Capítulo 7 - Equações Diferenciais Ordinárias

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

2º Ano - Eng. Civil, Química e Gestão Industrial

Outline

Equações Diferenciais

- Equações diferenciais envolvem derivadas de uma função desconhecida
- *Equação Diferencial Ordinária*(EDO): todas as derivadas são relativas a uma única variável independente, por vezes representando o tempo
- Solução numérica de equações diferencias é baseada numa aproximação de dimensão finita
- Equação Diferencial é substituída por uma equação algébrica cuja solução aproxima a solução da equação diferencial

Ordem de uma EDO

- Ordem de uma EDO é determinada pela ordem da mais alta derivada da função solução que ocorre na EDO
- Exemplos

  $y'' + 3y' + 6y = \sin(t)$ é de ordem 2

  $y'' + 3yy' = e^t$ é de ordem 2

  $(y')^3 + 6y = -1$ é de ordem 1
- EDO de ordem superior pode ser transformada num sistema equivalente de equações de primeira ordem
- Analisaremos apenas métodos numéricos para EDOs de primeira ordem
- Grande parte do software para EDOs foi desenhado apenas para a resolução de EDOs de primeira ordem

Problemas de Valor Inicial

- Por si só a EDO $y' = f(t, y)$ não determina uma função solução única
- Isto porque a EDO apenas especifica o declive $y'(t)$ da função solução em cada ponto, mas não especifica o valor de $y(t)$ para algum ponto
- Em geral, existe uma infinidade de funções que satisfazem a ODE.
- Para obter uma solução particular, o valor y_0 da função solução tem de ser conhecido para algum ponto t_0

Problemas de Valor Inicial (continuação)

- É necessário que os dados do problema indiquem $y(t_0) = y_0$, o que determina a solução única da EDO
- Se considerarmos a variável independente t como o tempo, podemos pensar em t_0 como o tempo inicial e em y_0 como o valor inicial da função incógnita
- Por isso, é designado por *Problema de Valor Inicial*, ou *PVI*
- A EDO governa a evolução do sistema ao longo do tempo desde o seu estado inicial y_0 no tempo t_0, e nós procuramos uma função $y(t)$ que descreve o estado do sistema em função do tempo

Exemplo: Problema de Valor Inicial

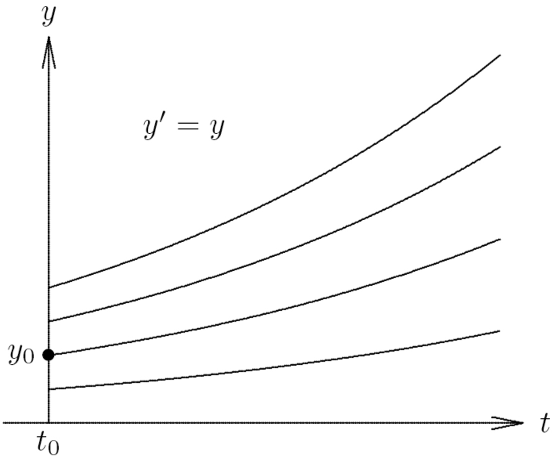
- Considere a seguinte EDO escalar

$$y' = y$$

- O conjunto das soluções tem a forma geral $y = ce^t$, em que c é uma constante real qualquer
- Impondo a condição inicial $y(t_0) = y_0$ permite obter a solução única correspondente a este caso particular
- Para este exemplo, se $t_0 = 0$, então $c = y_0$, significando que a solução é $y(t) = y_0 e^t$

Exemplo: Problema de Valor Inicial

Família das soluções para a EDO $y' = y$



Solução Numérica de EDOs

- Solução analítica (nem sempre existe) de EDO é uma função bem definida que pode ser avaliada para qualquer valor de t
- Solução numérica de EDO é uma tabela de valores aproximados da função solução para num conjunto discretos de pontos
- Começando em t_0 com o valor dado y_0, procuramos seguimos ditada pela EDO
- Calculo de $f(t_0, y_0)$ indica o declive da trajectória nesse ponto
- Usamos esta informação para prever o valor y_1 da solução no tempo futuro $t_1 = t_0 + h$ para um determinado incremento de tempo h

Método de Euler

- Sistema genérico de EDOs $f(t, y)$, consideramos a série de Taylor

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \dots \\ &= y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \dots \end{aligned}$$

- Método de Euler consiste em eliminar os termos de ordem maior ou igual a dois

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$$

- Método de Euler prevê solução através da extrapolação ao longo de uma linha recta cujo declive é $f(t_k, y_k)$
- Método de Euler é de passo-simples porque depende apenas da informação num único ponto do tempo para avançar para o próximo

Exemplo: Método de Euler

- Considere o seguinte problema

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad \text{com} \quad y(0) = -1$$

cuja solução analítica é dada por $y(x) = -3e^{-x} - 2x + 2$. Vamos aproximar a função $y(x)$ solução desta equação para os valores de x compreendidos ente 0 e 0.5 utilizando o método de Euler com passo $h = 0.1$

x_k	y_k	y'_k	hy'_k	$y_{k,exact}$
0.0	-1.0000	1.0000	0.1000	-1.0000
0.1	-0.9000	0.7000	0.0700	-0.9145
0.2	-0.8300	0.4300	0.0430	-0.8562
0.3	-0.7870	0.1870	0.0187	-0.8225
0.4	-0.7683	-0.0317	-0.0032	-0.8110
0.5	-0.7715			-0.8196

Erros na solução numérica de EDOs

- Métodos numéricos para resolver EDOs incorrem em dois tipos de erros distintos
  - Erros de arredondamento devidos à precisão finita da aritmética de ponto flutuante
  - Erros de truncatura (discretização) devidos aos métodos de aproximação usados e que permaneceriam mesmo que se usasse uma aritmética exacta
- Na prática os erros de truncatura são o factor dominante e determinam a exactidão da solução numérica de uma EDO
- Cada passo do método de Euler implica um erro (local) $\mathcal{O}\left(h^2\right)$
- Erro total (ou global) inerente à solução obtida é $\mathcal{O}\left(h\right)$ (método de Euler é de primeira ordem)

Método de Euler Modificado

- Ordem de exactidão superior pode ser obtida fazendo a média dos declives obtidos no início e no fim do intervalo $[t_k, t_{k+1}]$, originando o método de Euler modificado

$$y_{k+1} = y_k + h_k \left(f\left(t_k, y_k\right) + f\left(t_{k+1}, y_{k+1}\right)\right)/2$$

- Como é necessário fazer uma previsão do valor de y_{k+1} antes de este ser determinado, este método é conhecido como um método de previsão correcção
  1. Previsão: $y_{k+1,p} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$
  2. Correcção: $y_{k+1,c} = y_k + h_k \left(f\left(t_k, y_k\right) + f\left(t_{k+1}, y_{k+1,p}\right)\right)/2$
- Método de Euler modificado é de segunda ordem de exactidão (erro global é de $\mathcal{O}(h^2)$)

Exemplo: Método de Euler Modificado

- Considere o seguinte problema

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad \text{com} \quad y(0) = -1$$

cuja solução analítica é dada por $y(x) = -3e^{-x} - 2x + 2$. Vamos aproximar a função $y(x)$ solução desta equação para os valores de x compreendidos ente 0 e 0.5 utilizando o método de Euler modificado com passo $h = 0.1$

x_k	y_k	hy'_k	$y_{k+1,p}$	$hy'_{k+1,p}$	$y_{k+1,c}$
0.0	-1.0000	0.1000	-0.9000	0.0700	-0.9150
0.1	-0.9150	0.0715	-0.8435	0.0444	-0.8571
0.2	-0.8571	0.0457	-0.8114	0.0211	-0.8237
0.3	-0.8237	0.0224	-0.8013	0.0001	-0.8124
0.4	-0.8124	0.0012	-0.8112	-0.0189	-0.8212
0.5	-0.8212				

Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

- Em cada passo do método de Runge-Kutta de quarta ordem é feita uma média ponderada de quatros declives

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$$

em que

$$\begin{aligned}
K_1 &= f\left(t_k, y_k\right) \\
K_2 &= f\left(t_k + h_k/2, y_k + \left(h_k/2\right) K_1\right) \\
K_3 &= f\left(t_k + h_k/2, y_k + \left(h_k/2\right) K_2\right) \\
K_4 &= f\left(t_k + h_k, y_k + h_k K_3\right)
\end{aligned}$$

- Este método é de quarta ordem de exactidão (erro global é de $\mathcal{O}(h^4)$)

Exemplo: Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

- Vamos resolver pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem o problema
$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad \text{com} \quad y(0) = -1$$
com x compreendidos ente 0 e 0.5 com passo $h = 0.1$

x_k	y_k	hK_1	hK_2	hK_3	hK_4	média
0.0	-1.0000	0.1000	0.0850	0.0858	0.0714	0.0855
0.1	-0.9145	0.0715	0.0579	0.0586	0.0456	0.0583
0.2	-0.8562	0.0456	0.0333	0.0340	0.0222	0.0337
0.3	-0.8225	0.0222	0.0111	0.0117	0.0011	0.0115
0.4	-0.8110	0.0011	-0.0090	-0.0085	-0.0181	-0.0086
0.5	-0,8196					