Capítulo 8 - Integral Definido

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

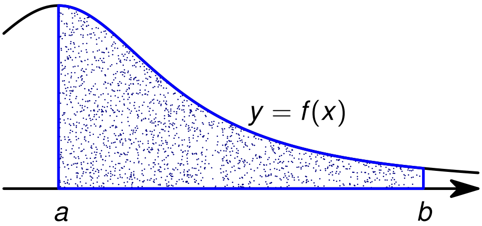
Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2011/2012

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

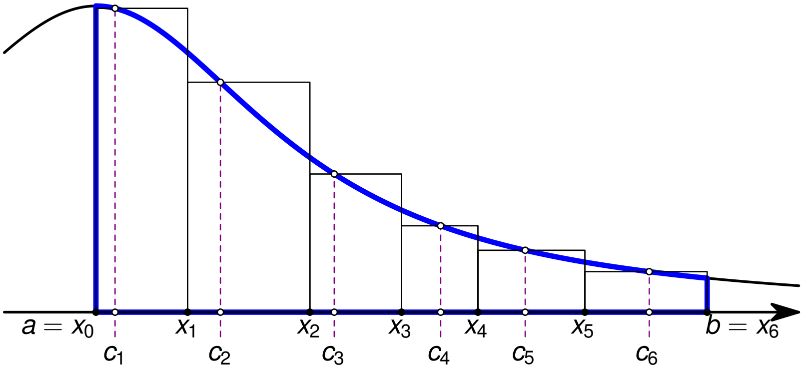
Sumário

Como Calcular a Área sob uma Função?



- Como calcular a área a sombreado?
- Situada entre a função $y = f(x)$ e o eixo dos x
- Limitada à esquerda por $x = a$ e à direita por $x = b$

Decomposição da Area em Múltiplos Rectângulos



Decomposição da Area em Múltiplos Rectângulos, continuação

- Decompondo o intervalo $[a; b]$ em vários sub-intervalos
- $[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \dots, \quad [x_{n-1}, x_n]$
- Com $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
- Em cada intervalo escolhemos um ponto c_k para $k = 1, 2, \dots, n$
- Área aproximada por

$$R = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

(*soma de Riemann*)

Exemplo 1: área sob uma função constante $f(x) = k$

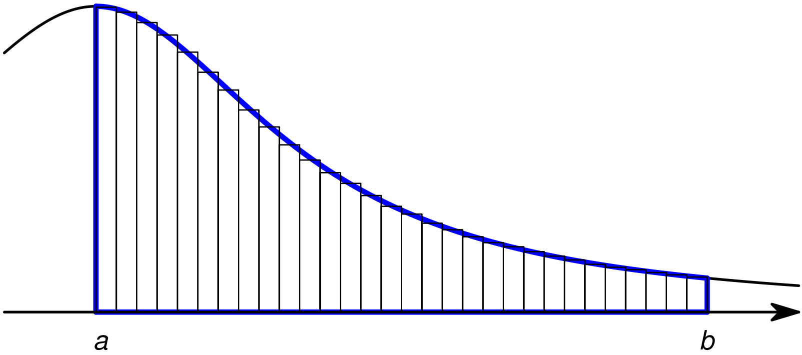
Calcular a área sob a função $f(x) = k$ no intervalo $[0; x]$

1. Decompor o intervalo $[0; x]$ em sub-intervalos de amplitude Δx
2. Somar as áreas correspondentes a cada sub-intervalo:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x \\ &= k\Delta x + k\Delta x + \ldots + k\Delta x \\ &= k(\Delta x + \Delta x + \ldots + \Delta x) \\ &= kx\end{aligned}$$

- Área é dada pela função kx, por exemplo, se $x = 2$ a área $= 2k$
- Se k for negativo área $= |kx|$
- Como $(kx)' = k = f(x)$, a função que nos dá a área é primitiva de $f(x)$, i.é, $\boxed{\text{área} = |F(x)|}$

Decomposição da Area em Múltiplos Rectângulos, continuação



- Quando função não é constante a decomposição em sub-intervalos não aproxima tão bem a área total
- Quanto maior for o número de sub-intervalos melhor será a aproximação

Integral Definido

- Soma de Riemann: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$
- Área entre a e b é aproximada pela soma de Riemann (área $\approx |S_n|$)
- Área $= |\lim_{n\to\infty} S_n| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right|$
- Se todos os intervalos tiverem a mesma amplitude Δx

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

por sua vez

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema Fundamenta do Cálculo

Se f for uma função cujo integral $\int_a^b f(x)dx$ existe, e se F é uma primitiva de f no interval $[a, b]$, verifica-se que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Abreviadamente, podemos escrever:

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{def}}{=} \big[F(x)\big]_{x=a}^{b} = \big[F(x)\big]_a^b$$

Exemplo 2: Teorema Fundamenta do Cálculo

Calcular $\int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx$

Começamos por calcular a primitiva de $f(x) = 2 - x - x^2$

$$\int (2 - x - x^2)dx = 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c$$

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left[2(1) - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3} + c\right] - \left[2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} + c\right]$$

$$= (2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (-4 - 2 + \frac{8}{3})$$

$$= \frac{9}{2}$$

Aplicações do Integral Definido

Entre outras aplicações, o integral definido pode ser utilizado para calcular áreas e volumes definidos analiticamente por funções

- Áreas sob funções
- Áreas entre funções
- Volumes definidos pela rotação de funções em torno de um eixo

Exemplo 3: calcular área sob uma função

Determinar a área entre o eixo x e $y = x^3$ de $x = -1$ até $x = 1$
Resolvendo de forma imediata obtemos

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Processo correcto consiste em calcular a área entre $y = x^3$ e $y = 0$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^{0} (0 - x^3) dx + \int_{0}^{1} (x^3 - 0) dx \\ &= -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx \\ &= -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} \\ &= -\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 4: área entre funções

Determinar a área entre as funções $y = x$ e $y = x^3$ de $x = -1$ até $x = 1$

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5: volume de revolução

Determinar o volume do sólido que resulta da rotação en torno do eixo x da função $y = x$ de $x = 0$ até $x = 2$

Sólido resulta da soma de todas as circunferências de espessura dx e raio x desde 0 até 2

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi f(x)^2 dx \\ &= \int_0^2 \pi x^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 x^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \pi \left[\frac{8}{3} - \frac{0}{3} \right] = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 6: volume de revolução

Determinar o volume do sólido que resulta da rotação en torno do eixo y da função $y = x^2$ de $y = 0$ até $y = 4$

Quando a rotação é em torno do eixo y, devemos ter uma função $x = f(y)$, neste caso

$$x = \sqrt{y} \quad (\text{para} \quad 0 \leq y \leq 4)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \int_0^4 \pi f(y)^2 dy \\
&= \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy \\
&= \pi \int_0^4 y dy \\
&= \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = \pi\,[8 - 0] = 8\pi
\end{aligned}$$

Bibliografia

- Eduardo J.C. Martinho, J. da Costa Oliveira e M. Amaral Fortes, "Matemática para o Estudo da Física". Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.
- Dale Ewen e Michael A. Topper, “Cálculo Técnico”, Hemus, 1981
- Earl W. Swokowski, "Cálculo Com Geometria Analítica, Volume 1". McGraw-Hill, 1983.