Mestrados em Engenharia Química e Industrial - 2008/2009
Matemática Aplicada

Exame Época Recurso - 17/02/2009

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

Instruções:

- É permitida a consulta bibliográfica.
- Os cálculos deverão ser efectuados recorrendo ao software Octave.
- Apresente os resultados dos cálculos com uma precisão de pelo menos 4 dígitos significativos.

I - Parte teórica (Duração: 20 min, cotação: 4 valores).

1. Indique a razão pela qual é necessário conhecer o valor da função $\mathbf{y}$ em um instante t_0 para que a solução da EDO $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ seja única.
2. De que depende a exactidão da solução de uma EDO obtida através de um método numérico?
3. Classifique cada uma das seguintes EDPs como hiperbólicas, parabólicas ou elípticas. Diga também se estas são ou não dependentes do tempo.
   (a) Equação de Laplace
   (b) Equação da onda
   (c) Equação do calor
   (d) Equação de Poisson
4. No contexto da optimização não-linear que desvantagens apresenta o método de Newton comparativamente com o método do gradiente conjugado.

II - Parte prática (duração: 1 h e 40 min, cotação: 16 valores)

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3.9766 & 0.3945 & 0.4198 & 1.1159 \\ 0.3945 & 3.7328 & -0.3097 & 0.1129 \\ 0.4198 & -0.3097 & 3.5675 & 0.6079 \\ 1.1159 & 0.1129 & 0.6079 & 2.7231 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule com uma tolerância de 10^{-7} o valor próprio de maior magnitude e o vector próprio correspondente, utilizando como vector inicial um vector de uns. Quantas iterações foram necessárias?
   (b) Calcule com uma tolerância de 10^{-7} o valor próprio de menor magnitude e o vector próprio correspondente, utilizando como vector inicial um vector gerado aleatoriamente. Quantas iterações foram necessárias?
   (c) Para cada um dos pares próprios anteriores determine a invariância em norma-2, isto é $\|Av - \lambda v\|_2$.

2. Considere o problema de uma massa suspensa numa mola com amortecimento. A equação da distancia à origem é

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

em que m é a massa, k é a constante de rigidez da mola e c a constante de amortecimento.

   (a) Escreva este problema na forma de um sistema de EDOs de primeira ordem.

   (b) Considerando $m = 1$, $c = 2$ e $k = 1.5$, classifique este problema em relação à estabilidade das suas soluções.

   (c) Considerando que o deslocamento original é nulo ($y(0) = 0$) e que a velocidade original é de 5 unidades de comprimento por unidade de tempo ($y'(0) = 5$), determine $y(t)$, a posição da massa, para $0 \leq t \leq 1$ usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo $h = 0.25$.

3. Consideramos a equação da onda

$$u_{tt} = 2u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

com condições iniciais

$$u(0,x) = 3\sin(x\pi), \quad u_t(0,x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

e condições de fronteira

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0 \quad t \geq 0$$

   (a) Deduza o esquema implícito de primeira ordem para a resolução numérica através da discretização total por diferenças finitas.

   (b) Utilize o esquema anterior para aproximar $u(t_2, x)$, considerando $\Delta t = 0.2$ e $\Delta x = 0.25$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = 3\left(y - x^2\right)^2 + (1-x)^2 .$$

Aproxime o valor mínimo desta função através de duas iterações do método de Newton, usando como aproximação inicial o ponto $\mathbf{x}_0 = [1.5 \quad -1]^T$. Apresente todos os cálculos efectuados.