Capítulo IV - Equações não Lineares

1. Introdução

Dada uma equação

$$f(x) = 0$$

diz-se que $x*$ é uma raiz da equação se, ao substituir o valor de x por $x*$, a equação anterior se transforma na identidade

$$f(x*) = 0.$$

O número $x*$ pode ser uma raiz de f, real ou complexa, simples ou múltipla. Será simples se ($f(x*)=0$, mas $f'(x*) \neq 0$) e será múltipla (de multiplicidade k) se ($f(x*) = f'(x*) = \cdots = f^{(k-1)}(x*) = 0$ mas $f^{(k)}(x*) \neq 0$. Neste curso faremos apenas referência à aplicação de métodos numéricos para o cálculo de raízes reais e simples de f.

Por vezes é possível a determinação da raiz que se pretende calcular, quer de forma imediata, quer recorrendo a fórmulas já conhecidas:

Ex.: 2.1. A solução de uma equação linear

$$ax = b \quad , \quad \text{com} \quad a \neq 0$$

é

$$x = \tfrac{b}{a}$$

Ex.: 2.2. As soluções da equação polinomial do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

podem ser reais, iguais ou diferentes, ou complexas; podem ser determinadas através da uma das fórmulas resolventes seguintes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \quad \text{com } b = 2k$$

Mas nem sempre é possível dispor de uma fórmula para calcular directamente as raízes de uma equação, sendo necessário, na maior parte das situações, o uso de métodos numéricos para obtenção de valores aproximados dessas raízes, i.e., valores que representem essas raízes com um erro ε_x (absoluto ou relativo) majorado por um valor tol previamente fixado ($\varepsilon_x \le tol$).

Os métodos numéricos podem agrupar-se em três grandes classes:

- Métodos directos ou algébricos

Consistem na aplicação directa de fórmulas que conduzem a solução exacta (usando uma aritmética de precisão infinita). Por exemplo as fórmulas para equações polinomiais do segundo grau ou o método da eliminação de Gauss para resolução de sistemas de equações algébricas lineares.

- Métodos iterativos

Partindo de uma aproximação inicial x_0, geram um sucessão de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se o método for convergente, tal como desejado, estes valores vão se aproximando cada vez mais de x^*; os valores gerados pela sucessão dependem (são função) de um ou mais valores anteriormente gerados:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n \ , \ x_{n-1} \ , \ \cdots, x_0) \, .$$

Ex.: 2.3. Fórmula iterativa do "*método da secante*", a estudar durante este capítulo:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \ f(x_n) - x_n \ f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- Métodos recursivos

De definição em tudo igual à anterior, excepto em que os valores gerados pela sucessão dependem não só de um ou mais valores anteriormente gerados, mas também estão relacionados com a ordem de uma ou mais iterações:

$$x_{n+1} = \varphi(n \ , \ x_n \ , \ x_{n-1} \ , \ \cdots)$$

tal como se pode apreciar no seguinte exemplo:

Ex.: 2.4. $x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \quad f\left(x_n\right)$

Os métodos iterativos e recursivos são considerados métodos numéricos e é sobre estes que focalizaremos a nossa atenção. Do ponto de vista computacional, vão-nos interessar sobretudo os métodos iterativos. Neste é gerada uma sucessão de números reais que se pretende convergente para $x*$, raiz de f a calcular. A aplicação de métodos iterativos deve ter em conta duas questões essenciais:

i) Qual a garantia de que a sucessão seja, de facto, convergente para a raiz $x*$?

ii) Quando deve o processo de cálculo ser suspenso, i.e., quando deve ser considerado que se atingiu a precisão desejada?

Quanto à primeira questão, serão estabelecidas, sempre que possível, condições suficientes de convergência que, em alguns casos, terão ainda a vantagem de permitir a previsão do número de iterações a efectuar.

Quanto à segunda questão, dois tipos de critérios podem ser usados. O primeiro é baseado no valor da aproximação $\bar{x}$ à raiz a determinar x^*. O segundo, no valor de $f(\bar{x})$ que se pretende que seja o mais próximo possível de zero.

1) $\bar{x}$ é uma aproximação de $x*$, raiz de $f(x)$, com erro não superior a tol,

se $\Delta_x = \left|\bar{x} - x*\right| \leq tol$ (critério baseado no erro absoluto de x)

ou se $r_x = \dfrac{\left|\bar{x} - x*\right|}{\left|\bar{x}\right|} \leq tol$ (critério baseado no erro relativo de x)

2) $\bar{x}$ é uma aproximação de $x*$, raiz de $f(x)$, com erro não superior a tol,

se $\Delta_f = \left|f\left(\bar{x}\right) - f\left(x^*\right)\right| = \left|f\left(\bar{x}\right)\right| \leq tol$ (critério para o erro absoluto de f)

Em geral o critério do primeiro tipo é completado com o critério do segundo tipo de forma a evitar problemas devidos ao condicionamento do problema. Assim, considerando que o último termo da sucessão x_n verifica um dos critérios do primeiro tipo, deve-se igualmente verificar se $f(x_n)$ está suficientemente próximo de zero. Em certos problemas mal condicionados podemos ter valores dos erros da aproximação bastante baixo sem que o valor da função o seja

Uma vez que nos problemas práticos não conhecemos o verdadeiro valor da raiz x^* também é impossível determinar o erro da aproximação x_n. Contudo, alguns métodos iterativos não nos dão directamente uma solução aproximada x_n mas sim um intervalo que sabemos conter a solução e cuja amplitude vai decrescendo de iteração em iteração. Para esses métodos consideramos que o erro absoluto Δ_k é igual amplitude desse intervalo na iteração k. Para os outros métodos uma boa forma de controlar o erro consiste em calcular as mudanças relativas da aproximação em cada iteração

$$\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n|},$$

que é uma aproximação pouco rigorosa do erro relativo da aproximação x_n.

Ocasionalmente, pode ocorrer que a convergência da sucessão $\{x_n\}$ para x^* seja demasiado lenta, tornando "*pesado*" o processo de cálculo. Para obstar a tal situação, pode ser implementado um outro critério de paragem baseado na imposição de um número máximo de iterações a efectuar, como por exemplo

$$n \le n_{\max}$$

se pretendermos que o número total de iterações n não ultrapasse $n_{\max}$.

2. Separação das raízes

A fase inicial da resolução de uma equação $f(x)=0$ é a da *separação das raízes*, i.e., determinar intervalos $[a\ ,\ b]$ cada um deles contendo uma e uma só raiz. Dois métodos são, geralmente, usados:

2.1. Método gráfico

Para algumas funções não é fácil a representação gráfica de f. Torna-se, regra geral, vantajoso rescrever a equação $f(x)=0$ de uma forma equivalente

$$f_1(x) \quad = \quad f_2(x)$$

em que os gráficos de f_1 e de f_2 são mais fáceis de representar.

<u>Ex.: 2.5.</u> Separar as raízes de

$$x^2 - e^{\frac{x}{2}} = 0$$

Neste exemplo a função $f(x) = x^2 - e^{\frac{x}{2}} = 0$ pode ser decomposta em $x^2 = e^{\frac{x}{2}}$, com $f_1(x) = x^2$ uma parábola centrada na origem e $f_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$ a função exponencial. As intersecções destes dois gráficos indicam-nos as raízes de $f(x)$. No gráfico seguinte ilustramos esta situação para as raízes compreendidas entre -3 e 3.

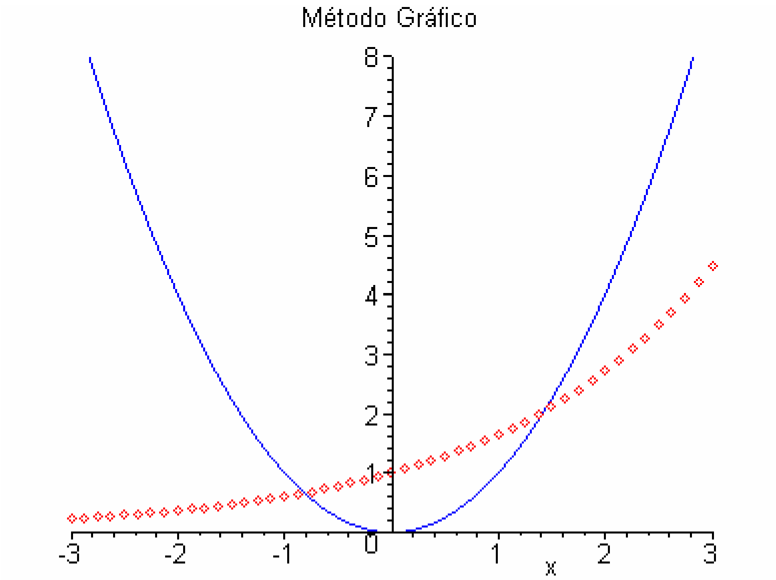

Figura 1 – Representação gráfica das funções $f_1(x) = x^2$ (traço contínuo) e $f_2(x) = e^{\frac{x}{2}}$ (pontilhado).

Concluímos assim que no intervalo de $[-3,3]$ a função $f(x)$ contem duas raízes α e β com $\alpha \in]-1,0[$ e $\beta \in]1,2[$.

2.2. Método dos Números de Rolle

Para algumas funções (funções polinomiais, por exemplo) a separação das raízes de f pode ser feita de forma mais simples recorrendo a dois teoremas da Análise Matemática: o teorema de Bolzano e o teorema de Rolle, ou melhor, um dos seus corolários.

Teorema de Bolzano

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$, e $\lambda \in [f(a), f(b)]$. Então,

$$\exists c \in [a,b] \quad : \quad f(c) = \lambda$$

Em particular,

$$f(a) \times f(b) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a,b] \quad : \quad f(c) = 0$$

isto é, se nos extremos do intervalo $[a,b]$ f assume valores de sinais contrários, então existe <u>pelo menos uma</u> raiz de f nesse intervalo.

Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua e diferenciável em $]a,b[$ com $f(a) = f(b)$. Então,

$$\exists c \in [a,b] \quad : \quad f'(c) = 0$$

Uma das consequências (corolário) deste teorema é a seguinte: *Entre dois zeros consecutivos da função* f' *existe, quando muito, um zero da função* f.

Uma maior generalização deste corolário conduz à definição do chamado "*conjunto dos números de Rolle*" como o conjunto ordenado formado pelos pontos fronteira do domínio de f e pelas raízes de f'. Assim, o corolário pode ser enunciado do seguinte modo: «Entre dois números de Rolle consecutivos *existe, quando muito, um zero da função* f ».

<u>Ex.: 2.6.</u> Separar as raízes de

$$x^9 - 27x^5 - 144x = \sqrt[3]{-\pi}$$

$$f(x) = 0 \iff x^9 - 27x^5 - 144x + \sqrt[3]{\pi} = 0$$

$$f(x) = x^9 - 27x^5 - 144x + \sqrt[3]{\pi}$$

Parece evidente que qualquer forma de subdividir o gráfico de f conduz a uma representação que, no mínimo, provocará um problema de escala.

Contudo, vejamos que o método dos números de Rolle resolve de forma satisfatória o problema de separação das raízes.

Determinação dos números de Rolle:

1) Domínio de f : $D_f \equiv \{ x : x \in \Re \} \equiv]-\infty , +\infty[$

2) Raízes de f':

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^8 - 15x^4 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^4 + 1)\ (x^2 + 4)\ (x + 2)\ (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 2$$

Conjunto dos números de Rolle da função f : L_f :

$$L_f = \{ -\infty , -2 , 2 , +\infty \}$$

Vejamos o que se passa no intervalo $]-\infty , -2[$:

i) $-\infty$ e -2 são números de Rolle consecutivos; então, no intervalo $]-\infty , -2[$ existe, no máximo, uma raiz de f ;

ii) mas como $f(-\infty) \times f(-2) < 0$

pois $f(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^9 - 27x^5 - 144x + \sqrt[3]{\pi} \right) = -\infty < 0$

e $f(-2) = 640 + \sqrt[3]{\pi} \approx 641.465 > 0$

de onde se conclui que no intervalo $]-\infty , -2[$ existe pelo menos uma raiz de f .

Da conjunção das proposições i) e ii) surge a conclusão: f *tem apenas uma raiz no intervalo* $]-\infty , -2[$.

Como o intervalo que contém a raiz é muito extenso é usual separar as raízes em intervalos de menor comprimento (unitários por exemplo). Vamos definir um intervalo unitário:

$$f(-2) \approx 641 > 0$$

$$f(-3) \approx -12688 < 0$$

logo

$$f(-3) \times f(-2) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists^1 x_1 \in \left]-3\ ,\ -2\right[\quad : \quad f(x_1) = 0$$

i.e.,

x_1 é a única raiz de f no intervalo $\left]-3\ ,\ -2\right[$.

De modo análogo se procede para as restantes raízes reais, localizadas nos intervalos:

x_2 é a única raiz de f no intervalo $\left]0\ ,\ 1\right[$;

x_3 é a única raiz de f no intervalo $\left]2\ ,\ 3\right[$.

Fica a cargo do aluno, como exercício, a verificação das duas últimas afirmações.

3. Métodos iterativos para o cálculo de raízes.

Localizadas as raízes de f, suponhamos que se deseja efectuar o cálculo de uma delas, $x^* \in \left]a, b\right[$.

Vários métodos existem para alcançar o fim a que nos propomos. Estudaremos os seguintes:

- Método das *bissecções*

Embora não seja possível considerá-lo um método iterativo já que não é possível estabelecer uma fórmula de recorrência do tipo

$$x_{n+1} = \varphi\left(x_n\ ,\ x_{n-1}\ ,\ \cdots\right)$$

veremos que os valores da sucessão $\{x_n\}$ vão, indirectamente, estar relacionados com valores anteriormente calculados.

- Método do *ponto fixo* (ou método *iterativo simples*)

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x) \qquad ; \qquad x_{n+1} = g(x_n)$$

- Método de *Newton-Raphson*

$$f(x)=0 \qquad ; \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Método da *secante*

$$f(x)=0 \qquad ; \qquad x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\ f(x_n) - x_n\ f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- Método da *falsa-posição*

$$f(x)=0 \qquad ; \qquad x_{n+1} = \frac{a\ f(x_n) - x_n\ f(a)}{f(x_n) - f(a)}$$

$$\text{ou} \qquad x_{n+1} = \frac{x_n\ f(b) - b\ f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

3.1. Método das bissecções

Seja a equação

$$f(x)=0$$

de que se pretende calcular x^*, única raiz de f num certo intervalo $[a,b]$.

Por divisão do intervalo $[a,b]$ em dois subintervalos de igual comprimento, i.e., por bissecção do intervalo $[a,b]$, e, fazendo uso do teorema de Bolzano, é possível seleccionar o subintervalo que contém x^*, repetindo este processo n vezes gera-se uma sucessão $\{x_n\}$ convergente para x^*:

Analisemos, agora, o processo de definição da sucessão $\{x_n\}$ de aproximações a x^*:

i) Partindo do intervalo inicial $I_0 = [a_0, b_0] \equiv [a,b]$, calcula-se x_0, ponto médio desse intervalo

$$I_0 = [a_0, b_0] \equiv [a,b] \qquad ; \qquad x_0 = \tfrac{1}{2}(a_0 + b_0)$$

e define-se o intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$, de comprimento $|b_1 - a_1| = \frac{|b_0 - a_0|}{2} = \frac{|b-a|}{2}$, de modo que

$a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$, se $f(a_0) \times f(x_0) > 0$

ou $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$, se $f(a_0) \times f(x_0) < 0$

ii) Com base no intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$ calculado em i), calcula-se x_1, ponto médio desse intervalo

$$I_1 = [a_1, b_1] \qquad ; \qquad x_1 = \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1)$$

e define-se o intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$, de comprimento $|b_2 - a_2| = \frac{|b_1 - a_1|}{2} = \frac{|b - a|}{2^2}$,

de modo que $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$, se $f(a_1) \times f(x_1) > 0$

ou $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_1$, se $f(a_1) \times f(x_1) < 0$

Repetindo, de forma sistemática, os procedimentos indicados em i) e ii), é possível definir um intervalo

$$I_n = [a_n, b_n]$$

cujo ponto médio

$$x_n = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n)$$

representa uma aproximação da raiz $x*$, com um erro inferior a

$$|b_n - a_n| = \frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|}{2} = \frac{|b - a|}{2^n}$$

uma vez que

$$|x* - x_n| \leq |b_n - a_n| = \frac{|b - a|}{2^n}$$

permitindo, esta condição, além de controlar o erro absoluto com que x_n representa $x*$, prever o número de bissecções necessárias para que uma margem de erro, previamente fixada, não seja ultrapassada.

Apresenta-se de seguida o algoritmo para o método das bissecções para o caso de se pretender uma aproximação da raiz com erro absoluto inferior a tol .

Algoritmo - Bissecções

```
while  ((b − a) > tol)  do
     m = ½(a + b)
     if   sign(f(a)) = sign(f(a))   then
          a = m
     else
          b = m
     end
end
```

O algoritmo está escrito em linguagem Matlab/Octave sem entrar em detalhes. Utiliza-se a função $sign$ em que $sign(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $sign(x) = -1$ se $x < 0$.

3.2. Método do ponto fixo.

Seja uma função $f(x)$ de que se pretende determinar uma ou mais raízes, já separadas em intervalos disjuntos $[a,b]$.

Definição: Diz-se que a função g, definida em $I = [a,b]$, tem um *ponto fixo* p nesse intervalo I, se

$$g(p) = p$$

i.e., o gráfico de $y = g(x)$ intersecta o gráfico de $y = x$ em $x = p$.

Ex.: 2.7. A função $g(x) = x^2 - 2x + 2$ tem dois pontos fixos em $[0,3]$:

$$p = 1 \quad : \quad g(1) = 1$$

$$p = 2 \quad : \quad g(2) = 2$$

O conceito de ponto fixo permite converter a resolução da equação $f(x) = 0$ na de uma outra equação equivalente $x = g(x)$; assim, *determinar uma raiz da equação* $f(x) = 0$ *é equivalente a calcular um ponto fixo da função auxiliar* g. Este ponto pode ser determinado através de um processo iterativo de aproximações sucessivas definido pela formula de recorrência

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \text{para} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Contudo, nem sempre este processo é convergente. O facto de haver um ponto fixo de g num dado intervalo não é garantia de que o processo vai convergir.

Assim, se $f(x)$ admitir uma raiz no intervalo $[a;b]$, o que equivale a dizer que $g(x)$ admite um ponto fixo no mesmo intervalo, o processo iterativo atrás descrito (designado por método do ponto fixo) vai convergir para a solução x^*, qualquer que seja o ponto de partida $x_0 \in [a;b]$, se se verificar que

i) g é uma função contínua em $[a,b]$;

ii) $\left|g'(x)\right| \le L < 1, \qquad \forall x \in [a,b].$

O erro absoluto associado à aproximação obtida após n iterações é:

$$\Delta x_n = \left|x^* - x_n\right| \le \frac{L^n}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|.$$

Esta relação pode ser usada para obter uma estimativa do número máximo de iterações ($N_{\max}$) necessárias para reduzir o erro abaixo de uma certa tolerancia (tol). Contudo como esta estimativa é feita com o valor máximo da derivada, a estimativa $N_{\max}$ é geralmente muito maior do que o número de iterções necessárias na prática.

Ex.: 2.8. Considerar a equação do segundo grau: $x^2 - 5x + 2 = 0$.

Utilizando o método do ponto fixo vamos demonstrar que a equação admite as raízes

$$\alpha = 0.438447 \quad \text{e} \quad \beta = 4.561553.$$

A equação dada pode ser escrita na forma: $x = \frac{x^2+2}{5}$ com $g(x) = \frac{x^2+2}{5}$

Verifica-se que o método converge no cálculo de α mas não no de β, pois

$$\left|g'(x)\right| = 0.4x \le 0.4 < 1 \qquad \text{para} \qquad x \in [0, \ 1]$$
$$\left|g'(x)\right| = 0.4x \ge 1.6 > 1 \qquad \text{para} \qquad x \in [4, \ 5]$$

Cálculo de α: $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{5}$

Cálculo do número máximo de iterações:

$x_0 = 0.5$; $x_1 = 0.45$; $L = 0.4$; $\Delta x \le 0.5\times 10^{-6}$: $N_{\max} = 14$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.5\\
x_1 &= 0.45\\
x_2 &= 0.4405\\
x_3 &= 0.43880805\\
x_4 &= 0.4385105009\\
x_5 &= 0.4384582919\\
x_6 &= 0.4384491347\\
x_7 &= 0.4384475288\\
x_8 &= 0.4384472471\\
x_9 &= 0.4384471977
\end{aligned}$$

O valor de α é aproximadamente igual a x_9 arredondado à 6ª casa décimal ($\alpha = 0.438447$)

Para a determinação de $\beta = 4.561553$ pode-se reescrever a equação dada sob a forma

$$x = 5 - \frac{2}{x} \ : \qquad g(x) = 5 - \frac{2}{x}$$

Mostra-se que o método converge no cálculo de β, mas não no de α; notar que:

$$|g'(x)| = \frac{2}{x^2} \leq 0.125 < 1 \qquad \text{para} \qquad x \in [4, \ \ 5]$$

$$|g'(x)| = \frac{2}{x^2} \geq 2 > 1 \qquad \text{para} \qquad x \in [0, \ \ 1]$$

Cálculo de β : $x_{n+1} = 5 - \dfrac{2}{x_n}$

Cálculo do número máximo de iterações:

$x_0 = 4.5$; $x_1 = 4.5555555556$; $L = 0.125$; $\Delta x \leq 0.5 \times 10^{-6}$: $N_{\max} = 6$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 4.5 \\
x_1 &= 4.5555555556 \\
x_2 &= 4.5609756098 \\
x_3 &= 4.5614974795 \\
x_4 &= 4.5615474795 \\
x_5 &= 4.5615523002 \\
x_6 &= 4.5615527635
\end{aligned}$$

O valor de β é aproximadamente igual a x_6 arredondado à 6ª casa décimal ($\beta = 4.561553$)

3.3. Método de Newton-Raphson

Dada a equação $f(x) = 0$
de que se pretende calcular uma raiz $x^* \in [a, b]$, através de uma sucessão $\{x_n\}$ convergente para x^*; conhecida uma aproximação inicial x_0 dessa raiz, com erro $\Delta_0 \approx |x^* - x_0|$, é possível calcular uma nova aproximação x_1 fazendo

$$x_1 = x_0 + h_0 \quad ; \quad f(x_1) = f(x_0 + h_0) \approx f(x_0) + h_0 f'(x_0) \approx 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h_0 \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Este prcesso consiste em aproximar o valor de f no ponto $x_0 + h_0$ pelo polinómio de Taylor do primeiro grau em torno do ponto x_0. O erro absoluto é estimado através de

$$\Delta_1 = |x^* - x_1| \approx |x_1 - x_0| = |h_1| = \left| -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|.$$

Prosseguindo com o processo assim iniciado, obtém-se uma sequência de valores

$$x_2 = x_1 + h_1 \quad ; \quad f(x_2) = f(x_1 + h_1) \approx f(x_1) + h_1 f'(x_1) \approx 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h_1 \approx -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

. . . .

$$x_{n+1} = x_n + h_n \quad ; \qquad f(x_{n+1}) = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n f'(x_n) \approx 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad h_n \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

sucessivamente mais próximos da raiz $x*$; a igualdade constante da linha anterior é a denominada *fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson*.

Pela formula de recorrência do método de Newton verificamos que uma condição necessária para que o método convirja é a de que $f^{'}(x) \neq 0$ na vizinhança da raiz, pelo que a convergência nem sempre é garantida. O seguinte teorema apresenta as condições suficientes que garantem a convergência.

Teorema – Se numa vizinhança $]a,b[$ da raiz α suficientemente pequena se verificar que $f \in C^2[a,b]$ (admite segunda derivada em todo o intervalo) e que para todo o ξ nessa vizinhança

$$0 < m_1 \leq \left| f^{'}(\xi) \right| \leq M_1 \quad \text{e} \quad \left| f^{''}(\xi) \right| \leq M_2$$

então o método de Newton converge, e o erro satisfaz a relação

$$\Delta_{n+1} \leq M \Delta_n^2 \quad \text{com} \quad M = \frac{M_2}{2m_1}.$$

Demonstração – Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro Métodos Numéricos de H. Pina p. 180.

Em termos práticos é por vezes difícil analisar todas as condições do teorema. Pelo que se deve seguir algumas regras práticas: se $\alpha \in [a, b]$ escolher uma aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$ mais próxima possível de α (intervalo $[a,b]$ o mais pequeno possível), verificar que $f'(x) \neq 0$ para todo o $x \in [a,b]$ e que $f''(x)$ não mudando de sinal para todo o $x \in [a,b]$.

Num algoritmo computacional uma forma simples de monitorar a convergência consiste em observar para onde convergem as sucessivas aproximações $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$. Por exemplo verificar se $|x_{n+1} - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$. Se acontecer que x_{n+1} converge subitamente para um valor longe de x_n teremos $|x_{n+1} - x_n| \geq |x_n - x_{n-1}|$ o que significa que o método está a divergir. Deve-se então iniciar de novo o processo iterativo com outro ponto de partida x_0 que verifique as condições acima referidas.

O teorema indica também que a convergência pode ser quádrupla (o erro na iteração n é proporcional ao quadrado do erro na iteração $n-1$), significando que o número de dígitos correctos vai duplicar em cada iteração. Este tipo de convergência é também designada de superlinear por oposição à convergência linear em que o número de dígitos correctos aumenta constantemente de iteração para iteração (método das bissecções por exemplo).

Ex.: 2.8. Considerar a equação do segundo grau: $x^2 - 5x + 2 = 0$.

Utilizando o método de Newton-Raphson, calcular, com erro absoluto inferior a 0.5×10^{-9} e erro relativo iferiro a 5×10^{-9}, respectivamente, os valores das raízes $\alpha \in [0,1]$ e $\beta \in [4,5]$.

$$f(x) = x^2 - 5x + 2$$
$$f'(x) = 2x - 5 \qquad ; \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5x_n + 2}{2x_n - 5}$$
$$f''(x) = 2$$

Cálculo de $\alpha \in [0,1]$

$x_0 = 0.$ $\alpha \approx x_0 = 0.000000000$

$x_1 = 0.4$ $\alpha \approx x_1 = 0.400000000$

$x_2 = 0.4380952381$ $\alpha \approx x_2 = 0.438095238$

$x_3 = 0.4384471572$ $\alpha \approx x_3 = 0.438447157$

$x_4 = 0.4384471872$ $\alpha \approx x_4 = 0.438447187$ (*Resultado*

$x_5 = 0.4384471872$ $\alpha \approx x_5 = 0.438447187$ *confirmado*)

Cálculo de $\beta \in [4,5]$

$x_0 = 5$ $\beta \approx x_0 = 5.00000000$

$x_1 = 4.6$ $\beta \approx x_1 = 4.60000000$

$x_2 = 4.5619047619$ $\beta \approx x_2 = 4.56190476$

$x_3 = 4.5615528428$ $\beta \approx x_3 = 4.56155284$

$x_4 = 4.5615528128$ $\beta \approx x_4 = 4.56155281$ (*Resultado*

$x_5 = 4.5615528128$ $\beta \approx x_5 = 4.56155281$ *confirmado*)

3.4. Método da Secante

Se, ao aplicar o método de Newton-Raphson, ocorrer uma situação de divergência causada pelo facto de a derivada $f'(x)$ ser nula (ou muito próxima de zero) em algum ponto do intervalo $[a,b]$, tal derivada é substituída por:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

e a fórmula de recorrência, obtida a partir do método de Newton-Raphson, será:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

Cada termo da sucessão $\{x_n\}$ depende de dois termos anteriores; para iniciar o processo de cálculo com x_2 são, pois, necessários dois valores iniciais, por exemplo $x_0 = a$ e $x_1 = b$.

<u>Ex.: 2.9.</u> Considerar a equação do segundo grau: $x^2 - 5x + 2 = 0$.

Utilizando o método da secante, calcular, com erro inferior a 0.5×10^{-9}, o valor da raiz $\alpha \in [0,1]$.

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\left(x_n^2 - 5x_n + 2\right) - x_n\left(x_{n-1}^2 - 5x_{n-1} + 2\right)}{\left(x_n^2 - 5x_n + 2\right) - \left(x_{n-1}^2 - 5x_{n-1} + 2\right)}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\left(x_n^2 - 5x_n + 2\right) - x_n\left(x_{n-1}^2 - 5x_{n-1} + 2\right)}{x_n^2 - 5x_n - x_{n-1}^2 + 5x_{n-1}}$$

$x_0 = 0.$	$\alpha \approx x_0 = 0.000000000$	
$x_1 = 1$	$\alpha \approx x_1 = 0.100000000$	
$x_2 = 0.5$	$\alpha \approx x_2 = 0.500000000$	
$x_3 = 0.4285714286$	$\alpha \approx x_3 = 0.428571429$	
$x_4 = 0.4385964912$	$\alpha \approx x_4 = 0.438596491$	
$x_5 = 0.4384475440$	$\alpha \approx x_5 = 0.438437544$	
$x_6 = 0.4384471872$	$\alpha \approx x_6 = 0.438447187$	(*Resultado*
$x_7 = 0.4384471872$	$\alpha \approx x_7 = 0.438447187$	*confirmado*)

4. Sistemas de Equações Não Lineares.

Um sistema de equações não lineares (que, abreviadamente, designaremos por sistema não linear) é todo o conjunto de equações não lineares simultâneas da forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0 \end{cases}.$$

A resolução analítica deste tipo de sistemas é, no mínimo, extremamente elaborada, ou mesmo impossível. Como alternativa, existem vários métodos iterativos que, mediante certas condições (suficientes de convergência), permitem o cálculo numérico de uma aproximação à solução do sistema.

Uma solução deste sistema não linear é qualquer vector $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ tal que $F(x) = O$. Por uma questão de maior simplicidade de representação, adoptaremos a forma vectorial para representar as grandezas em causa:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad F(x) = O,$$

com

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix} \text{ e } O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dois problemas de imediato se levantam

i) Como determinar a aproximação inicial?

ii) Como parar o processo iterativo?

4.1. Localização das raízes

Para sistemas de pequena dimensão ($n = 2$), uma boa aproximação inicial pode ser obtida por “localização gráfica”. A abordagem a este tema vai ser feita sob a forma de um exemplo:

Exemplo:

Seja o seguinte sistema de equações não lineares: $\begin{cases} x^2 & + & y^2 & = & 1 \\ x & + & xy & = & 1 \end{cases}$

Esbocemos os gráficos de:

$$f_1 = 0 \Leftrightarrow f_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$f_2 = 0 \Leftrightarrow f_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow x + xy - 1 = 0$$

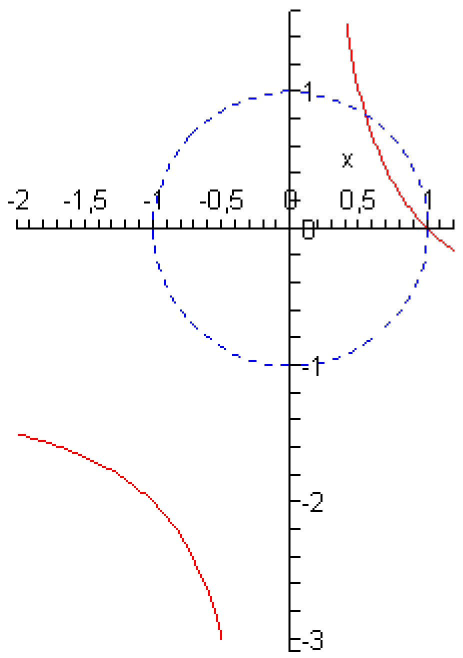

Figura 3.1 – Representação gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ (tracejado) e de $x + xy = 1$ (traço contínuo).

Torna-se, assim, possível verificar que o sistema tem uma raiz $\alpha = (1,0)$ e uma raiz $\beta \approx \left(\frac{1}{2},1\right)$ que, para efeitos de arranque do processo iterativo, consideraremos como aproximação inicial da solução, isto é $x^{(0)} \approx \left(\frac{1}{2},1\right)$.

No entanto, na maior parte dos problemas, dado o elevado número de equações e incógnitas, não é possível localizar graficamente as raízes. Nesses casos, não havendo mais nenhuma informação disponível somos obrigado a partir de $x^{(0)} = O$.

4.2. Critérios de paragem.

Quanto aos critérios de paragem, podem ser adoptados os mesmos que foram usados para os métodos iterativos, estudados no Capítulo III, para a resolução de sistemas de equações lineares. Um processo iterativo deve ser interrompido se uma ou várias das seguintes condições se verificarem:

i) Se já foi conseguido o cálculo de uma aproximação à solução, com uma margem de erro absoluto inferior à tolerância desejada:

$$\Delta_x^{(k+1)} \approx \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \leq tol$$

ii) Se já foi conseguido o cálculo de uma aproximação à solução, com uma margem de erro relativo inferior à tolerância desejada:

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\left\| x^{(k+1)} \right\|} \leq tol$$

iii) Pode, ainda ser estabelecido um critério de erro máximo para os valores das funções (resíduo):

$$\left\| F\left(x^{(k)} \right) \right\| < tol$$

iv) Ou se for detectado algum indício de divergência do processo:

$$\Delta_x^{(k+1)} \gg \Delta_x^{(k)}$$

v) E finalmente, se a sua convergência for demasiado lenta; tal pode ser conseguido através da fixação de um número máximo de iterações a realizar:

$$k = k_{\max} .$$

4.3. Método de Newton.

O método iterativo mais utilizado para a resolução de sistemas de equações lineares é o método de Newton. Baseia-se a sua aplicação no desenvolvimento de uma função multivariável em série de Taylor:

$$F\left(x\right) = F\left(x_0\right) + J_F\left(x_0\right) \times \left(x - x_0\right) + \cdots$$

em que $J_F\left(x\right)$ é a chamada "*matriz Jacobiana*" do conjunto de funções F:

$$J_F\left(x\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Da série de Taylor truncada a partir do termo maior ou igual a dois resulta a seguinte "*fórmula iterativa*" do método de Newton:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}\left(x^{(k)}\right) F\left(x^{(k)}\right).$$

Notar que, em cada iteração tem que ser feito o cálculo da inversa $J_F^{-1}(x)$ de uma matriz Jacobiana $J_F(x)$. Tal pode ser evitado se a fórmula iterativa $x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}\left(x^{(k)}\right) F\left(x^{(k)}\right)$ for substituída em cada iteração pelas seguintes etapas:

1ª etapa: resolver o sistema linear $J_F\left(x^{(k)}\right)\delta^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right)$

2ª etapa: calcular $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta^{(k)}$.

A primeira etapa consiste na resolução se um sistema de equações lineares com n equações e n incógnitas. Como tal a iteração só poderá progredir se a matriz dos coeficientes $J_F\left(x^{(k)}\right)$ for não singular.

Para além das propriedades da matriz dos coeficientes, também a escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$, suficientemente próxima da solução exacta do sistema, assume um papel decisivo na convergência do método.

Exemplo:

Vamos aproximar com erro absoluto $\Delta_x \leq 0.5e-02$ a solução do sistema apresentado no exemplo anterior: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + xy = 1 \end{cases}$. Considerando $x^{(0)} = [0.5 \;\; 1]^T$ como aproximação inicial.

Começamos por determinar a matriz Jacobiana da função $F(x) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x + xy - 1 \end{bmatrix}$. Esta é

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1+y & x \end{bmatrix}.$$

1ª iteração:

Começamos por resolver o sistema

$$J_F\left(x^{(0)}\right)\delta^{(0)} = -F\left(x^{(0)}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0.5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}3.25 \\ \text{-}0.50 \end{bmatrix},$$

Cuja solução é

$$\delta^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.0326 \\ -0.8043 \end{bmatrix}.$$

Actualizamos agora a aproximação à solução

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \delta^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0326 \\ -0.8043 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4674 \\ 1.1957 \end{bmatrix}.$$

Como já foi referido, uma forma de estimar o erro absoluto em cada iteração consiste em avaliar a diferença entre duas aproximações consecutivas, isto é,

$$\Delta_x^{(k+1)} \approx \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| = \left\| \delta^{(k)} \right\|.$$

Se tivermos em conta a norma infinita, obtemos

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty = \left\| \delta^{(0)} \right\|_\infty = 0.8043.$$

Como neste exercício o erro absoluto deverá ser inferior a $tol = 0.5e-05$, o que não acontece nesta iteração pois , deve-se então continuar o processo iterativo até que $\Delta_x^{(k)} \leq tol$.

<u>2ª iteração:</u>

Resolvemoa o sistema

$$J_F\left(x^{(1)}\right)\delta^{(1)} = -F\left(x^{(1)}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.9348 & 2.3913 \\ 2.1957 & 0.4674 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6480 \\ -0.0262 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0499 \\ -0.2905 \end{bmatrix}.$$

Actualizando a solução aproximada obtemos

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.4674 \\ 1.1957 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0499 \\ -0.2905 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5173 \\ 0.9052 \end{bmatrix}.$$

A estimativa do erro absoluto é

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_\infty = \left\| \delta^{(1)} \right\|_\infty = 0.2905.$$

Como ainda não é menor do que a tolerância desejada devemos continuar a iterar. Verifique que são necessárias 4 iterações para que o critérios de convergência se verifique e que a solução aproximada à quinta iteração é

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.5437 \\ 0.8393 \end{bmatrix}.$$

4.4. Exercícios propostos Sobre o Cálculo de Raízes de Equações Não-lineares

1. Localize as raízes das seguintes equações:

a) $e^{-x} - \ln x = 0$

b) $|x-1| - e^{-x} = 0$

c) $1 - \frac{x}{2} + \ln x = 0$

d) $e^{x} - 4x = 0$

e) Pelos métodos de:
1) Newton-Raphson
2) Secante
determine as raízes das equações dadas, com arredondamento à 7ª decimal.

2. Use o método dos números de Rolle para localizar, em intervalos de comprimento não superior a uma unidade, todas as raízes dos seguintes polinómios:

a) $p(x) = x^3 - 9x - 12$

b) $p(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 12$

c) $p(x) = 5x^8 - 64x^5 + 1$

d) $p(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 12$

e) Pelos métodos de:
1) Newton-Raphson
2) Secante
determine as raízes das equações dadas, com arredondamento à 7ª decimal.

3. Considere a equação: $f(x) = e^{x} - 4x = 0$

a) Verifique a existência de duas raízes reais $\alpha \in [0,1]$ e $\beta \in [2,3]$.

b) Considere as seguintes reformulações de $f(x) = 0$:

i) $x = f_1(x) = e^{x} - 3x$

ii) $x = f_2(x) = 0.25e^{x}$

iii) $x = f_3(x) = \ln(4x)$

Determine valores aproximados das raízes, com erro que não exceda 0.5×10^{-7}, usando o método iterativo simples (ponto fixo), baseando-se na reformulação mais adequada.

Faça uma previsão do número de iterações necessárias.

4. Localize as duas raízes reais da equação: $\frac{1}{|x|} - \ln|x-1| = 0$.

Determine valores aproximados dessas raízes, com erro que não exceda 0.5×10^{-7}:

a) Usando o método iterativo simples e fazendo uma previsão do número de iterações necessárias.

b) Pelo método de Newton-Raphson.

c) Pelo método da secante.

5. Determine o número de iterações necessárias para calcular, pelo método iterativo simples, com precisão de 10^{-5}, o valor de $\alpha \in [1,\ 2]$, solução de $x^3 - x - 1 = 0$. Determine tal aproximação, com o grau de precisão indicado.

6. Considere a equação: $e^x - 4x^2 = 0$.

a) Localize, em intervalos de comprimento unitário, as raízes da equação dada.
b) Determine uma aproximação para a maior raiz positiva da equação dada, em cinco iterações:
1) do método das aproximações sucessivas (Bissecção);
2) do método de Newton-Raphson;
3) do método da secante.
c) Indique majorantes dos erros das aproximações obtidas.

7. Considere a equação: $x^2 - 4 + 4\left|\ln|x|\right| = 0$.

a) Localize as suas raízes.
b) Determine, com erro inferior a $10^{-5}\%$ um valor aproximado da maior delas, usando
1) o método de Newton-Raphson
2) o método da secante.

8. Aproxime a raiz de $f(x) = x^9 + x^7 - 99$, pelo método de Newton-Raphson, em cinco iterações. Indique um majorante do erro do resultado obtido e escreva correctamente arredondado, o valor dessa raiz.

9. Use o método de Newton para aproximar, com erro inferior a 10^{-7}, o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2 - 1$ mais próximo de $(1,2)$.

10. Pretende-se calcular a área da superfície plana limitada superiormente pela recta que passa pelos pontos $(e,1)$ e $(0,2)$ e, inferiormente, pela curva $y = |\ln x|$.

Calcule, pelo método de Newton-Raphson, com precisão ao sétimo algarismo significativo, o limite de integração que é necessário conhecer para calcular aquela área.

Soluções dos problemas propostos

1.	**a)**	$\alpha \in \left]-1,0\right[$	:	$\alpha = 1.3097996$
	b)	$\alpha \in \left]-2,-1\right[$	:	$\alpha = -1.6783470$
		$\beta \in \left]0,1\right[$	:	$\beta = 0.7680390$
		$\gamma \in \left]1,2\right[$	:	$\gamma = 1.1571850$
	c)	$\alpha \in \left]0,1\right[$	:	$\alpha = 0.4639219$
		$\beta \in \left]5,6\right[$	:	$\beta = 5.3566940$

	d)	$\alpha \in]\,0,1\,[$	:	$\alpha = 0.3574030$
		$\beta \in]\,2,3\,[$	:	$\beta = 2.1532924$
2.	**a)**	$\alpha \in]\,3,4\,[$	:	$\alpha = 3.5223334$
	b)	$\alpha \in]\,2,3\,[$	:	$\alpha = 2.3443892$
	c)	$\alpha \in]\,0,1\,[$	:	$\alpha = 0.4358406$
		$\beta \in]\,2,3\,[$	:	$\beta = 2.3390402$
	d)	$\alpha \in]-3,-2\,[$	:	$\alpha = -2.8322251$
		$\beta \in]\,0,1\,[$	:	$\beta = 0.5590495$
		$\gamma \in]\,2,3\,[$	:	$\gamma = 2.6768497$

3. **b)** $\alpha \in [0,1]$; $x = f_2(x) = 0.25e^x$; $L = 0.61$; $n = 37$: $\alpha = 0.3574029$

$\beta \in [2,3]$; $x = f_3(x) = \ln(4x)$; $L = 0.48$; $n = 24$: $\beta = 2.1532923$

4. $\alpha \in [-2,-1]$; $\beta \in]\,2,3\,[$

a) $\alpha \in [-2,-1]$; $x = x + \dfrac{1}{x} + \ln(x)$; $L = 0.38$; $n = 18$: $\alpha = -1.2399779$

$\beta \in [2,3]$; $x = x + \dfrac{1}{x} + \ln(x)$; $L = 0.35$; $n = 16$: $\beta = 2.4934041$

5. $\alpha \in [1,2]$; $x = \sqrt[3]{x+1}$; $L = 0.20$; $n = 8$: $\alpha = 1.3247$

6. **a)** $\alpha \in [-1,0]$; $\beta \in [0,1]$; $\gamma \in]\,4,5\,[$

b1) $x = -\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$; $x = -\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$; $x = 2\ln(2x)$

$L = 0.24$; $L = 0.39$; $L = 0.49$

$n = 12$; $n = 18$; $n = 24$

$\alpha = -0..4077767$; $\beta = 0.7148059$; $\gamma = 4.3065847$

8. $\alpha \in [\,1,2\,]$

$\alpha_5 = 0.7148059124$; $\Delta_5 \le |x_5 - x_4| \approx 0.15 \times 10^{-5}$; $\alpha = 0.71481$

9. $P_0(\,1,2\,)$ $P(\,x,y\,) \equiv P\left(\,x, x^2 - 1\,\right)$

$\varphi(x) = d^2\,(P, P_0) = (x-1)^2 + \left(x^2 - 1\right)^2 = x^4 - 5x^2 - 2x + 10$

distância mínima:

$\varphi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - 10x - 2 = 0$

$\alpha \in]\,1,2\,[$; $\alpha = 1.672982$

10. $P_0(\,0,2\,)$, $P_1(\,e,1\,)$; recta por P_0 e P_1 : $y = 2 - \dfrac{x}{e}$

$2 - \dfrac{x}{e} = |\ln(x)|$ Raízes: $\alpha \in]\,0,1\,[$, $\beta = e$, $\alpha = 0.1426258$

4.5. Resolução de sistemas não-lineares.

1. Execute 2 iterações do método de Newton para aproximar as duas raízes do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Determine graficamente uma aproximação inicial $X^{(0)}$ e estime o erro cometido da aproximação $X^{(2)}$. Sempre que for necessário efectue os arredondamentos a 5 dígitos significativos.

2. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x^2 - 2sen(y) = 1 \\ 3x^2 y = \pi \end{cases}$$

Resolva o sistema com erro absoluto menor que $0,5\times10^{-2}$. Utilize com aproximação inicial o ponto (1; 0.5). Trabalhe com 5 dígitos significativos.

3. Determine, pelo método de Newton, com erro inferior a 0.5×10^{-5} e considerando a aproximação inicial sugerida, a solução do seguinte sistema de equações não lineares:

a) $$\begin{cases} x^2 + y = 37 \\ x - y^2 = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}, \quad x^{(0)} = 0, \qquad x = \begin{bmatrix} 4.35088 \\ 18.49123 \\ -19.84211 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{cases} xy - y^3 = 1 \\ y + x^2 y = 5 \end{cases}, \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 2.00000 \\ 1.00000 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 9 \\ (y-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}, \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{cases} 4x^2 - 20x + \frac{1}{4}y^2 + 8 = 0 \\ \frac{1}{2}xy^2 + 2x - 5y + 8 = 0 \end{cases}, \qquad x^{(0)} = 0, \qquad x = \begin{bmatrix} 0.49589 \\ 1.98342 \end{bmatrix}$$

e) $$\begin{cases} x^3 + x^2 y - xz = -6 \\ e^x + e^y - z = 0 \\ y^2 - 2xz = 4 \end{cases}, \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} -1.45604 \\ -1.66423 \\ 0.42249 \end{bmatrix}$$

5. Bibliografia

- Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*, *4th Edition*, PWS-KENT, 1988.
- Heitor Pina, *Métodos Numéricos*, McGrawHill – 1995.
- Edite Manuela G.P. Fernandes, *Computação Numérica*, *2ª Edição*, Universidade do Minho, 1998.
- Maria Raquel Valença, *Métodos Numéricos*, Universidade Aberta – 1996.
- Michael T. Heath. Scientific Computing an Introductory Survey. McGraw-Hill, New York, 2002 (http://www.cse.uiuc.edu/heath/scicomp/).