatória de matrizes incluído no ficheiro **matgen.m**. Analise este programa e insira comentários no ficheiro indicando o significado de cada instrução.
- (c) Use o programa para gerar uma matriz A e caracterize-a quanto à dimensão, simetria, normas, elementos não nulos (veja os significados dos comandos **norm**, **nnz** e **spy**).
- (d) Edite o programa de maneira a gerar quatro matrizes diferentes correspondentes a **tol**= 0.01, **tol**= 0.05, **tol**= 0.1 e **tol**= 0.2. Analise o condicionamento de cada uma destas matrizes com recurso ao comando **condtest**.
- (e) Gere aleatoriamente um vector b e resolva cada um dos sistemas $Ax = b$, correspondentes às quatro matrizes geradas na alínea anterior, com o método do gradiente conjugado. Considere como critério de paragem o resíduo relativo

$$\frac{\|r_k\|_2}{\|b\|_2} \leq 10^{-8}.$$

Para cada sistema efectue um gráfico, em escala logarítmica (veja o comando **semilogy**), com a evolução do resíduo relativo ao longo das vinte primeiras iterações do CG.

- (f) Efectue uma análise dos resultados obtidos nas alíneas anteriores. Sintetize as suas principais observações sobre os resultados obtidos e tente relacioná-las com as propriedades dos sistemas a resolver e as propriedades do CG.

2. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 21.00 & 67.00 & 88.00 & 73.00 \\ 76.00 & 63.00 & 7.00 & 20.00 \\ 0.00 & 85.00 & 56.00 & 54.00 \\ 19.30 & 43.00 & 30.20 & 29.40 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 141.0 \\ 109.0 \\ 218.0 \\ 93.7 \end{bmatrix}.$$

Elabore um relatório com as respostas a cada uma das seguintes solicitações:

- (a) Caracterize a matriz A quanto à simetria, normas e condicionamento (veja os significados dos comandos `norm` e `condtest` no Octave).
- (b) Efectue a resolução deste sistema através de um dos métodos directos estudados. Justifique a escolha do método utilizado.
- (c) Resolva o sistema através do método de Gauss-Seidel de forma a obter

$$\frac{\|x_{k+1} - x_k\|_2}{\|x_{k+1}\|_2} \leq 10^{-3}.$$

Comente os resultados obtidos.

- (d) Permute as equações do sistema de forma a reforçar o peso dos elementos sobre a diagonal (utiliza a matriz de permutação obtida na factorização LU) e refaça novamente o que é pedido na alínea anterior. Comente os resultados obtidos.
- (e) Calcule o resíduo e faça uma estimativa do erro relativo

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$$

associado à solução obtida na alínea anterior.

- (f) Considere o método iterativo estacionário SOR. Faça alguma pesquisa sobre este método de maneira a caracterizá-lo e indique qual a decomposição ($A = M - N$) efectuada por este método.
- (g) Resolva novamente o sistema permutado através do método SOR de forma a obter

$$\frac{\|x_{k+1} - x_k\|_2}{\|x_{k+1}\|_2} \leq 10^{-3}.$$

Faça varias tentativas de forma a encontrar o valor do parâmetro de relaxação ω que minimiza o numero total de iterações. Para algumas das tentativas da alínea anterior efectue um gráfico (veja o comando `plot`) com a evolução do erro ao longo das vinte primeiras iterações e comente os resultados obtidos.

Observações: Poderá encontrar documentação assim como a implementação dos métodos iterativos em <http://www.netlib.org/templates/>.