

# Capítulo 4 - Problemas de Valores Próprios

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática

Mestrados em Engenharia da Construção  
Métodos de Aproximação em Engenharia  
1º Semestre 2011/2012



# Outline

## Problemas de Valores Próprios

Problemas de Valores Próprios

Valores e Vectores Próprios

Interpretação Geométrica

## Existência, Unicidade e Condicionamento

Polinómio Característico

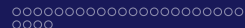
Transformações de Semelhança

Condicionamento do Problema de Valores Próprios

## Cálculo de Valores e Vectores Próprios

Método das Potencias e suas Variantes

Considerações Finais



## Problemas de Valores Próprios

- ▶ Problemas de valores próprios ocorrem em muitas áreas da ciência e da engenharia
- ▶ Valores próprios são igualmente importantes na análise de métodos numéricos
- ▶ Teoria e algoritmos aplicam-se tanto a matrizes reais como a matrizes complexas
- ▶ Para matrizes complexas utiliza-se a matriz transposta conjugada,  $A^H$ , em vez da transposta,  $A^T$

## Valores e Vetores Próprios

- ▶ **Problema de valores próprios** típico: dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , encontrar um escalar  $\lambda$  e um vector não-nulo  $x$  tal que

$$Ax = \lambda x$$

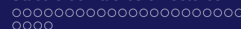
- ▶  $\lambda$  é **valor próprio** e  $x$  o **vector próprio** correspondente
- ▶  $\lambda$  pode ser complexo mesmo que  $A$  seja real
- ▶ Espectro =  $\lambda(A)$  = conjunto de todos os valores próprios de  $A$
- ▶ Raio espectral =  $\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \lambda(A)\}$
- ▶ Existe também o chamado problema de **valores próprios à esquerda**

$$y^T A = \lambda y^T$$

contudo não abordaremos este assunto neste curso

## Interpretação Geométrica

- ▶ Quando se multiplica uma matriz por um vector resulta um novo vector que geralmente tem uma nova direcção, um novo comprimento e sentido
- ▶ Mas resulta apenas na expansão ou redução (mudança de comprimento e possivelmente de sentido) se o vector original estiver na direcção de um dos vectores próprios da matriz
- ▶ Factor de expansão ou de contracção é dado pelo valor próprio correspondente
- ▶ Escala de um vectores próprios pode ser mudada arbitrariamente: se  $Ax = \lambda x$ , então  $A(\gamma x) = \lambda(\gamma x)$  para qualquer escalar  $\gamma$ , pelo que  $\gamma x$  é também um vector próprio correspondente a  $\lambda$
- ▶ Vectores próprios são usualmente normalizados pela imposição de que a sua norma seja igual a 1



## Polinómio Característico

- ▶ A equação  $Ax = \lambda x$  é equivalente a

$$(A - \lambda I)x = 0$$

que tem solução não-nula  $x$  se, e apenas se, a matriz  $A - \lambda I$  for singular

- ▶ Valores próprios de  $A$  são raízes  $\lambda_i$  do **polinómio característico**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- ▶ *Teorema Fundamental da Algebra* implica que uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , tenha sempre  $n$  valores próprios, mas estes poderão não ser reais ou distintos uns dos outros
- ▶ Valores próprios complexos de matrizes reais ocorrem sempre aos pares conjugados: se  $\alpha + \beta i$  é um valor próprio de uma matriz real, então  $\alpha - \beta i$  também o é, sendo  $i = \sqrt{-1}$

## Exemplo 1: Polinómio Característico

- Determinar os valores próprios de  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$(3-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

então os valores próprios são dados por

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$$

## Polinómio Característico, continuação

- ▶ Não existe nenhuma formula para calcular directamente as raízes de um polinómio de grau maior do que quatro
- ▶ Quando  $n > 4$  utilizam-se métodos iterativos para calcular os valores próprios
- ▶ Métodos baseados no polinómio característico não são utilizados na prática por implicarem muito trabalho e por serem muito sensíveis aos valores dos coeficientes do polinómio
- ▶ Polinómio característico é um instrumento teórico muito importante mas não é normalmente utilizado computacionalmente



## Alguns Tipos de Matrizes Importantes

| Propriedades | Definição                                                                    |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------|
| diagonal     | $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$                                                 |
| tridiagonal  | $a_{ij} = 0$ para $ i - j  > 1$                                              |
| triangular   | $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (superior)<br>$a_{ij} = 0$ para $i < j$ (inferior) |
| orthogonal   | $A^T A = A A^T = I$                                                          |
| unitária     | $A^H A = A A^H = I$                                                          |
| simétrica    | $A = A^T$                                                                    |
| hermitiana   | $A = A^H$                                                                    |
| normal       | $A A^H = A^H A$                                                              |

- ▶ Valores próprios de matriz diagonal são os próprios elementos da diagonal
- ▶ Valores próprios de matriz triangular são os elementos da diagonal
- ▶ Matriz com  $n$  valores próprios distintos possui  $n$  vectores próprios linearmente independentes

## Transformação de Semelhança

- ▶ Duas matrizes  $A$  e  $B$ , de dimensão  $n \times n$ , são semelhantes se existir uma matriz  $T$ , não-singular, tal que

$$T^{-1}AT = B$$

- ▶ Como duas matrizes semelhantes possuem os mesmos valores próprios, tenta-se transformar a matriz original  $A$  numa matriz  $B$  cuja estrutura permita calcular mais facilmente os seus valores próprios
- ▶ Se uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , tiver exactamente  $n$  vectores próprios linearmente independentes então é **diagonalizável**

$$X^{-1}AX = D$$

em que  $X$  é a matriz não-singular constituída pelos vectores próprios de  $A$ , e  $D$  uma matriz diagonal cujas entradas são os valores próprios de  $A$

## Transformação de Semelhança, continuação

- ▶ Uma matriz normal é unitariamente ( $X$  é unitária) semelhante a uma matriz diagonal  $D$
- ▶ Uma matriz simétrica é ortogonalmente ( $X$  é orthogonal) semelhante a uma matriz real-diagonal  $D$
- ▶ Se a matriz não for normal ela não pode ser reduzida a uma matriz diagonal mas, no entanto, pode ser reduzida a uma matriz triangular através de uma transformação de semelhança unitária ( $T$  é unitária)

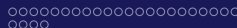


## Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- ▶ Condicionamento de um problemas de valores próprios é a sensibilidade de valores e vetores próprios a pequenas mudanças na matriz
- ▶ Supondo que  $A$  é uma matriz não-defectiva, com valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , e conjunto completo de vetores próprios linearmente independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que formam as colunas de uma matriz não-singular  $X = [x_1 x_2 \dots x_n]$  tal que  $X^{-1}AX = D$ ; se  $\mu$  for um valor próprio da matriz perturbada  $A + E$  e  $\lambda_k$  o vector próprio de  $A$  mais próximo de  $\mu$ , verifica-se que

$$|\mu - \lambda_k| \leq \|X^{-1}\|_2 \cdot \|X\|_2 \cdot \|E\|_2 = \text{cond}_2(X) \|E\|_2$$

- ▶ Valores próprios podem ser muito sensíveis se os vetores próprios forem aproximadamente linearmente dependentes
- ▶ Vetores próprios de um matriz **normal** ( $AA^H = A^H A$ ) são ortogonais, pelo que os valores próprios são bem condicionados



## Condicionamento do Problema de Valores Próprios, continuação

- ▶ Nem todos os valores próprios têm a mesma sensibilidade a perturbações na matriz; formula anterior pode levar a sobrevalorizar o condicionamento de todos os valores próprios
- ▶ Supondo que  $\Delta\lambda$  é o erro associado a um valor próprio  $\lambda$  em resultado de uma perturbação  $E$  introduzida na matriz  $A$ , verifica-se

$$|\Delta\lambda| \leq \frac{\|y\|_2 \cdot \|x\|_2}{|y^H x|} \|E\|_2 = \frac{1}{\cos(\theta)} \|E\|_2$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre o vector próprio à direita  $x$  e o vector próprio à esquerda  $y$  correspondentes ao valor próprio  $\lambda$ .

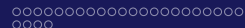
- ▶ Como nas matrizes simétricas e hermitianas os vectores próprios à direita e à esquerda são iguais, os valores próprios destas matrizes são bem condicionados

## Exemplo 2: Condicionamento do Problema de Valores Próprios

- Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{bmatrix}$$

- 1 Verifique se  $A$  matriz é normal ou não
- 2 Verifique se  $A$  diagonalizável
- 3 Altere a entrada  $a_{22}$  para 180.01 e recalcule os seus valores próprios. O que observa?
- 4 Altere a entrada  $a_{22}$  para 179.99 e recalcule os seus valores próprios. O que observa?



## Exemplo 1, resolução

- 1 Matriz  $A$  não é normal pois  $AA^T \neq A^T A$ , efectivamente  
 $\|AA^T - A^T A\|_2 = 6.69e + 6$
- 2 Como os valores próprios de  $A$  são distintos,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 3$ , os seus vectores próprios são todos linearmente independentes e como tal  $A$  é diagonalizável
- 3 Se a entrada  $a_{22}$  for mudada para 180.01 obtemos  $\lambda_1 = 0.207$ ,  $\lambda_2 = 2.301$  e  $\lambda_3 = 3.502$ , o que consiste numa mudança substancial dada a pequena variação efectuada numa única entrada
- 4 Se a entrada  $a_{22}$  for mudada para 179.99 obtemos  $\lambda_1 = 1.664 + 1.054i$ ,  $\lambda_2 = 1.664 - 1.054i$  e  $\lambda_3 = 2.662$ , mais uma vez um pequena variação efectuada numa única entrada resulta na transformação de dois valores próprios da matriz original, bem distintos, num par de valores próprios conjugados

## Método das Potencias

- ▶ Método mais simples para calcular um par próprio (um valor e um vector próprio) é o *método das potencias*, que multiplica repetidamente um vector inicial pela matriz  $A$
- ▶ Admitindo que  $A$  tem um único vector próprio de maior módulo, designado por  $\lambda_1$ , cujo vector próprio correspondente é  $v_1$
- ▶ Então, iniciando com o vector não-nulo  $x_0$ , o esquema iterativo

$$x_k = Ax_{k-1}$$

converge para um múltiplo do vector próprio  $v_1$  correspondente ao valor próprio *dominante*  $\lambda_1$



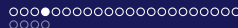
- $$X_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i$$

$$x_k = Ax_{k-1} = A^2x_{k-2} = \dots = A^kx_0 = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A^k v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k \left( \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (\lambda_i / \lambda_1)^k \alpha_i v_i \right)$$

- 17/ 41

- 1000



## Limitações do Método das Potencias

Método das potencias pode falhar por várias razões:

- ▶  $x_0$  não ter componente na direcção de  $v_1$  (i.e  $\alpha_1 = 0$ ) - na prática não há problemas porque os erros de arredondamento acabam por introduzir essa componente
- ▶ Pode haver mais do que um valor próprio que tenha a mesma magnitude (máxima) em módulo, neste caso as iterações vão convergir para um vector que é combinação linear dos vectores próprios associados aos valores próprios dominantes
- ▶ Para matriz e vector inicial reais as iterações podem nunca convergir para vectores próprios complexos



## Método das Potencias Normalizadas

- ▶ Crescimento geométrico das componentes em cada iteração pode provocar *overflow* (ou *underflow* se  $\lambda_1 < 1$ )
- ▶ Vector próprio aproximado tem de ser normalizado em cada iteração, exigindo por exemplo que o módulo da sua maior componente seja igual a 1, resultando a iteração

$$y_k = Ax_{k-1}$$

$$x_k = y_k / \|y_k\|_\infty$$

- ▶ Com a normalização:  $\|y_k\|_\infty \rightarrow |\lambda_1|$  e  $x_k \rightarrow v_1 / \|v_1\|_\infty$

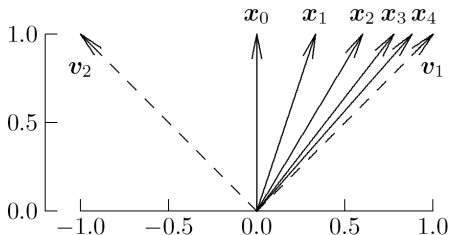
## Exemplo 3: Método das Potencias Normalizadas

- Vamos repetir o exemplo anterior com a normalização das potencias

| $k$ | $x_k^T$ |     | $\ y_k\ _\infty$ |
|-----|---------|-----|------------------|
| 0   | 0.000   | 1.0 |                  |
| 1   | 0.333   | 1.0 | 1.500            |
| 2   | 0.600   | 1.0 | 1.667            |
| 3   | 0.778   | 1.0 | 1.800            |
| 4   | 0.882   | 1.0 | 1.889            |
| 5   | 0.939   | 1.0 | 1.941            |
| 6   | 0.969   | 1.0 | 1.970            |
| 7   | 0.984   | 1.0 | 1.985            |
| 8   | 0.992   | 1.0 | 1.992            |

## Interpretação Geométrica

- Descrição geométrica do método das potencias



- Vector inicial  $x_0 = v_1 + v_2$  contém igual componentes nos vectores próprios  $v_1$  e  $v_2$  (vectores a tracejado)
- Repetição da multiplicação por  $A$  faz com que a componente em  $v_1$  (correspondente ao maior valor próprio, 2) seja dominante, pelo que a sequência de vectores  $x_k$  convergem para  $v_1$

## Método das Potencias com *Shift*

- ▶ Translação do espectro (*shift*): se  $Ax = \lambda x$  e  $\sigma$  um escalar, então  $(A - \sigma I)x = (\lambda - \sigma)x$ , pelo que os valores próprios de uma matriz translada são os valores próprios transladados e o vectores próprios são os mesmos
- ▶ Taxa de convergência do método das potencias depende de  $|\lambda_2/\lambda_1|$ , em que  $\lambda_2$  é o segundo maior valor próprio em módulo
- ▶ Escolhendo um *shift* adequado,  $A - \sigma I$ , tal que

$$\left| \frac{\lambda_2 - \sigma}{\lambda_1 - \sigma} \right| < \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$$

é possível acelerar a convergência

- ▶ No fim do processo iterativo o *shift* tem de ser adicionado ao resultado de forma a recuperar o valor próprio da matriz original

## Método da Iteração Inversa

- ▶ Inversão: Se  $A$  é não-singular e  $Ax = \lambda x$  com  $x \neq 0$ , então  $\lambda \neq 0$  e  $A^{-1}x = (1/\lambda)x$ , assim os valores próprios da inversa são os recíprocos dos valores próprios da matriz original
- ▶ Se procuramos o valor próprio de menor magnitude da matriz  $A$  aplicamos o método das potencias multiplicando sucessivamente por  $A^{-1}$  em vez de  $A$
- ▶ Isto conduz ao esquema da **iteração inversa**

$$y_k = A^{-1}x_{k-1}$$

$$x_k = y_k / \|y_k\|_\infty$$

- ▶ Em geral a inversa de  $A$  não é calculada explicitamente, em vez disso resolve-se em cada iteração o sistema de equações lineares  $Ay_k = x_{k-1}$
- ▶ Se  $A$  for factorizada no início, essa decomposição poderá ser usada para a resolução do sistema em cada iteração



## Método da Iteração Inversa, continuação

- ▶ Iteração inversa converge para os vetores próprios associados aos valores próprios de **menor magnitude** de  $A$
- ▶ Valor próprio obtido é o dominante de  $A^{-1}$ , consequentemente o seu recíproco é o valor próprio de menor magnitude  $A$

## Exemplo 4: Método da Iteração Inversa

- Aplicando o método da iteração inversa ao exemplo anterior para calcular o valor próprio de menor magnitude obtemos a sequência

| $k$ | $x_k^T$ |     | $\ y_k\ _\infty$ |
|-----|---------|-----|------------------|
| 0   | 0.000   | 1.0 |                  |
| 1   | -0.333  | 1.0 | 0.750            |
| 2   | -0.600  | 1.0 | 0.833            |
| 3   | -0.778  | 1.0 | 0.900            |
| 4   | -0.882  | 1.0 | 0.944            |
| 5   | -0.939  | 1.0 | 0.971            |
| 6   | -0.969  | 1.0 | 0.985            |

que converge para 1 (que é o seu próprio recíproco neste caso)

## Iteração Inversa com *Shift*

- ▶ Tal como antes, estratégia da translação, trabalhar com  $A - \sigma I$  para um dado escalar  $\sigma$ , pode acelerar consideravelmente a convergência
- ▶ Iteração inversa é particularmente útil para calcular vectores próprios associados a valores próprios dos quais se dispõe de valores aproximados, pois esta vai convergir rapidamente quando aplicada à matriz translada  $A - \lambda I$  se  $\lambda$  for um valor próprio aproximado
- ▶ Iteração inversa é também útil para calcular o valor próprio mais próximo de um dado valor  $\beta$ , pois se  $\beta$  for usado como *Shift* a iteração inversa irá convergir para o valor próprio de menor magnitude ( $\lambda - \beta$ ) da matriz transladada

## Quociente de Rayleigh

- ▶ Dado um vector próprio aproximado  $x$  de uma matriz real  $A$ , a determinação da melhor estimativa do valor próprio associado  $\lambda$  pode ser considerado como um problema de mínimos quadrados lineares de dimensão  $n \times 1$

$$x\lambda \cong Ax$$

- ▶ Através da equação normal  $x^T x\lambda = x^T Ax$  obtemos a solução

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

- ▶ Esta quantidade, conhecida como **quociente de Rayleigh**, tem muitas propriedades úteis

## Iteração do Quociente de Rayleigh

- ▶ Dado um vector próprio aproximado, o quociente de Rayleigh proporciona uma boa estimativa do valor próprio correspondente
- ▶ Por outro lado, a iteração inversa (com *shift*) converge rapidamente para o vector próprio se utilizarmos uma boa aproximação do valor próprio como *shift*
- ▶ Estas duas ideias são combinadas na **Iteração do Quociente de Rayleigh**

$$\sigma_k = x_k^T A x_k / x_k^T x_k$$

$$(A - \sigma_k I) y_{k+1} = x_k$$

$$x_{k+1} = y_{k+1} / \|y_{k+1}\|_\infty$$

começando com um vector não nulo  $x_0$

## Iteração do Quociente de Rayleigh, continuação

- ▶ Quociente de Rayleigh é especialmente eficiente em matrizes simétricas
- ▶ Devido ao facto do *shift* mudar em cada iteração a matriz tem de ser refactorizada em cada iteração, isto aumenta de forma considerável os custos computacionais a menos que a matriz tenha alguma forma especial que facilitem a sua factorização
- ▶ Estas ideias funcionam também com matrizes complexas, para as quais a transposta tem de ser substituída pela transposta conjugada, pelo que o quociente Rayleigh será  $x^H Ax / x^H x$

## Exemplo 5: Iteração do Quociente de Rayleigh

- Aplicando o método da iteração do quociente de Rayleigh à matriz anterior e partido de um vector inicial  $x_0$  gerado aleatoriamente, a convergência é obtida em duas iterações

| $k$ | $x_k^T$ |       | $\sigma_k$ |
|-----|---------|-------|------------|
| 0   | 0.807   | 0.397 | 1.896      |
| 1   | 0.924   | 1.000 | 1.998      |
| 2   | 1.000   | 1.000 | 2.000      |

## Iterações Simultâneas

- ▶ Método das **iterações simultâneas** é o método mais simples para a obtenção de vários pares de valores e vetores próprios, consiste em repetir sequencialmente a multiplicação da matriz por um conjunto de vetores
- ▶ Partindo de um conjunto de  $p$  vetores reunidos numa matriz  $X_0$  de dimensão  $n \times p$  e característica  $p$ , o esquema iterativo é

$$X_k = AX_{k-1}$$

- ▶  $X_k$  converge para uma base do subspaço gerado pelos  $p$  vetores próprios associados aos  $p$  valores próprios dominantes de  $A$ , pelo que é também conhecido por **iteração de subspaço**
- ▶ Supondo  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ , o método irá convergir se  $|\lambda_p| > |\lambda_{p+1}|$



## Ortonormalização

- ▶ Um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $q_1, q_2, \dots, q_m$  é ortonormal se  $q_i^T q_i = 1$  e  $q_i^T q_j = 0$  se  $i \neq j$
- ▶ Partindo de um conjunto de vectores reais  $n$ -dimensionais  $x_1, x_2, \dots, x_m$  linearmente independentes e geradores de um determinado subspaço, é possível obter um conjunto de vectores ortonormais  $q_1, q_2, \dots, q_m$ , geradores do mesmo subspaço
- ▶ Processo de **ortonormalização de Gram-Shmidt** consiste em percorrer sequencialmente os vectores  $x_i$ , normalizando-os e removendo-lhes as componentes associadas aos vectores anteriores
- ▶ Na forma matricial o processo é designado por **factorização QR**, assim se  $X$  for a matriz dos vectores a ortonormalizar

$$X = QR$$

em que a matriz  $Q$  é ortogonal ( $Q^T Q = Q Q^T = I$ ) e  $R$  é triangular superior

## Iteração Ortogonal

- ▶ Tal como no método das potências a normalização também é necessária para o método da iteração simultânea
- ▶ Cada coluna de  $X_k$  converge para o vector próprio dominante, pelo que as suas colunas ficam cada vez mais linearmente dependente e consequentemente o problema é cada vez mais mal condicionado
- ▶ Prevenção destes problemas faz-se orthonormalizando as colunas de  $X_k$  em cada iteração, isto é, efectuando a sua factorização  $QR$

$$Q_k R_k = X_{k-1}$$

$$X_k = A Q_k$$

em que  $Q_k R_k$  é a factorização  $QR$  de  $X_k$

## Iteração QR

- ▶ Para  $p = n$  as  $X_0 = I$ , as matrizes

$$A_k = Q_k^H A Q_k$$

geradas pela iteração ortogonal converge para uma forma triangular (ou triangular por blocos) das quais se extrai facilmente todos os valores próprios de  $A$

- ▶ **Iteração QR** calcula as sucessivas matrizes  $A_k$  sem que o produto acima seja efectuado explicitamente
- ▶ Iniciando com  $A_0 = A$ , na iteração  $k$  efectua a factorização QR

$$Q_k R_k = A_{k-1}$$

e forma o produto contrario

$$A_k = R_k Q_k$$

## Iteração QR, continuação

- ▶ Sucessivas matrizes  $A_k$  são unitariamente semelhantes umas às outras

$$A_k = R_k Q_k = Q_k^H A_{k-1} Q_k$$

- ▶ As entradas diagonais de  $A_k$  (ou valores próprios dos blocos diagonais) vão convergir para os valores próprios de  $A$
- ▶ Produto das matrizes ortogonais  $Q_k Q_{k-1} \dots Q_1$  converge para os vectores próprios de  $A$
- ▶ Se  $A$  for simétrica, matriz  $A_k$  converge para uma matriz diagonal

## Exemplo 6: Iteração QR

- ▶ Seja  $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
- ▶ Calcular a factorização QR

$$A_0 = Q_1 R_1 = \begin{bmatrix} 0.962 & -0.275 \\ 0.275 & 0.962 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.28 & 3.02 \\ 0 & 3.30 \end{bmatrix}$$

e formar o produto contrario

$$A_1 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 7.830 & 0.906 \\ 0.906 & 3.170 \end{bmatrix}$$

- ▶ Entradas fora da diagonal são agora mais pequenas e entradas na diagonal próximas dos valores próprios 8 e 3
- ▶ Processo continua até convergir impondo, por exemplo, que as entradas fora da diagonal sejam inferiores a uma determinada tolerância, verificando-se então uma boa aproximação das entradas da diagonal aos valores próprios de  $A$

## Problema de Valores Próprios Generalizado

- ▶ **Problema de Valores Próprios Generalizado** tem a forma

$$Ax = \lambda Bx$$

em que  $A$  e  $B$  são matrizes conhecidas.

- ▶ Na engenharia de estruturas  $A$  é designada por matriz de rigidez e  $B$  por matriz de massa
- ▶ Se ambas as matrizes  $A$  e  $B$  não forem singulares, o problema de valores próprios generalizado pode ser convertido num dos clássicos problemas de valores próprios:

$$(B^{-1}A)x = \lambda x \quad \text{ou} \quad (A^{-1}B)x = 1/\lambda x$$

- ▶ Se  $A$  e  $B$  são simétricas e uma delas é positiva definida, a simetria pode ser preservada através da factorização de Cholesky; por exemplo se  $B = LL^T$  o problema pode ser reescrito como

$$(L^{-1}AL^{-T})y = \lambda y$$

em que  $x$  é recuperado resolvendo  $L^Tx = y$

## Outros Métodos e Software

- Existe uma classe de métodos designados por métodos do subspaço de Krylov especialmente adaptados a resolução de problemas de grande dimensão em que a matriz dos coeficientes é esparsa (consultar bibliografia):
  - ▶ Método de Lanczos: para matrizes simétricas ou hermitianas
  - ▶ Método de Arnoldi: para matrizes não-simétricas e não-hermitianas
- Funções disponíveis no Octave para o cálculo de valores próprios:
  - ▶ Iteração QR:  $[V, \lambda] = \text{eig}(A)$
  - ▶ Métodos de Krylov:  $[V, D, \text{flag}] = \text{eigs}(A, \dots)$

## Métodos Disponíveis na NMLibforOctave

Na biblioteca NMLibforOctave encontram-se programados os seguintes métodos:

- ▶ Método das potências: `[LAMBDA, V, NBIT] = eig_power(A, X0, ITMAX, TOL)`
- ▶ Iteração inversa: `[LAMBDA, V, NBIT] = eig_inverse(A, X0, ITMAX, TOL)`
- ▶ Iteração dos quocientes de Rayleigh: `[LAMBDA, V, NBIT] = eig_rayleigh(A, X0, ITMAX, TOL)`
- ▶ Iteração ortogonal: `[LAMBDA, V, NBIT] = eig_ortho(A, X0, ITMAX, TOL)`
- ▶ Iteração QR: `[LAMBDA, V, NBIT] = eig_qr(A, ITMAX, TOL)`



## Bibliografia

Exposição baseada essencialmente no capítulo 4 de

- ▶ Michael T. Heath. "Scientific Computing an Introductory Survey". McGraw-Hill, 2002, New York.