VII – Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

1 – Introdução

As equações diferenciais ordinárias são instrumentos essenciais para a modelação de muitos fenómenos provenientes de várias áreas como a física, química, economia, ecologia, etc… A abundância de equações diferencias ordinárias em matemática deve-se sobretudo ao facto de muitas leis científicas são expressas em termos de taxa de variação (derivada). Por exemplo,

$$\frac{du}{dt} = -0,27\left(u-60\right)^{5/4}$$

é uma equação que descreve (aproximadamente) a variação da temperatura u com o decorrer do tempo t, num corpo que perde calor por convecção natural quando rodeado por uma temperatura constante. Esta equação é designada de equação diferencial ordinária de primeira ordem porque contem apenas derivadas de primeira ordem em relação a uma única variável (t). Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) que contem derivadas de ordem n é também designada por EDO de ordem n. As equações que contem simultaneamente derivadas em relação a duas ou mais variáveis são designadas por equações às derivadas parciais e não serão estudadas neste capítulo. Neste capítulo abordaremos apenas as EDOs de primeira ordem.

A solução de uma equação diferencial é uma função que satisfaz a equação diferencial assim como certas condições iniciais da função. Quando se resolve uma equação diferencial analiticamente, encontra-se normalmente uma solução geral contendo um certo número de constantes arbitrárias determinadas de maneira a que a função esteja de acordo com as condições iniciais. Contudo nem todas as equações diferenciais têm solução analítica.

Por seu lado, os métodos numéricos não têm as limitações dos métodos analíticos pelo que se aplicam a qualquer forma de equação diferencial. A solução é obtida na forma de uma sequência de valores tabelados (discretos) da função correspondentes a certos pontos da variável independente. Contudo se as condições iniciais se alterarem, toda a sequencia terá de ser recalculada.

O propósito deste capítulo é o de introduzir alguns dos métodos mais simples utilizados na resolução numérica de equações diferencias ordinárias de primeira ordem. Estas equações podem ser genericamente representadas na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x,y\right),$$
$$y(x_0) = y_0.$$

A segunda condição representa a condição inicial, pelo que este problema é também designado por problema de valor inicial.

2 – Métodos Baseados na Série de Taylor.

Muitos dos métodos numéricos utilizados para aproximar os valores da função $y(x)$ para determinado valor de x baseiam-se no desenvolvimento em Série de Taylor (ver Capítulo 1). O desenvolvimento de $y(x)$ em série de Taylor em torno do ponto $x = x_0$ é dado por

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{y^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

com $x_0 < z < x$. Se definir-mos $x - x_0 = h$, podemos escrever a série como

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{y''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{y^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Os dois primeiros coeficientes da série podem ser determinados facilmente a partir da condição inicial e da própria equação diferencial ($y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$). Para obter as derivadas de ordem superior é necessário derivar f. Por exemplo a segunda derivada em x_0 será $y''(x_0) = f'(x_0, y_0)$.

Como já sabemos do primeiro capítulo, só podemos trabalhar com um número finito de termos pelo que na prática a série é truncada a partir de uma certa ordem, originando o polinómio de Taylor.

O método de Euler consiste em utilizar apenas os dois primeiros termos da série. Como apenas os termos de ordem zero e ordem um são utilizados, este método é descrito como um método de primeira ordem. O método de Euler modificado baseia-se implicitamente em considerar os três primeiros termos da série, pelo que é considerado um método de segunda ordem. O método de Runge-Kutta de quarta ordem, que iremos também considerar, baseia-se numa aproximação em que os cinco primeiros termos da série de Taylor são considerados.

O erro cometido na aproximação da função por estes métodos é igual ao erro de truncatura da série de Taylor. Assim se considerarmos uma aproximação de ordem n o erro será

$$\text{Erro} = \frac{y^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad x_0 < z < x_0 + h.$$

Contudo, este erro não pode ser calculado porque é impossível avaliar a derivada em $x = z$, sem conhecer o valor de z. Também não podemos optar por majorar o erro em $[x_0, x]$ porque a derivada é apenas conhecida em $x = x_0$ e não em $x = x_0 + h$. Pelo que apenas podemos concluir que o erro é proporcional a h^{n+1} (igual a um número próximo de 1 vezes h^{n+1}). Diz-se que o erro é de ordem h^{n+1} e representa-se por $O\left(h^{n+1}\right)$. Como o método de Euler trunca a série de Taylor a partir do termo de ordem um ($n = 1$) o erro cometido ao aproximar o valor de $y\left(x_0 + h\right)$ é $O\left(h^2\right)$.

3 – Método de Euler.

Sabemos que o erro na série de Taylor será pequeno se o passo h também for pequeno. Efectivamente se o passo for suficientemente pequeno, poderemos necessitar apenas de um pequeno número de termos da série para obter uma boa precisão. O método de Euler segue esta ideia ao extremo utilizando apenas os dois primeiros termos da série de Taylor. Supondo que escolhemos h suficientemente pequeno de maneira a poder truncar a série após o termo de primeira ordem. Então

$$y\left(x_0+h\right)=y\left(x_0\right)+hy'\left(x_0\right)+\frac{y''\left(z\right)h^2}{2}, \quad x_0<z<x_0+h,$$

em que o último termo representa o erro de truncatura da série de Taylor.

Ao utilizar esta equação, o valor de $y\left(x_0\right)$ é dado pela equação inicial e $y'(x_0)$ é calculado a partir de $f\left(x_0,y_0\right)$ que é dada pela equação diferencial $dx/dy=f\left(x,y\right)$. Este método é aplicado iterativamente, calculando-se a solução em $x_0=x_0+2h$ depois de $y\left(x_0+h\right)$ ter sido calculada, prosseguindo-se depois para $x=x_0+3h$, e assim sucessivamente. Adoptando uma notação em subscrito para os sucessivos valore de y e desprezando o erro $O\left(h^2\right)$, podemos escrever a formula de recorrência para o método de Euler sob a forma

$$y_{n+1}=y_n+hy'_n\,.$$

Exemplo 1 - Considere o seguinte problema

$$\frac{dy}{dx}=-2x-y, \quad y\left(0\right)=-1$$

cuja solução analítica é dada por $y\left(x\right)=-3e^{-x}-2x+2$. Vamos aproximar a função $y\left(x\right)$ solução desta equação para os valores de x compreendidos ente 0 e 0,5 utilizando o método de Euler com passo $h=0{,}1$.

Para simplificar os cálculos é aconselhável organizar o trabalho tal como indicado na tabela seguinte:

x_n	y_n	y'_n	hy'_n	$y_{n,exact}$
0,0	-1,0000	1,0000	0,1000	-1,0000
0,1	-0,9000	0,7000	0,0700	-0,9145
0,2	-0,8300	0,4300	0,0430	-0,8562
0,3	-0,7870	0,1870	0,0187	-0,8225
0,4	-0,7683	-0,0317	-0,0032	-0,8110
0,5	-0,7715			-0,8196

Na última coluna da tabela incluímos também os valores exactos da função $y_{n,exact}$ nos pontos pretendidos de forma poder comparar com os valores obtidos com o método de Euler y_n. Verificamos que o erro $\left|y_{n,exact} - y_n\right|$ aumenta à medida que nos afastamos de $x = 0$. Isto acontece devido à acumulação de erros locais $O\left(h^2\right)$ em cada passo. Por esta razão, no método de Euler, o erro global resultante da acumulação do erro local ao fim de muitas iterações é de ordem h, i.e., $O(h)$.

4 – Método de Euler Modificado

No método de Euler simples, utiliza-se o declive no inicio do intervalo, y'_n, para determinar o incremento da função. Esta técnica seria correcta apenas se a função fosse linear. O ideal seria ter o declive médio exacto ao longo do intervalo. Este pode ser aproximado pelo declive médio obtido nos extremos do intervalo.

Supondo que utilizamos a média aritmética dos declives obtidos no principio e no fim do intervalo $\left[x_n, x_{n+1}\right]$ para calcular y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}.$$

Esta formula permitiria obter uma melhor estimativa de y em x_{n+1}. Contudo, não podemos utilizar esta formula directamente, pois a derivada é simultaneamente função de x e y, não sendo possível obter y'_{n+1} sem o verdadeiro valor de y_{n+1}. O método de Euler modificado contorna este problema fazendo uma previsão do valor de y_{n+1} (que passaremos a designar por $y_{n+1,p}$) através da formula de recorrência do método de Euler simples. Este valor é depois utilizado para obter um valor corrigido de y_{n+1} (que passaremos a designar por $y_{n+1,c}$) através da fórmula anterior.

O algoritmo do método de Euler modificado é executado em dois passos:

1) Previsão: $y_{n+1,p} = y_n + hy'_n$

2) Correcção: $y_{n+1,c} = y_n + h\dfrac{y'_n + y'_{n+1,p}}{2}$.

Por esta razão o método de Euler modificado é também classificado como sendo um método de previsão-correcção. Como implicitamente faz uma aproximação através do polinómio de Taylor de segunda ordem, o erro local associado a este método é $O\left(h^3\right)$. Consequentemente o erro global será $O\left(h^2\right)$.

Exemplo 2 - Vamos resolver pelo método de Euler modificado o problema proposto no Exemplo 1.
Para simplificar os cálculos aconselhamos a organizar o trabalho tal como indicado na tabela seguinte:

x_n	y_n	hy'_n	$y_{n+1,p}$	$hy'_{n+1,p}$	$y_{n+1,c}$
0,0	-1,0000	0,1000	-0,9000	0,0700	-0,9150
0,1	-0,9150	0,0715	-0,8435	0,0444	-0,8571
0,2	-0,8571	0,0457	-0,8114	0,0211	-0,8237
0,3	-0,8237	0,0224	-0,8013	0,0001	-0,8124
0,4	-0,8124	0,0012	-0,8112	-0,0189	-0,8212
0,5	-0,8212				

Comparando estes resultados com os valores obtidos com o método de Euler simples e os valores exactos, obtidos a partir da função analítica, verificamos que o erro é menor, havendo ainda duas casas decimais correctas em $y(0,5)$, cujo valor exacto é -0,8196. Na figura 1 é possível verificar que os valores obtidos com o método de Euler modificado estão muito próximos dos valores exactos quando x está próximo de 0 (as duas curvas sobrepõem-se). Para valores de x mais afastados de 0 as duas curvas já não estão sobrepostas devido à acumulação do erro em cada passo.

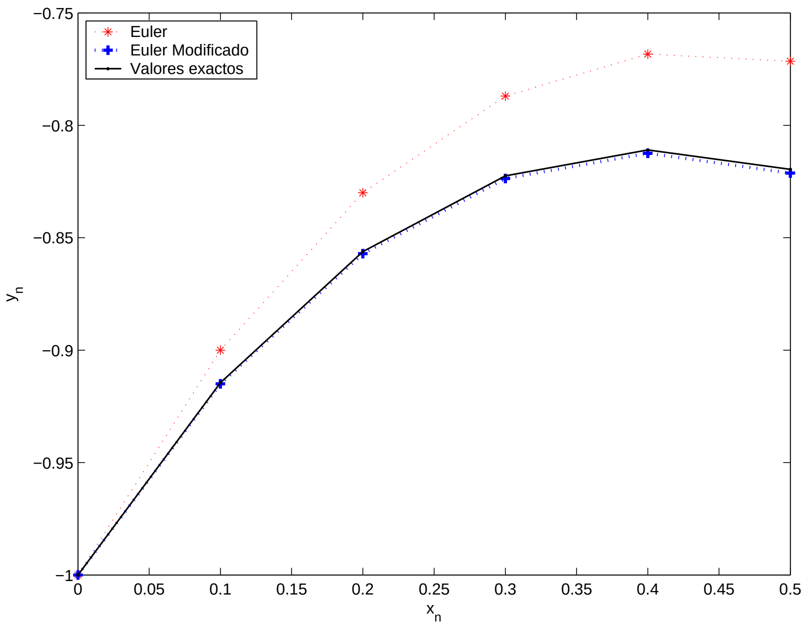

Figura 1 – Comparação dos valores de y_n aproximados com os valores exactos.

5 – Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

Os métodos de Runge-Kutta, de várias ordens, caracterizam-se por utilizar valores para o declive calculados a partir de médias ponderadas de vários valores previstos. Pelo que o método de Euler modificado pode ser visto como um método de Runge-Kutta de segunda ordem.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem, um dos mais utilizados para a resolução de equações diferenciais ordinárias, faz uma média de quatro declives calculados nos extremos e a meio do intervalo $[x_0, x_0+h]$. A formulação mais usada deste método é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),\\
k_1 &= hf\left(x_n, y_n\right),\\
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right),\\
k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right),\\
k_4 &= hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right).
\end{aligned}
$$

O erro local deste método é $O\left(h^5\right)$ e o erro global é $O\left(h^4\right)$. Este método é computacionalmente mais eficiente do que o método de Euler modificado porque, apesar de exigir quatro avaliações da função em vez das duas exigidas por etapa, o passo h poder ser muito maior sem que por isso haja perda de precisão.

Exemplo 3 - Vamos resolver pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem o problema proposto nos exemplos anteriores.

Para simplificar os cálculos aconselhamos novamente a organizar o trabalho tal como indicado na tabela seguinte:

x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	Média
0,0	-1,0000	0,1000	0,0850	0,0858	0,0714	0,0855
0,1	-0,9145	0,0715	0,0579	0,0586	0,0456	0,0583
0,2	-0,8562	0,0456	0,0333	0,0340	0,0222	0,0337
0,3	-0,8225	0,0222	0,0111	0,0117	0,0011	0,0115
0,4	-0,8110	0,0011	-0,0090	-0,0085	-0,0181	-0,0086
0,5	-0,8196					

Comparando estes resultados com os valores exactos, obtidos a partir da função analítica, verificamos que temos agora pelo menos quatro casas decimais correctas em todas as aproximações.

6 – Problemas propostos

1) Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} - xy, \quad y(0) = 1,$$

cuja solução analítica é $y(x) = \sqrt{2 - e^{-x^2}}$, no intervalo $[0; 0,5]$ utilizando um passo $h = 0,1$, pelos métodos de

a) Euler simples
b) Euler Modificado
c) Runge-Kutta de quarta ordem.

Compara os resultados, obtidos com cada um dos métodos, com os valores reais da função, calculados a partir da solução analítica.

2) Encontre a solução de

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + t^2, \quad y(1) = 0,$$

no ponto $t = 2$ pelo método de Euler modificado, utilizando um passo $h = 0,1$. Repita os cálculos com $h = 0,05$.

3) Repita o exercício anterior utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

4) Resolva

$$y' = \sin x + y, \quad y(0) = 2$$

pelo método de Euler modificado de maneira a obter y em $x = 0,1 : 0,1 : 0,5$.

5) Resolva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}, \quad y(0) = 2$$

pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem de maneira a obter y em $x = 0,2:0,2:0,6$.

6 – Bibliografia

A exposição efectuada neste Capítulo baseia-se no Capítulo 6 do livro:

Curtis F. Gerald and Patrick O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley, 1999.