

# Problemas de Valores Próprios

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática  
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática Aplicada - Mestrados Eng. Química e Industrial



# Outline

- 1 Problemas de Valores Próprios
  - Problemas de Valores Próprios
  - Valores e Vectores Próprios
  - Interpretação Geométrica

# Outline

- 1 Problemas de Valores Próprios
  - Problemas de Valores Próprios
  - Valores e Vectores Próprios
  - Interpretação Geométrica
- 2 Existência, Unicidade e Condicionamento
  - Polinómio Característico
  - Propriedades Relevantes das Matrizes
  - Condicionamento do Problema de Valores Próprios

# Outline

- 1 **Problemas de Valores Próprios**
  - Problemas de Valores Próprios
  - Valores e Vectores Próprios
  - Interpretação Geométrica
- 2 **Existência, Unicidade e Condicionamento**
  - Polinómio Característico
  - Propriedades Relevantes das Matrizes
  - Condicionamento do Problema de Valores Próprios
- 3 **Cálculo de Valores e Vectores Próprios**
  - Método das Potencias e suas Variantes
  - Considerações Finais

## Problemas de Valores Próprios

- Problemas de valores próprios ocorrem em muitas áreas da ciência e da engenharia

## Problemas de Valores Próprios

- Problemas de valores próprios ocorrem em muitas áreas da ciência e da engenharia
- Valores próprios são igualmente importantes na análise de métodos numéricos

## Problemas de Valores Próprios

- Problemas de valores próprios ocorrem em muitas áreas da ciência e da engenharia
- Valores próprios são igualmente importantes na análise de métodos numéricos
- Teoria e algoritmos aplicam-se tanto a matrizes reais como a matrizes complexas

## Problemas de Valores Próprios

- Problemas de valores próprios ocorrem em muitas áreas da ciência e da engenharia
- Valores próprios são igualmente importantes na análise de métodos numéricos
- Teoria e algoritmos aplicam-se tanto a matrizes reais como a matrizes complexas
- Para matrizes complexas utiliza-se a matriz transposta conjugada,  $A^H$ , em vez da transposta,  $A^T$

## Valores e Vetores Próprios

- **Problema de valores próprios** standard: dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , encontrar um escalar  $\lambda$  e e um vector não-nulo  $x$  tal que

$$Ax = \lambda x$$

## Valores e Vetores Próprios

- **Problema de valores próprios** standard: dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , encontrar um escalar  $\lambda$  e e um vector não-nulo  $x$  tal que

$$Ax = \lambda x$$

- $\lambda$  é **valor próprio** e  $x$  o **vector próprio** correspondente

## Valores e Vetores Próprios

- **Problema de valores próprios** standard: dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , encontrar um escalar  $\lambda$  e e um vector não-nulo  $x$  tal que

$$Ax = \lambda x$$

- $\lambda$  é **valor próprio** e  $x$  o **vector próprio** correspondente
- $\lambda$  pode ser complexo mesmo que  $A$  seja real

## Valores e Vetores Próprios

- **Problema de valores próprios** standard: dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , encontrar um escalar  $\lambda$  e e um vector não-nulo  $x$  tal que

$$Ax = \lambda x$$

- $\lambda$  é **valor próprio** e  $x$  o **vector próprio** correspondente
- $\lambda$  pode ser complexo mesmo que  $A$  seja real
- Espectro =  $\lambda(A)$  = conjunto de todos os valores próprios de  $A$

## Valores e Vetores Próprios

- **Problema de valores próprios** standard: dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , encontrar um escalar  $\lambda$  e e um vector não-nulo  $x$  tal que

$$Ax = \lambda x$$

- $\lambda$  é **valor próprio** e  $x$  o **vector próprio** correspondente
- $\lambda$  pode ser complexo mesmo que  $A$  seja real
- Espectro =  $\lambda(A)$  = conjunto de todos os valores próprios de  $A$
- Raio espectral =  $\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \lambda(A)\}$

## Interpretação Geométrica

- Multiplicação pela matriz resulta na expansão ou encolhimento de qualquer vector que tenha a direcção de um dos vectores próprios

## Interpretação Geométrica

- Multiplicação pela matriz resulta na expansão ou encolhimento de qualquer vector que tenha a direcção de um dos vectores próprios
- Factor de expansão ou de contracção é dado pelo valor próprio correspondente

## Interpretação Geométrica

- Multiplicação pela matriz resulta na expansão ou encolhimento de qualquer vector que tenha a direcção de um dos vectores próprios
- Factor de expansão ou de contracção é dado pelo valor próprio correspondente
- $\lambda$  pode ser complexo mesmo que  $A$  seja real

## Interpretação Geométrica

- Multiplicação pela matriz resulta na expansão ou encolhimento de qualquer vector que tenha a direcção de um dos vectores próprios
- Factor de expansão ou de contracção é dado pelo valor próprio correspondente
- $\lambda$  pode ser complexo mesmo que  $A$  seja real
- Valores e vectores próprios decompõem comportamentos complicados originados por transformações lineares em acções simples

## Polinómio Característico

- A equação  $Ax = \lambda x$  é equivalente a

$$(A - \lambda I)x = 0$$

que tem solução não-nula  $x$  se, e apenas se, a matriz  $A - \lambda I$  for singular

## Polinómio Característico

- A equação  $Ax = \lambda x$  é equivalente a

$$(A - \lambda I)x = 0$$

que tem solução não-nula  $x$  se, e apenas se, a matriz  $A - \lambda I$  for singular

- Valores próprios de  $A$  são raízes  $\lambda_i$  do **polinómio característico**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

## Polinómio Característico

- A equação  $Ax = \lambda x$  é equivalente a

$$(A - \lambda I)x = 0$$

que tem solução não-nula  $x$  se, e apenas se, a matriz  $A - \lambda I$  for singular

- Valores próprios de  $A$  são raízes  $\lambda_i$  do **polinómio característico**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- *Teorema Fundamental da Algebra* implica que uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , tenha sempre  $n$  valores próprios, mas estes poderão não ser reais ou distintos uns dos outros

## Polinómio Característico

- A equação  $Ax = \lambda x$  é equivalente a

$$(A - \lambda I)x = 0$$

que tem solução não-nula  $x$  se, e apenas se, a matriz  $A - \lambda I$  for singular

- Valores próprios de  $A$  são raízes  $\lambda_i$  do **polinómio característico**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- *Teorema Fundamental da Algebra* implica que uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , tenha sempre  $n$  valores próprios, mas estes poderão não ser reais ou distintos uns dos outros
- Valores próprios complexos de matrizes reais ocorrem sempre aos pares conjugados: se  $\alpha + \beta i$  é um valor próprio de uma matriz real, então  $\alpha - \beta i$  também o é, sendo  $i = \sqrt{-1}$

## Exemplo: Polinómio Característico

- Determinar os valores próprios de  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

## Exemplo: Polinómio Característico

- Determinar os valores próprios de  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
- $$\det \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

## Exemplo: Polinómio Característico

- Determinar os valores próprios de  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \right) =$$

## Exemplo: Polinómio Característico

- Determinar os valores próprios de  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$(3 - \lambda)(3 - \lambda) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

## Exemplo: Polinómio Característico

- Determinar os valores próprios de  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$(3-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

então os valores próprios são dados por

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$$

## Polinómio Característico, continuação

- Não existe nenhuma formula para calcular directamente as raízes de um polinómio de grau maior do que quatro

## Polinómio Característico, continuação

- Não existe nenhuma formula para calcular directamente as raízes de um polinómio de grau maior do que quatro
- Quando  $n > 4$  utilizam-se métodos iterativos para calcular os valores próprios

## Polinómio Característico, continuação

- Não existe nenhuma formula para calcular directamente as raízes de um polinómio de grau maior do que quatro
- Quando  $n > 4$  utilizam-se métodos iterativos para calcular os valores próprios
- Métodos baseados no polinómio característico não são utilizados na prática por implicarem muito trabalho e por serem muito sensíveis aos valores dos coeficientes do polinómio

## Polinómio Característico, continuação

- Não existe nenhuma formula para calcular directamente as raízes de um polinómio de grau maior do que quatro
- Quando  $n > 4$  utilizam-se métodos iterativos para calcular os valores próprios
- Métodos baseados no polinómio característico não são utilizados na prática por implicarem muito trabalho e por serem muito sensíveis aos valores dos coeficientes do polinómio
- Polinómio característico é um instrumento teórico muito importante mas não é normalmente utilizado computacionalmente

## Diagonalização e Normalização

- Se uma matriz  $A$  tiver exactamente  $n$  vectores próprios linearmente independentes então é **diagonalizavel**

$$X^{-1}AX = D$$

em que  $X$  é a matriz não-singular constituída pelos vectores próprios de  $A$

## Diagonalização e Normalização

- Se uma matriz  $A$  tiver exactamente  $n$  vectores próprios linearmente independentes então é **diagonalizável**

$$X^{-1}AX = D$$

em que  $X$  é a matriz não-singular constituída pelos vectores próprios de  $A$

- Escala de um vectores próprios pode ser mudada arbitrariamente: se  $Ax = \lambda x$ , então  $A(\gamma x) = \lambda(\gamma x)$  para qualquer escalar  $\gamma$ , pelo que  $\gamma x$  é também um vector próprio correspondente a  $\lambda$

## Diagonalização e Normalização

- Se uma matriz  $A$  tiver exactamente  $n$  vectores próprios linearmente independentes então é **diagonalizável**

$$X^{-1}AX = D$$

em que  $X$  é a matriz não-singular constituída pelos vectores próprios de  $A$

- Escala de um vectores próprios pode ser mudada arbitrariamente: se  $Ax = \lambda x$ , então  $A(\gamma x) = \lambda(\gamma x)$  para qualquer escalar  $\gamma$ , pelo que  $\gamma x$  é também um vector próprio correspondente a  $\lambda$
- Vectores próprios são usualmente normalizados pela imposição de que a sua norma seja igual a 1

## Propriedades Relevantes das Matrizes

- Propriedades da matriz  $A$  relevantes para problemas de valores próprios

Propriedades	Definição
diagonal	$a_{ij} = 0$ para $i \neq j$
tridiagonal	$a_{ij} = 0$ para $ i - j  > 1$
triangular	$a_{ij} = 0$ para $i > j$ (superior) $a_{ij} = 0$ para $i < j$ (inferior)
Hessenberg	$a_{ij} = 0$ para $i > j + 1$ (superior) $a_{ij} = 0$ para $i < j - 1$ (inferior)
orthogonal	$A^T A = A A^T = I$
unitária	$A^H A = A A^H = I$
simétrica	$A = A^T$
hermitiana	$A = A^H$
normal	$A A^H = A^H A$

## Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- Condicionamento de um problemas de valores próprios é a sensibilidade valores e vectores próprios a pequenas mudanças na matriz

## Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- Condicionamento de um problemas de valores próprios é a sensibilidade valores e vetores próprios a pequenas mudanças na matriz
- Nem todos os valores e vetores próprios têm a mesma sensibilidade a perturbações na matriz

## Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- Condicionamento de um problemas de valores próprios é a sensibilidade valores e vetores próprios a pequenas mudanças na matriz
- Nem todos os valores e vetores próprios têm a mesma sensibilidade a perturbações na matriz
- Valores próprios podem ser muito sensíveis se os vetores próprios forem aproximadamente linearmente dependentes

## Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- Condicionamento de um problemas de valores próprios é a sensibilidade valores e vectores próprios a pequenas mudanças na matriz
- Nem todos os valores e vectores próprios têm a mesma sensibilidade a perturbações na matriz
- Valores próprios podem ser muito sensíveis se os vectores próprios forem aproximadamente linearmente dependentes
- Vectores próprios de um matriz **normal** ( $AA^H = A^H A$ ) são ortogonais, pelo que os valores próprios são bem condicionados

## Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- Condicionamento de um problemas de valores próprios é a sensibilidade valores e vetores próprios a pequenas mudanças na matriz
- Nem todos os valores e vetores próprios têm a mesma sensibilidade a perturbações na matriz
- Valores próprios podem ser muito sensíveis se os vetores próprios forem aproximadamente linearmente dependentes
- Vetores próprios de um matriz **normal** ( $AA^H = A^H A$ ) são ortogonais, pelo que os valores próprios são bem condicionados
- Como as matrizes simétricas e hermitianas são também normais, os valores próprios destas matrizes são bem condicionados

## Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- Condicionamento de um problemas de valores próprios é a sensibilidade valores e vectores próprios a pequenas mudanças na matriz
- Nem todos os valores e vectores próprios têm a mesma sensibilidade a perturbações na matriz
- Valores próprios podem ser muito sensíveis se os vectores próprios forem aproximadamente linearmente dependentes
- Vectores próprios de um matriz **normal** ( $AA^H = A^H A$ ) são ortogonais, pelo que os valores próprios são bem condicionados
- Como as matrizes simétricas e hermitianas são também normais, os valores próprios destas matrizes são bem condicionados
- Quando os valores próprios são múltiplos ou estão muito próximos uns dos outros, os vectores próprios correspondentes poderão ser sensíveis

## Exemplo 1: Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{bmatrix}$$

- 1 Verifique se  $A$  matriz é normal ou não
- 2 Verifique se  $A$  diagonalizável
- 3 Altere a entrada  $a_{22}$  para 180.01 e recalcule os seus valores próprios. O que observa?
- 4 Altere a entrada  $a_{22}$  para 179.99 e recalcule os seus valores próprios. O que observa?

## Exemplo 1, resolução

- 1 Matriz  $A$  não é normal pois  $AA^T \neq A^T A$ , efectivamente  
 $\|AA^T - A^T A\|_2 = 6.69e + 6$

## Exemplo 1, resolução

- 1 Matriz  $A$  não é normal pois  $AA^T \neq A^T A$ , efectivamente  
 $\|AA^T - A^T A\|_2 = 6.69e + 6$
- 2 Como os valores próprios de  $A$  são distintos,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 3$ , os seu valores próprios são todos linearmente independentes e como tal  $A$  é diagonalizável

## Exemplo 1, resolução

- 1 Matriz  $A$  não é normal pois  $AA^T \neq A^T A$ , efectivamente  $\|AA^T - A^T A\|_2 = 6.69e + 6$
- 2 Como os valores próprios de  $A$  são distintos,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 3$ , os seu valores próprios são todos linearmente independentes e como tal  $A$  é diagonalizável
- 3 Se a entrada  $a_{22}$  for mudada para 180.01 obtemos  $\lambda_1 = 0.207$ ,  $\lambda_2 = 2.301$  e  $\lambda_3 = 3.502$ , o que consiste numa mudança substancial dada a pequena variação efectuada numa única entrada

## Exemplo 1, resolução

- 1 Matriz  $A$  não é normal pois  $AA^T \neq A^T A$ , efectivamente  $\|AA^T - A^T A\|_2 = 6.69e + 6$
- 2 Como os valores próprios de  $A$  são distintos,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 3$ , os seu valores próprios são todos linearmente independentes e como tal  $A$  é diagonalizável
- 3 Se a entrada  $a_{22}$  for mudada para 180.01 obtemos  $\lambda_1 = 0.207$ ,  $\lambda_2 = 2.301$  e  $\lambda_3 = 3.502$ , o que consiste numa mudança substancial dada a pequena variação efectuada numa única entrada
- 4 Se a entrada  $a_{22}$  for mudada para 179.99 obtemos  $\lambda_1 = 1.664 + 1.054i$ ,  $\lambda_2 = 1.664 - 1.054i$  e  $\lambda_3 = 2.662$ , mais uma vez um pequena variação efectuada numa única entrada resulta na transformação de dois valores próprios da matriz original, bem distintos, num par de valores próprios conjugados

## Método das Potencias

- Método mais simples para calcular um par próprio (um valor e um vector próprio) é o *método das potencias*, que multiplica repetidamente um vector inicial pela matriz

## Método das Potencias

- Método mais simples para calcular um par próprio (um valor e um vector próprio) é o *método das potencias*, que multiplica repetidamente um vector inicial pela matriz
- Admitindo que  $A$  tem um único vector próprio de maior módulo, designado por  $\lambda_1$ , cujo vector próprio correspondente é  $v_1$

## Método das Potencias

- Método mais simples para calcular um par próprio (um valor e um vector próprio) é o *método das potencias*, que multiplica repetidamente um vector inicial pela matriz
- Admitindo que  $A$  tem um único vector próprio de maior módulo, designado por  $\lambda_1$ , cujo vector próprio correspondente é  $v_1$
- Então, iniciando com o vector não-nulo  $x_0$ , o esquema iterativo

$$x_k = Ax_{k-1}$$

converge para um múltiplo do vector próprio  $v_1$  correspondente ao valor próprio *dominante*  $\lambda_1$

## Método das Potencias

- Para compreender a razão do método convergir para o vector próprio associado ao valor próprio dominante exprimimos o vector inicial como combinação linear

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

em que os  $v_i$  são os vectores próprios de  $A$

## Método das Potencias

- Para compreender a razão do método convergir para o vector próprio associado ao valor próprio dominante exprimimos o vector inicial como combinação linear

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

em que os  $v_i$  são os vectores próprios de  $A$

- Então, tendo em conta que  $A^k v_i = \lambda_i^k v_i$ , verifica-se

$$x_k = Ax_{k-1} = A^2 x_{k-2} = \dots = A^k x_0 = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A^k v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k \left( \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (\lambda_i / \lambda_1)^k \alpha_i v_i \right)$$

## Método das Potencias

- Para compreender a razão do método convergir para o vector próprio associado ao valor próprio dominante exprimimos o vector inicial como combinação linear

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

em que os  $v_i$  são os vectores próprios de  $A$

- Então, tendo em conta que  $A^k v_i = \lambda_i^k v_i$ , verifica-se

$$x_k = Ax_{k-1} = A^2 x_{k-2} = \dots = A^k x_0 = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A^k v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k \left( \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (\lambda_i/\lambda_1)^k \alpha_i v_i \right)$$

- Uma vez que  $|\lambda_i/\lambda_1| > 1$ , para  $i > 1$ , potencias crescentes conduzem a zero com excepção da componente associada a  $v_1$

## Exemplo: Método das Potencias

- Rácio entre duas aproximações consecutivas de uma componente qualquer de  $x_k$  não-nula converge para o valor próprio dominante  $\lambda_1$

## Exemplo: Método das Potencias

- Rácio entre duas aproximações consecutivas de uma componente qualquer de  $x_k$  não-nula converge para o valor próprio dominante  $\lambda_1$
- Por exemplo se  $A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$  e  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , obtemos

$k$	$x_k^T$		rácio
0	0.0	1.0	
1	0.5	1.5	1.500
2	1.5	2.5	1.667
3	3.5	4.5	1.800
4	7.5	8.5	1.889
5	15.5	16.5	1.941
6	31.5	32.5	1.970
7	63.5	64.5	1.985
8	127.5	128.5	1.992

## Exemplo: Método das Potencias

- Rácio entre duas aproximações consecutivas de uma componente qualquer de  $x_k$  não-nula converge para o valor próprio dominante  $\lambda_1$

- Por exemplo se  $A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$  e  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , obtemos

$k$	$x_k^T$		rácio
0	0.0	1.0	
1	0.5	1.5	1.500
2	1.5	2.5	1.667
3	3.5	4.5	1.800
4	7.5	8.5	1.889
5	15.5	16.5	1.941
6	31.5	32.5	1.970
7	63.5	64.5	1.985
8	127.5	128.5	1.992

- Rácio converge para o valor próprio dominante que é  $\lambda_1 = 2$

## Limitações do Método das Potencias

Método das potencias pode falhar por várias razões:

- $x_0$  não ter componente na direcção de  $v_1$  (i.e  $\alpha_1 = 0$ ) - na prática não há problemas porque os erros de arredondamento acabam por introduzir essa componente

## Limitações do Método das Potencias

Método das potencias pode falhar por várias razões:

- $x_0$  não ter componente na direcção de  $v_1$  (i.e  $\alpha_1 = 0$ ) - na prática não há problemas porque os erros de arredondamento acabam por introduzir essa componente
- Pode haver mais do que um valor próprio que tenha a mesma magnitude (máxima) em módulo, neste caso as iterações vão convergir para um vector que é combinação linear dos vectores próprios associados aos valores próprios dominantes

## Limitações do Método das Potencias

Método das potencias pode falhar por várias razões:

- $x_0$  não ter componente na direcção de  $v_1$  (i.e  $\alpha_1 = 0$ ) - na prática não há problemas porque os erros de arredondamento acabam por introduzir essa componente
- Pode haver mais do que um valor próprio que tenha a mesma magnitude (máxima) em módulo, neste caso as iterações vão convergir para um vector que é combinação linear dos vectores próprios associados aos valores próprios dominantes
- Para matriz e vector inicial reais as iterações podem nunca convergir para vectores próprios complexos

## Método das Potencias Normalizadas

- Crescimento geométrico das componentes em cada iteração pode provocar *overflow* (ou *underflow* se  $\lambda_1 < 1$ )

## Método das Potencias Normalizadas

- Crescimento geométrico das componentes em cada iteração pode provocar *overflow* (ou *underflow* se  $\lambda_1 < 1$ )
- Vector próprio aproximado tem de ser normalizado em cada iteração, exigindo por exemplo que o módulo da sua maior componente seja igual a 1, resultando a iteração

$$y_k = Ax_{k-1}$$

$$x_k = y_k / \|y_k\|_\infty$$

## Método das Potencias Normalizadas

- Crescimento geométrico das componentes em cada iteração pode provocar *overflow* (ou *underflow* se  $\lambda_1 < 1$ )
- Vector próprio aproximado tem de ser normalizado em cada iteração, exigindo por exemplo que o módulo da sua maior componente seja igual a 1, resultando a iteração

$$y_k = Ax_{k-1}$$

$$x_k = y_k / \|y_k\|_\infty$$

- Com a normalização:  $\|y_k\|_\infty \rightarrow |\lambda_1|$  e  $x_k \rightarrow v_1 / \|v_1\|_\infty$

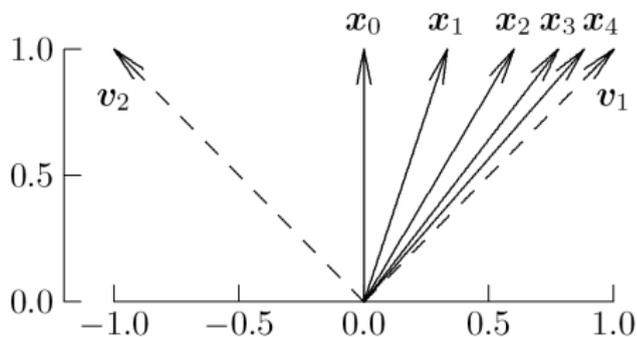
## Exemplo: Método das Potencias Normalizadas

- Vamos repetir o exemplo anterior com a normalização das potencias

$k$	$x_k^T$		$\ y_k\ _\infty$
0	0.000	1.0	
1	0.333	1.0	1.500
2	0.600	1.0	1.667
3	0.778	1.0	1.800
4	0.882	1.0	1.889
5	0.939	1.0	1.941
6	0.969	1.0	1.970
7	0.984	1.0	1.985
8	0.992	1.0	1.992

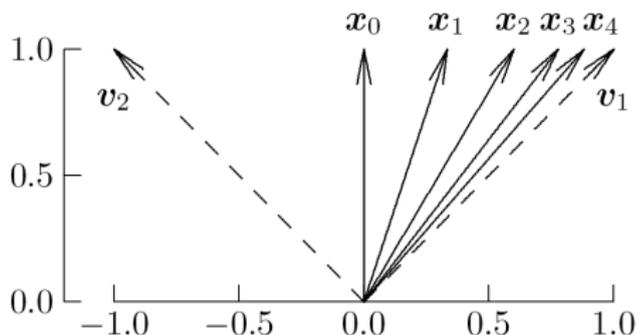
## Interpretação Geométrica

- Descrição geométrica do método das potencias



## Interpretação Geométrica

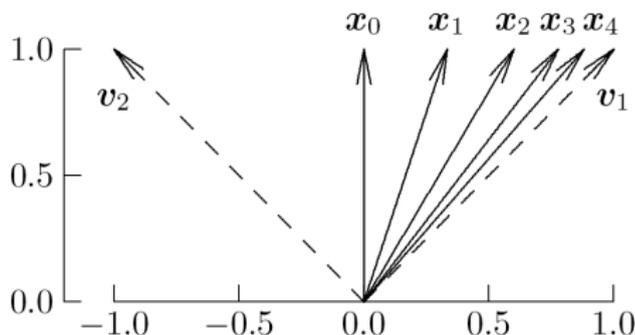
- Descrição geométrica do método das potencias



- Vector inicial  $x_0 = v_1 + v_2$  contém igual componentes nos vectores próprios  $v_1$  e  $v_2$  (vectores a tracejado)

## Interpretação Geométrica

- Descrição geométrica do método das potencias



- Vector inicial  $x_0 = v_1 + v_2$  contém igual componentes nos vectores próprios  $v_1$  e  $v_2$  (vectores a tracejado)
- Repetição da multiplicação por  $A$  faz com que a componente em  $v_1$  (correspondente ao maior valor próprio, 2) seja dominante, pelo que a sequência de vectores  $x_k$  convergem para  $v_1$

## Método das Potencias com *Shift*

- Translação do espectro (*shift*): se  $Ax = \lambda x$  e  $\sigma$  um escalar, então  $(A - \sigma I)x = (\lambda - \sigma)x$ , pelo que os valores próprios de uma matriz translada são os valores próprios da matriz transladados

## Método das Potencias com *Shift*

- Translação do espectro (*shift*): se  $Ax = \lambda x$  e  $\sigma$  um escalar, então  $(A - \sigma I)x = (\lambda - \sigma)x$ , pelo que os valores próprios de uma matriz translada são os valores próprios da matriz transladados
- Taxa de convergência do método das potencias depende de  $|\lambda_2/\lambda_1|$ , em que  $\lambda_2$  é o segundo maior valor próprio em módulo

## Método das Potencias com *Shift*

- Translação do espectro (*shift*): se  $Ax = \lambda x$  e  $\sigma$  um escalar, então  $(A - \sigma I)x = (\lambda - \sigma)x$ , pelo que os valores próprios de uma matriz translada são os valores próprios da matriz transladados
- Taxa de convergência do método das potencias depende de  $|\lambda_2/\lambda_1|$ , em que  $\lambda_2$  é o segundo maior valor próprio em módulo
- Escolhendo um *shift* adequado,  $A - \sigma I$ , tal que

$$\left| \frac{\lambda_2 - \sigma}{\lambda_1 - \sigma} \right| < \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$$

é possível acelerar a convergência

## Método das Potencias com *Shift*

- Translação do espectro (*shift*): se  $Ax = \lambda x$  e  $\sigma$  um escalar, então  $(A - \sigma I)x = (\lambda - \sigma)x$ , pelo que os valores próprios de uma matriz translada são os valores próprios da matriz transladados
- Taxa de convergência do método das potencias depende de  $|\lambda_2/\lambda_1|$ , em que  $\lambda_2$  é o segundo maior valor próprio em módulo
- Escolhendo um *shift* adequado,  $A - \sigma I$ , tal que

$$\left| \frac{\lambda_2 - \sigma}{\lambda_1 - \sigma} \right| < \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$$

é possível acelerar a convergência

- No fim do processo iterativo o *shift* tem de ser adicionado ao resultado de forma a recuperar o valor próprio da matriz original

## Método da Iteração Inversa

- Inversão: Se  $A$  é não-singular e  $Ax = \lambda x$  com  $x \neq 0$ , então  $\lambda \neq 0$  e  $A^{-1}x = (1/\lambda)x$ , assim os valores próprios da inversa são os recíprocos dos valores próprios da matriz original

## Método da Iteração Inversa

- Inversão: Se  $A$  é não-singular e  $Ax = \lambda x$  com  $x \neq 0$ , então  $\lambda \neq 0$  e  $A^{-1}x = (1/\lambda)x$ , assim os valores próprios da inversa são os recíprocos dos valores próprios da matriz original
- Se procuramos o valor próprio de menor magnitude aplicamos o método das potencias com  $A^{-1}$  em vez de  $A$

## Método da Iteração Inversa

- Inversão: Se  $A$  é não-singular e  $Ax = \lambda x$  com  $x \neq 0$ , então  $\lambda \neq 0$  e  $A^{-1}x = (1/\lambda)x$ , assim os valores próprios da inversa são os recíprocos dos valores próprios da matriz original
- Se procuramos o valor próprio de menor magnitude aplicamos o método das potencias com  $A^{-1}$  em vez de  $A$
- Isto conduz ao esquema da **iteração inversa**

$$y_k = A^{-1}x_{k-1}$$

$$x_k = y_k / \|y_k\|_\infty$$

que é equivalente ao método das potencias aplicado a  $A^{-1}$

## Método da Iteração Inversa

- Inversão: Se  $A$  é não-singular e  $Ax = \lambda x$  com  $x \neq 0$ , então  $\lambda \neq 0$  e  $A^{-1}x = (1/\lambda)x$ , assim os valores próprios da inversa são os recíprocos dos valores próprios da matriz original
- Se procuramos o valor próprio de menor magnitude aplicamos o método das potencias com  $A^{-1}$  em vez de  $A$
- Isto conduz ao esquema da **iteração inversa**

$$y_k = A^{-1}x_{k-1}$$

$$x_k = y_k / \|y_k\|_\infty$$

que é equivalente ao método das potencias aplicado a  $A^{-1}$

- Em geral a inversa de  $A$  não é calculada explicitamente, em vez disso resolve-se em cada iteração o sistema de equações lineares  $Ay_k = x_{k-1}$

## Método da Iteração Inversa

- Inversão: Se  $A$  é não-singular e  $Ax = \lambda x$  com  $x \neq 0$ , então  $\lambda \neq 0$  e  $A^{-1}x = (1/\lambda)x$ , assim os valores próprios da inversa são os recíprocos dos valores próprios da matriz original
- Se procuramos o valor próprio de menor magnitude aplicamos o método das potencias com  $A^{-1}$  em vez de  $A$
- Isto conduz ao esquema da **iteração inversa**

$$y_k = A^{-1}x_{k-1}$$

$$x_k = y_k / \|y_k\|_\infty$$

que é equivalente ao método das potencias aplicado a  $A^{-1}$

- Em geral a inversa de  $A$  não é calculada explicitamente, em vez disso resolve-se em cada iteração o sistema de equações lineares  $Ay_k = x_{k-1}$
- Se  $A$  for factorizada no início, essa decomposição poderá ser usada para a resolução do sistema em cada iteração

## Método da Iteração Inversa, continuação

- Iteração inversa converge para os vectores próprios associados aos valores próprios de **menor magnitude** de  $A$

## Método da Iteração Inversa, continuação

- Iteração inversa converge para os vectores próprios associados aos valores próprios de **menor magnitude** de  $A$
- Valor próprio obtido é o dominante de  $A^{-1}$ , conseqüentemente o seu recíproco é o valor próprio de menor magnitude  $A$

## Exemplo: Método da Iteração Inversa

- Aplicando o método da iteração inversa ao exemplo anterior para calcular o valor próprio de menor magnitude obtemos a sequência

$k$	$x_k^T$		$\ y_k\ _\infty$
0	0.000	1.0	
1	-0.333	1.0	0.750
2	-0.600	1.0	0.833
3	-0.778	1.0	0.900
4	-0.882	1.0	0.944
5	-0.939	1.0	0.971
6	-0.969	1.0	0.985

que converge para 1 (que é o seu próprio recíproco neste caso)

## Iteração Inversa com *Shift*

- Tal como antes, estratégia da translação, trabalhar com  $A - \sigma I$  para um dado escalar  $\sigma$ , pode acelerar consideravelmente a convergência

## Iteração Inversa com *Shift*

- Tal como antes, estratégia da translação, trabalhar com  $A - \sigma I$  para um dado escalar  $\sigma$ , pode acelerar consideravelmente a convergência
- Iteração inversa é particularmente útil para calcular vectores próprios associados a valores próprios dos quais se dispõe de valores aproximados, pois esta vai convergir rapidamente quando aplicada à matriz translada  $A - \lambda I$  se  $\lambda$  for um valor próprio aproximado

## Iteração Inversa com *Shift*

- Tal como antes, estratégia da translação, trabalhar com  $A - \sigma I$  para um dado escalar  $\sigma$ , pode acelerar consideravelmente a convergência
- Iteração inversa é particularmente útil para calcular vectores próprios associados a valores próprios dos quais se dispõe de valores aproximados, pois esta vai convergir rapidamente quando aplicada à matriz translada  $A - \lambda I$  se  $\lambda$  for um valor próprio aproximado
- Iteração inversa é também útil para calcular o valor próprio mais próximo de um dado valor  $\beta$ , pois se  $\beta$  seja usado como *Shift* a iteração inversa irá convergir para o valor próprio de menor magnitude da matriz translada

## Quociente de Rayleigh

- Dado um vector próprio aproximado  $x$  de uma matriz real  $A$ , a determinação da melhor estimativa do valor próprio associado  $\lambda$  pode ser considerado como um problema de mínimos quadrados lineares de dimensão  $n \times 1$

$$x\lambda \cong Ax$$

## Quociente de Rayleigh

- Dado um vector próprio aproximado  $x$  de uma matriz real  $A$ , a determinação da melhor estimativa do valor próprio associado  $\lambda$  pode ser considerado como um problema de mínimos quadrados lineares de dimensão  $n \times 1$

$$x\lambda \cong Ax$$

- Através da equação normal  $x^T x\lambda = x^T Ax$  obtemos a solução

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

## Quociente de Rayleigh

- Dado um vector próprio aproximado  $x$  de uma matriz real  $A$ , a determinação da melhor estimativa do valor próprio associado  $\lambda$  pode ser considerado como um problema de mínimos quadrados lineares de dimensão  $n \times 1$

$$x\lambda \cong Ax$$

- Através da equação normal  $x^T x\lambda = x^T Ax$  obtemos a solução

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

- Esta quantidade, conhecida como **quociente de Rayleigh**, tem muitas propriedades úteis

## Iteração do Quociente de Rayleigh

- Dado um vector próprio aproximado, o quociente de Rayleigh proporciona uma boa estimativa do valor próprio correspondente

## Iteração do Quociente de Rayleigh

- Dado um vector próprio aproximado, o quociente de Rayleigh proporciona uma boa estimativa do valor próprio correspondente
- Por outro lado, a iteração inversa (com *shift*) converge rapidamente para o vector próprio se utilizarmos uma boa aproximação do valor próprio como *shift*

## Iteração do Quociente de Rayleigh

- Dado um vector próprio aproximado, o quociente de Rayleigh proporciona uma boa estimativa do valor próprio correspondente
- Por outro lado, a iteração inversa (com *shift*) converge rapidamente para o vector próprio se utilizarmos uma boa aproximação do valor próprio como *shift*
- Estas duas ideias são combinadas na **Iteração do Quociente de Rayleigh**

$$\sigma_k = x_k^T A x_k / x_k^T x_k$$

$$(A - \sigma_k I) y_{k+1} = x_k$$

$$x_{k+1} = y_{k+1} / \|y_{k+1}\|_\infty$$

começando com um vector não nulo  $x_0$

## Iteração do Quociente de Rayleigh, continuação

- Quociente de Rayleigh é especialmente eficiente em matrizes simétricas

## Iteração do Quociente de Rayleigh, continuação

- Quociente de Rayleigh é especialmente eficiente em matrizes simétricas
- Devido ao facto do *shift* mudar em cada iteração a matriz tem de ser refactorizada em cada iteração, isto aumenta de forma considerável os custos computacionais a menos que a matriz tenha alguma forma especial que facilitem a sua factorização

## Iteração do Quociente de Rayleigh, continuação

- Quociente de Rayleigh é especialmente eficiente em matrizes simétricas
- Devido ao facto do *shift* mudar em cada iteração a matriz tem de ser refactorizada em cada iteração, isto aumenta de forma considerável os custos computacionais a menos que a matriz tenha alguma forma especial que facilitem a sua factorização
- Estas ideias funcionam também com matrizes complexas, para as quais a transposta tem de ser substituída pela transposta conjugada, pelo que o quociente Rayleigh será  $x^H Ax / x^H x$

## Exemplo: Iteração do Quociente de Rayleigh

- Aplicando o método da iteração do quociente de Rayleigh à matriz anterior e partido de um vector inicial  $x_0$  gerado aleatoriamente, a convergência é obtida em duas iterações

$k$	$x_k^T$		$\sigma_k$
0	0.807	0.397	1.896
1	0.924	1.000	1.998
2	1.000	1.000	2.000

## Iterações Simultâneas

- Método das **iterações simultâneas** é o método mais simples para a obtenção de vários pares de valores e vectores próprios, consiste em repetir sequencialmente a multiplicação da matriz por um conjunto de vectores

## Iterações Simultâneas

- Método das **iterações simultâneas** é o método mais simples para a obtenção de vários pares de valores e vectores próprios, consiste em repetir sequencialmente a multiplicação da matriz por um conjunto de vectores
- Partindo de um conjunto de  $p$  vectores reunidos numa matriz  $X_0$  de dimensão  $n \times p$  e característica  $p$ , o esquema iterativo é

$$X_k = AX_{k-1}$$

## Iterações Simultâneas

- Método das **iterações simultâneas** é o método mais simples para a obtenção de vários pares de valores e vectores próprios, consiste em repetir sequencialmente a multiplicação da matriz por um conjunto de vectores
- Partindo de um conjunto de  $p$  vectores reunidos numa matriz  $X_0$  de dimensão  $n \times p$  e característica  $p$ , o esquema iterativo é

$$X_k = AX_{k-1}$$

- $X_k$  converge para uma base do subspaço gerado pelos  $p$  vectores próprios associados aos  $p$  valores próprios dominantes de  $A$ , pelo que é também conhecido por **iteração de subspaço**

## Iterações Simultâneas

- Método das **iterações simultâneas** é o método mais simples para a obtenção de vários pares de valores e vectores próprios, consiste em repetir sequencialmente a multiplicação da matriz por um conjunto de vectores
- Partindo de um conjunto de  $p$  vectores reunidos numa matriz  $X_0$  de dimensão  $n \times p$  e característica  $p$ , o esquema iterativo é

$$X_k = AX_{k-1}$$

- $X_k$  converge para uma base do subspaço gerado pelos  $p$  vectores próprios associados aos  $p$  valores próprios dominantes de  $A$ , pelo que é também conhecido por **iteração de subspaço**
- Supondo  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ , o método irá convergir se  $|\lambda_p| > |\lambda_{p+1}|$

## Ortonormalização

- Um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $q_1, q_2, \dots, q_m$  é ortonormal se  $q_i^T q_i = 1$  e  $q_i^T q_j = 0$  se  $i \neq j$

## Ortonormalização

- Um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $q_1, q_2, \dots, q_m$  é ortonormal se  $q_i^T q_i = 1$  e  $q_i^T q_j = 0$  se  $i \neq j$
- Partindo de um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $x_1, x_2, \dots, x_m$  linearmente independentes e geradores de um determinado subspaço, é possível obter um conjunto de vectores ortonormais  $q_1, q_2, \dots, q_m$ , geradores do mesmo subspaço

## Ortonormalização

- Um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $q_1, q_2, \dots, q_m$  é ortonormal se  $q_i^T q_j = 1$  e  $q_i^T q_j = 0$  se  $i \neq j$
- Partindo de um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $x_1, x_2, \dots, x_m$  linearmente independentes e geradores de um determinado subspaço, é possível obter um conjunto de vectores ortonormais  $q_1, q_2, \dots, q_m$ , geradores do mesmo subspaço
- Processo de **ortonormalização de Gram-Shmidt** consiste em percorrer sequencialmente os vectores  $x_i$ , normalizando-os e removendo-lhes as componentes associadas aos vectores anteriores

## Ortonormalização

- Um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $q_1, q_2, \dots, q_m$  é ortonormal se  $q_i^T q_i = 1$  e  $q_i^T q_j = 0$  se  $i \neq j$
- Partindo de um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $x_1, x_2, \dots, x_m$  linearmente independentes e geradores de um determinado subspaço, é possível obter um conjunto de vectores ortonormais  $q_1, q_2, \dots, q_m$ , geradores do mesmo subspaço
- Processo de **ortonormalização de Gram-Shmidt** consiste em percorrer sequencialmente os vectores  $x_i$ , normalizando-os e removendo-lhes as componentes associadas aos vectores anteriores
- Na forma matricial o processo é designado por **factorização QR**, assim se  $X$  for a matriz dos vectores a ortonormalizar

$$X = QR$$

em que a matriz  $Q$  é ortonormal ( $Q^T Q = Q Q^T = I$ ) e  $R$  é triangular superior

## Iteração Ortogonal

- Tal como no método das potências a normalização também é necessária para o método da iteração simultânea

## Iteração Ortogonal

- Tal como no método das potências a normalização também é necessária para o método da iteração simultânea
- Cada coluna de  $X_k$  converge para o vector próprio dominante, pelo que as suas colunas ficam cada vez mais linearmente dependente e conseqüentemente o problema é cada vez mais mal condicionado

## Iteração Ortogonal

- Tal como no método das potências a normalização também é necessária para o método da iteração simultânea
- Cada coluna de  $X_k$  converge para o vector próprio dominante, pelo que as suas colunas ficam cada vez mais linearmente dependente e conseqüentemente o problema é cada vez mais mal condicionado
- Prevenção destes problemas faz-se orthonormalizando as colunas de  $X_k$  em cada iteração, isto é, efectuando a sua factorização  $QR$

$$Q_k R_k = X_{k-1}$$

$$X_k = A Q_k$$

em que  $Q_k R_k$  é a factorização  $QR$  de  $X_k$

## Iteração QR

- Para  $p = n$  as  $X_0$ , as matrizes

$$A_k = Q^H A Q$$

geradas pela iteração ortogonal converge para uma forma triangular (ou triangular por blocos) das quais se extrai facilmente todos os valores próprios de  $A$

## Iteração QR

- Para  $p = n$  as  $X_0$ , as matrizes

$$A_k = Q^H A Q$$

geradas pela iteração ortogonal converge para uma forma triangular (ou triangular por blocos) das quais se extrai facilmente todos os valores próprios de  $A$

- **Iteração QR** calcula as sucessivas matrizes  $A_k$  sem que o produto acima seja efectuado explicitamente

## Iteração QR

- Para  $p = n$  as  $X_0$ , as matrizes

$$A_k = Q^H A Q$$

geradas pela iteração ortogonal converge para uma forma triangular (ou triangular por blocos) das quais se extrai facilmente todos os valores próprios de  $A$

- **Iteração QR** calcula as sucessivas matrizes  $A_k$  sem que o produto acima seja efectuado explicitamente
- Iniciando com  $A_0 = A$ , na iteração  $k$  efectua a factorização QR

$$Q_k R_k = A_{k-1}$$

e forma o produto contrario

$$A_k = R_k Q_k$$

## Iteração QR, continuação

- Sucessivas matrizes  $A_k$  são unitariamente semelhantes umas às outras

$$A_k = R_k Q_k = Q_k^H A Q_k$$

## Iteração QR, continuação

- Sucessivas matrizes  $A_k$  são unitariamente semelhantes umas às outras

$$A_k = R_k Q_k = Q_k^H A Q_k$$

- As entradas diagonais de  $A_k$  (ou valores próprios dos blocos diagonais) vão convergir para os valores próprios de  $A$

## Iteração QR, continuação

- Sucessivas matrizes  $A_k$  são unitariamente semelhantes umas às outras

$$A_k = R_k Q_k = Q_k^H A Q_k$$

- As entradas diagonais de  $A_k$  (ou valores próprios dos blocos diagonais) vão convergir para os valores próprios de  $A$
- Produto das matrizes ortogonais  $Q_k Q_{k-1} \dots Q_1$  converge para os vectores próprios de  $A$

## Iteração QR, continuação

- Sucessivas matrizes  $A_k$  são unitariamente semelhantes umas às outras

$$A_k = R_k Q_k = Q_k^H A Q_k$$

- As entradas diagonais de  $A_k$  (ou valores próprios dos blocos diagonais) vão convergir para os valores próprios de  $A$
- Produto das matrizes ortogonais  $Q_k Q_{k-1} \dots Q_1$  converge para os vectores próprios de  $A$
- Se  $A$  for simétrica, matriz  $A_k$  converge para uma matriz diagonal

## Exemplo: Iteração QR

- Seja  $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

## Exemplo: Iteração QR

- Seja  $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
- Calcular a fatorização QR

$$A_0 = Q_1 R_1 = \begin{bmatrix} 0.962 & -0.275 \\ 0.275 & 0.962 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.28 & 3.02 \\ 0 & 3.30 \end{bmatrix}$$

e formar o produto contrario

$$A_1 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 7.830 & 0.906 \\ 0.906 & 3.170 \end{bmatrix}$$

## Exemplo: Iteração QR

- Seja  $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
- Calcular a factorização QR

$$A_0 = Q_1 R_1 = \begin{bmatrix} 0.962 & -0.275 \\ 0.275 & 0.962 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.28 & 3.02 \\ 0 & 3.30 \end{bmatrix}$$

e formar o produto contrario

$$A_1 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 7.830 & 0.906 \\ 0.906 & 3.170 \end{bmatrix}$$

- Entradas fora da diagonal são agora mais pequenas e entradas na diagonal próximas dos valores próprios 8 e 3

## Exemplo: Iteração QR

- Seja  $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
- Calcular a factorização QR

$$A_0 = Q_1 R_1 = \begin{bmatrix} 0.962 & -0.275 \\ 0.275 & 0.962 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.28 & 3.02 \\ 0 & 3.30 \end{bmatrix}$$

e formar o produto contrario

$$A_1 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 7.830 & 0.906 \\ 0.906 & 3.170 \end{bmatrix}$$

- Entradas fora da diagonal são agora mais pequenas e entradas na diagonal próximas dos valores próprios 8 e 3
- Processo continua até convergir impondo, por exemplo, que as entradas fora da diagonal sejam inferiores a uma determinada tolerância, verificando-se então uma boa aproximação das entradas da diagonal aos valores próprios de  $A$

## Métodos Disponíveis na NMLibforOctave

Na biblioteca NMLibforOctave encontram-se programados os seguintes métodos:

- Método das potências: `[LAMBDA, V, NBIT] = EIG_POWER(A, X0, ITMAX, TOL)`

## Métodos Disponíveis na NMLibforOctave

Na biblioteca NMLibforOctave encontram-se programados os seguintes métodos:

- Método das potências: `[LAMBDA, V, NBIT] = EIG_POWER(A, X0, ITMAX, TOL)`
- Iteração inversa: `[LAMBDA, V, NBIT] = EIG_INVERSE(A, X0, ITMAX, TOL)`

## Métodos Disponíveis na NMLibforOctave

Na biblioteca NMLibforOctave encontram-se programados os seguintes métodos:

- Método das potências:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_POWER(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração inversa:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_INVERSE(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração dos quocientes de Rayleigh:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_RAYLEIGH(A, X0, ITMAX, TOL)$

## Métodos Disponíveis na NMLibforOctave

Na biblioteca NMLibforOctave encontram-se programados os seguintes métodos:

- Método das potências:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_POWER(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração inversa:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_INVERSE(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração dos quocientes de Rayleigh:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_RAYLEIGH(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração ortogonal:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_ORTHO(A, X0, ITMAX, TOL)$

## Métodos Disponíveis na NMLibforOctave

Na biblioteca NMLibforOctave encontram-se programados os seguintes métodos:

- Método das potências:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_POWER(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração inversa:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_INVERSE(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração dos quocientes de Rayleigh:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_RAYLEIGH(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração ortogonal:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_ORTHO(A, X0, ITMAX, TOL)$
- Iteração QR:  $[LAMBDA, V, NBIT] = EIG\_QR(A, ITMAX, TOL)$

## Bibliografia

Exposição baseada essencialmente em

- Michael T. Heath. "Scientific Computing an Introductory Survey". McGraw-Hill, 2002, New York.