

Capítulo 4 - Equações Não-Lineares

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

2º Ano - Eng. Civil, Química e Gestão Industrial



Outline

- 1 Equações Não-Lineares
 - Equações Não-Lineares
 - Soluções e Sensibilidade
 - Convergência
- 2 Métodos Numéricos para uma Dimensão
 - Método da Bissecção
 - Método de Newton-Raphson
- 3 Sistemas de Equações Não-Lineares
 - Método de Newton

Equações Não-Lineares

- Dada uma função f , procuramos x , tal que

$$f(x) = 0$$

- Solução x é **raiz** da equação, ou **zero** da função f
- Pelo que o problema é conhecido como **encontrar a raiz** da equação ou **encontrar o zero** da função

Equações Não-Lineares

Dois casos importantes

- Equação não-linear única sobre uma única incógnita, em que

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Solução é o escalar x para o qual $f(x) = 0$

- Sistema de n equações simultâneas em n incógnitas, em que

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Solução é o vector x para o qual todas as componentes de f são nulas simultaneamente, $f(x) = 0$

Existência e Unicidade da Solução

- Existência e unicidade da solução são mais difíceis de averiguar para equações não-lineares em comparação com as equações lineares
- Se f é contínua e $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, então o Teorema do Valor Médio implica que exista $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$
- Não existe um resultado análogo tão simples para o caso de n dimensões

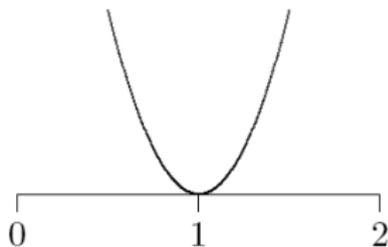
Exemplos: Uma Dimensão

Equações não-lineares podem ter um numero variado de soluções

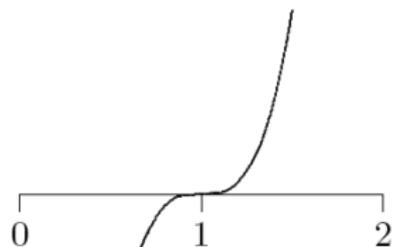
- $\exp(x) + 1 = 0$ não tem solução
- $\exp(-x) - x = 0$ tem uma solução
- $x^2 - 4 \sin(x) = 0$ tem duas solução
- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ tem três solução
- $\sin(x) = 0$ tem infinitas solução

Multiplicidade

- Se $f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$ mas $f^{(m)}(x^*) \neq 0$, então a raiz x tem **multiplicidade** m



$$x^2 - 2x + 1$$



$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

- Se $m = 1$ ($f(x^*) = 0$ e $f'(x^*) \neq 0$), então x^* é uma raiz **simples**

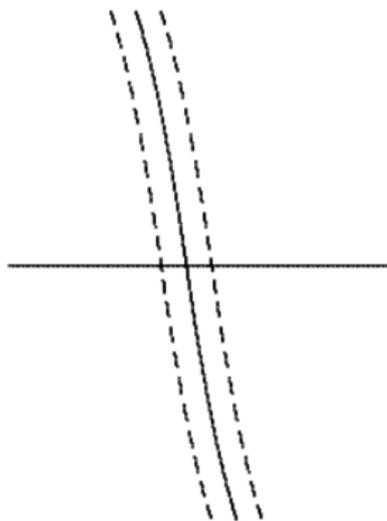
Sensibilidade e Condicionamento

- Numero de condição do problema de cálculo da raízes x^* de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é $1/|f'(x^*)|$
- Raiz é mal condicionada se a linha tangente for aproximadamente horizontal
- Em particular, raízes múltiplas ($m > 1$) são mal condicionadas
- Numero de condição do problema de cálculo da raízes x^* de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é $\|J_f^{-1}(x^*)\|$, com J_f a matriz Jacobiana de f ,

$$\{J_f(x)\}_{ij} = \partial f_i(x)/\partial x_j$$

- Raiz mal condicionada se a matriz Jacobiana for aproximadamente singular

Sensibilidade e Condicionamento



Bem Condicionado



Mal Condicionado

Sensibilidade e Condicionamento

- Que entendemos por solução aproximada de um sistema não-linear,

$$\|f(\hat{x})\| \approx 0 \quad \text{ou} \quad \|\hat{x} - x^*\| \approx 0?$$

- Primeira medida corresponde a um “resíduo pequeno”, segunda mede a proximidade em relação à (geralmente desconhecida) solução verdadeira x^*
- Critérios de solução não são necessariamente pequenos em simultâneo
- Resíduo pequeno implica solução exacta apenas se o problema for bem condicionado

Taxa de Convergência, continuação

- Para um método iterativo genérico, define-se o erro na iteração k por

$$e_k = x_k - x^*$$

em que x_k é a solução aproximada e x^* a solução verdadeira

- Para métodos que mantêm o intervalo onde se situa a solução conhecido, em vez de se utilizar uma aproximação específica à solução verdadeira, considera-se que o erro é igual ao comprimento do intervalo que contém a solução
- Sequência dos erros converge com uma taxa r se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^r} = C$$

para alguma constante finita e não-nula C

Taxa de Convergência, continuação

Alguns casos particulares com interesse

- $r = 1$: **linear** ($C < 1$)
- $r > 1$: **superlinear**
- $r = 2$: **quadrática**

Taxa de convergência	Dígitos ganhos por iteração
linear	constante
superlinear	aumenta
quadrática	duplica

Método da Bissecção

- Método da **bissecção** consiste em dividir sucessivamente a meio o intervalo onde está situada a raiz até que a solução seja isolada com a correcção pretendida

ALGORITMO: MÉTODO DA BISSECÇÃO

```
Input:  $a$  e  $b$  tal que  $x^* \in [a, b]$   
Output:  $\hat{x}$  (solução aproximada)  
while  $((b - a) > tol)$   
     $m = (a + b) / 2$   
    se  $f(a) * f(b) > 0$   
         $a = m$   
    else  
         $b = m$   
    end  
end
```

Exemplo: Método da Bissecção

- Aproxime, com uma exactidão de duas casas decimais ($tol \leq 0.5e - 2$), a raiz da equação

$$f(x) = x^2 - 4 \sin(x) = 0$$

sabendo que $x^* \in [1, 3]$

- Verificamos que $f(1) = -2.365884$ e que $f(3) = 8.435520$

k	a	b	m	$f(m)$	Δ_x
0	1	3	2	0.362810	
1	1	2	1.5	-1.739980	
2	1.5	2	1.75	-0.873444	
3	1.75	2	1.875	-0.300718	
4	1.875	2	1.9375	0.019849	
5	1.875	1.9375	1.906250	-0.143255	0.125
6	1.906250	1.9375	1.929688	-0.143255	0.0625
7	1.921875	1.9375	1.929688	-0.021454	0.0313
7	1.929688	1.9375	1.933594	-0.000846	0.0156
8	1.933594	1.9375	1.935547	0.009491	0.0079
9	1.933594	1.935547			0.0040 < tol

Método da Bissecção, continuação

- Método da bissecção converge de certeza, mas é lento
- Em cada iteração o comprimento do intervalo contendo a solução é reduzido a metade, taxa de convergência é **linear**, com $r = 1$ e $C = 0.5$
- Dado um intervalo de partida $[a, b]$, o comprimento do intervalo depois de k iterações é $(b - a) / 2^k$, pelo que a redução do erro abaixo de certo valor tol implica que

$$k \leq \log_2 \left(\frac{b - a}{tol} \right)$$

independentemente da função f envolvida

Método de Newton-Raphson

- Desenvolvimento de uma função em Série de Taylor

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots$$

- Truncando a série de Taylor a partir do termo de primeira ordem

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

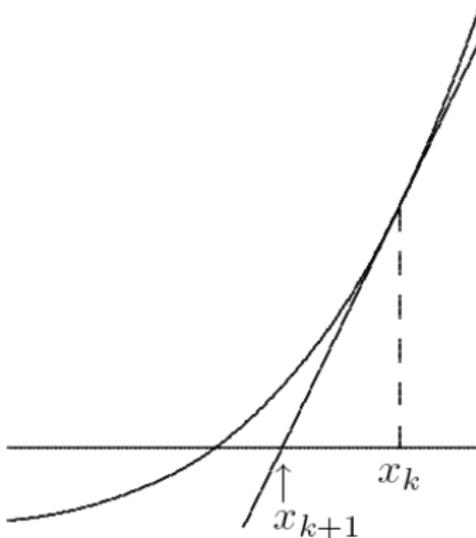
obtemos uma função linear em h que aproxima f em torno de x

- Substituindo a função não-linear pela função linear, cujo zero é $h = -f(x)/f'(x)$, obtemos uma aproximação do zero de f
- Como os zeros das duas funções não são exactamente os mesmo repete-se este processo sucessivamente, originando o método de **Newton-Raphson**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método de Newton-Raphson, continuação

- Método de Newton-Raphson aproxima a função não-linear f , na vizinhança de x_k , pela **recta tangente** em $f(x)$



Exemplo: Método de Newton-Raphson

- Aproximar com uma exactidão de duas casas decimais ($tol \leq 0.5e - 2$) a raiz da equação

$$f(x) = x^2 - 4 \sin(x) = 0$$

sabendo que $x^* \in [1, 3]$

- Derivada é

$$f'(x) = 2x - 4 \cos(x)$$

pelo que o esquema iterativo é

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4 \sin(x_k)}{2x_k - 4 \cos(x_k)}$$

Escolhendo $x_0 = 3$ como valor de partida, obtemos

k	x	$f(x)$	$f'(x)$	h	Δ_x
0	3.000000	8.435520	9.959970	-0.846942	
1	2.153058	1.294772	6.505771	-0.199019	0.846942
2	1.954039	0.108438	5.403795	-0.020067	0.199019
3	1.933972	0.001152	5.288919	-0.000218	0.020067
4	1.933754				0.000218 < tol

Convergência do Método de Newton-Raphson

- Para raízes simples ($f(x^*) = 0$ e $f'(x^*) \neq 0$) a convergência do método de Newton-Raphson é **quadrática** ($r = 2$)
- Mas as iterações tem de ser iniciadas suficientemente próximas da raiz para convergir
- No caso de raízes múltiplas, a convergência é apenas linear, com constante $C = 1 - (1/m)$, em que m é multiplicidade da raiz

k	$f(x) = x^2 - 1$	$f(x) = x^2 - 2x + 1$
0	2.0	2.0
1	1.25	1.5
2	1.025	1.25
3	1.0003	1.125
4	1.00000005	1.0625
5	1.0	1.03125

Sistemas de Equações Não-Lineares

Resolução de sistemas de equações não-lineares é mais difícil do que resolver uma única equação porque

- Existe uma maior variedade de comportamento, pelo que a determinação da existência e do número de soluções ou uma boa estimativa inicial é muito mais complicado
- Em geral, não existe uma maneira simples de garantir a convergência para a solução pretendida ou simplesmente de a localizar a solução
- Número de cálculos a efectuar cresce rapidamente com a dimensão do problema

Método de Newton

- Para n dimensões, o **método de Newton** tem a forma

$$x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1} f(x_k)$$

em que $J(x_k)$ é a matriz Jacobiana de f

$$\{J(x)\}_{ij} = \partial f_i(x) / \partial x_j$$

- Na prática, não se inverte explicitamente a matriz $J(x_k)$, em vez disso resolve-se o sistema linear

$$J(x_k) \delta_k = -f(x_k)$$

em ordem ao passo δ_k e definimos a nova iteração como

$$x_{k+1} = x_k + \delta_k$$

Exemplo: Método de Newton

- Aproximar a solução do sistema não-linear

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

efectuando duas iterações do método de Newton

- Matriz Jacobiana é

$$J_f(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$$

- PRIMEIRA ITERAÇÃO: Escolhendo $x_0 = [1 \ 2]^T$ como aproximação inicial obtemos

$$f(x_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad J_f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Exemplo, continuação

- Resolução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \delta_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

origina $\delta_0 = \begin{bmatrix} -1.83 \\ -0.58 \end{bmatrix}$, pelo que $x_1 = x_0 + \delta_0 = \begin{bmatrix} -0.83 \\ 1.42 \end{bmatrix}$

- SEGUNDA ITERAÇÃO: Recalculando para um novo ponto

$$f(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.72 \end{bmatrix}, \quad J_f(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1.67 & 11.3 \end{bmatrix}$$

- Resolução do sistema linear $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1.67 & 11.3 \end{bmatrix} \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.72 \end{bmatrix}$
obtemos $\delta_1 = [0.64 \quad -0.32]^T$, pelo que
 $x_2 = x_1 + \delta_1 = [-0.19 \quad 1.10]^T$ (continuando a iterar iríamos aproximar-nos de $x^* = [0 \quad 1]^T$)

Critério de paragem

- Na prática, os dois critérios de paragem mais usuais são:
 - Erro:** impondo que uma certa aproximação do erro absoluto seja inferior a um valor tolerado

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\delta_k\| < tol$$

ou então impondo o mesmo critério ao erro relativo aproximado

$$\frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_{k+1}\|} = \frac{\|\delta_k\|}{\|x_{k+1}\|} < tol$$

- Resíduo:** em vez de obter uma aproximação do erro, verifica-se a proximidade de zero da norma da função

$$\|f(x_{k+1})\| < tol$$

sabendo que este critério é um bom indicador da proximidade da solução apenas quando o problema é bem condicionado