

Mestrados em Engenharia Química e Industrial - 2008/2009

Matemática Aplicada

Exame Época Normal - 27/01/2009

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

Instruções:

- É permitida a consulta bibliográfica.
- Os cálculos deverão ser efectuados recorrendo ao software Octave.
- Apresente os resultados dos cálculos com uma precisão de pelo menos 4 dígitos significativos.
- Os computadores não podem estar ligados à *Internet*.

I - Parte teórica (Duração: 20 min, cotação: 5 valores).

1. Para que vector próprio converge o método das potência?
2. Para que vector próprio converge o método da iteração inversa?
3. Se quisesse calcular todos os valores e vectores próprios de uma matriz que método utilizaria.
4. Porque razão os métodos implícitos são mais eficientes do que os explícitos na resolução de equações diferenciais ordinárias? Quais são as suas desvantagens?
5. Que vantagens apresentam os métodos iterativos comparativamente com os métodos directos na resolução de sistemas de equações algébricas lineares resultantes da aplicação do método das diferenças finitas à resolução de EDPs?

II - Parte prática (duração: 1 h e 40 min, cotação: 15 valores)

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2.9766 & 0.3945 & 0.4198 & 1.1159 \\ 0.3945 & 2.7328 & -0.3097 & 0.1129 \\ 0.4198 & -0.3097 & 2.5675 & 0.6079 \\ 1.1159 & 0.1129 & 0.6079 & 1.7231 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule com uma tolerância de 10^{-6} o valor próprio de maior magnitude e o vector próprio correspondente, utilizando como vector inicial um vector gerado aleatoriamente. Quantas iterações foram necessárias?
- (b) Calcule com uma tolerância de 10^{-6} o valor próprio de menor magnitude e o vector próprio correspondente, utilizando como vector inicial um vector de uns. Quantas iterações foram necessárias?
- (c) Calcule com uma tolerância de 10^{-6} todos os valores e vectores próprio. Quantas iterações foram necessárias?

2. Considere a EDO escalar e não linear $y' = -3ty^2$, com valor inicial $y(0) = 1$ e passo de tempo $h = 0.25$.

- (a) Aproxime o valor de $y(0.25)$ através do método de Euler simples.
- (b) Aproxime o valor de $y(0.25)$ através de um método implícito de segunda ordem.
- (c) Use um método preditor-corrector de segunda ordem para aproximar os valores de y compreendidos entre $t_0 = 0$ e $t_f = 1$.

3. Consideramos a equação do calor

$$u_t = cu_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

com condições inicial e de fronteira

$$u(0, x) = \sin(\pi x), \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0$$

- (a) Deduza o esquema explícito de primeira ordem para resolução numérica através da discretização total por diferenças finitas.
- (b) Se quisermos determinar a distribuição das temperaturas ao longo do tempo que valores poderão ser atribuídos a Δt se $\Delta x = 0.25$ e $c = 1$?
- (c) Arbitre um valor para Δt e determine as temperaturas nos tempos t_1 e t_2 .

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = 3(x_1^4 - x_2^2 - 2x_1^2x_2) + (2 - 2x_1)^2.$$

Aproxime o valor mínimo desta função através de duas iterações do método de Newton, usando como aproximação inicial o ponto $\mathbf{x}_0 = [1.5 \ -1]^T$. Apresente todos os cálculos efectuados.