Capítulo 6 - Derivação de Funções Reais de Variável Real

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2011/2012

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Sumário

Velocidade Instantânea

Posição de um veículo que se desloca entre dois pontos é dada por uma função $y = f(x)$ em que x representa o tempo

- Distância percorrida a velocidade média: $v_{\text{med}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- Exemplo: Supondo que uma partícula em movimento, cuja posição é dada por $y = x^3 + 1$ cm, inicia o deslocamento em $a = 0$ seg. e pára em $b = 12$ seg., velocidade média será

$$v_{\text{med}} = \frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \frac{(12^3 + 1) - (0^3 + 1)}{12} = 144 \quad \text{cm/seg}$$

- Velocidade média não informa sobre o tipo de movimento entre a e b, por vezes queremos saber detalhadamente o movimento em cada instante
- Velocidade instantânea:

$$v_{\text{inst}} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Definição de Derivada

Taxa de variação de uma função num ponto x:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

é a derivada da função f no ponto x

Exemplo: Uma partícula em movimento, cuja posição é dada por $y = 3x^2 + 1$ cm, no tempo $x = 2$ seg. tem velocidade instantânea

$$\begin{aligned} v_{\text{inst}} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3(2+\Delta x)^2 + 1\right] - \left[3(2)^2 + 1\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(12 + 3\Delta x)\Delta x}{\Delta x} \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} 12 + 3\Delta x \quad = 12 \quad \text{cm/seg} \end{aligned}$$

Interpretação Geométrica da Derivada

- Recta secante à função $f(x)$ em x e $x + \Delta x$ tem declive

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Uma recta tangente à função $f(x)$ em x tem declive

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

- Derivada de uma função num ponto x representa o declive da recta tangente à função nesse ponto

Derivada como Função

- Derivada de uma função num ponto x qualquer resulta numa nova função
- *Exemplo*: derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ para um x qualquer

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3(x+\Delta x)^2 + 1\right] - \left[3x^2 + 1\right]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6x + 3\Delta x)\Delta x}{\Delta x} \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x \quad = 6x
\end{aligned}$$

Derivada de $f(x)$ é uma função representada por $\frac{dy}{dx}$, y', $\frac{d}{dx}\,[f(x)]$ ou $f'(x)$

Regras de Derivação

Aplicando a definição de derivada

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

deduzem-se as expressões correspondentes às derivadas de qualquer função
De acordo com as propriedades dos limites temos

- $\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = c\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$, com c uma constante
- $\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$
- $\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] - \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$

Derivada de uma Função Polinomial

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$, com c uma constante
- $\frac{d}{dx}(x) = 1$
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx}\left(2x^3 + x - 6\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(2x^3 + x - 6\right) &= \left(2x^3 + x - 6\right)' \\
&= (2x^3)' + (x)' - (6)' \\
&= 2(x^3)' + 1 - 0 \\
&= 2(3x^2) + 1 \\
&= 6x^2 + 1
\end{aligned}$$

Regra da cadeia:

Se $y = f(u)$, $u = g(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existirem, então a função composta definida por $y = f\left[g(x)\right]$ tem derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x)$$

Exemplo: se $y = u^3$ e $u = x^2 + 1$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} &= 3u^2u' \\ &= 3(x^2+1)^2(x^2+1)' \\ &= 3(x^2+1)^2(2x) \\ &= 6x(x^2+1)^2\end{aligned}$$

Derivada do Produtos de Funções

Seja $y = f(x)$ uma função que resulta do produto de duas funções $y = u.v$ com $u = g(x)$ e $v = h(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx}\left[(4x+3)(7x-1)\right]$
Considerando $u = 4x + 3$, $v = 7x - 1$ e $y = u.v$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\
&= uv' + vu' \\
&= (4x+3)(7x-1)' + (7x-1)(4x+3)' \\
&= (4x+3)(7) + (7x-1)(4) \\
&= 28x + 21 + 28x - 4 \\
&= 56x + 17
\end{aligned}$$

Derivada do Quociente de Funções

Seja $y = f(x)$ uma função que resulta do quociente de duas funções $y = u/v$ com $u = g(x)$ e $v = h(x) \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx}\left(\frac{5x+3}{4x^2-7}\right)$. Considerando $u = 5x + 3$, $v = 4x^2 - 7$ e $y = u/v$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{vu' - uv'}{v^2}\\ &= \frac{(4x^2-7)(5x+3)' - (5x+3)(4x^2-7)'}{(4x^2-7)^2}\\ &= \frac{(4x^2-7)(5) - (5x+3)(8x)}{(4x^2-7)^2}\\ &= \frac{20x^2 - 35 - 40x^2 - 24x}{(4x^2-7)^2} = \frac{-20x^2 - 24x - 35}{(4x^2-7)^2}\end{aligned}$$

Derivada da Potência de uma Funções

Seja $y = u^n$ com $u = f(x) \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x^2-2}\right)$. Como $\sqrt{3x^2-2} = (3x^2-2)^{1/2}$, consideramos $u = 3x^2 - 2$ e $y = u^{1/2}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[(3x^2-2)^{1/2}\right] \\
&= \frac{1}{2}(3x^2-2)^{1/2-1}(3x^2-2)' \\
&= \frac{1}{2}(3x^2-2)^{-1/2}(6x) \\
&= \frac{3x}{\sqrt{3x^2-2}}
\end{aligned}$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

- $\frac{d}{dx}(\text{sen}(u)) = (\cos(u))\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cos(u)) = -(\text{sen}(u))\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\text{tg}(u)) = (\sec^2(u))\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\text{cotg}(u)) = -(\text{cosec}^2(u))\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\sec(u)) = (\sec^2(u))(\text{tg}(u))\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\text{cosec}(u)) = -(\text{cosec}(u))(\text{cotg}(u))\frac{du}{dx}$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx}\cos\left(x^4 - 2x\right)$. Considerando $u = x^4 - 2x$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos u) &= -(\text{sen} u)\frac{du}{dx} \\
&= -(\text{sen} u)(x^4 - 2x)' \\
&= -(\text{sen} u)(4x^3 - 2) \\
&= (-4x^3 + 2)\text{sen}\left(x^4 - 2x\right)
\end{aligned}$$

Derivadas das Funções Exponencial e Logaritmo

- $\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u}(\log_b e)\frac{du}{dx}$ com $e = 2,718...$
- $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(b^u) = \frac{b^u}{\log_b e}\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$

Exemplo: $\frac{d}{dx}\ln(5x^2) = \frac{1}{5x^2}(5x^2)' = \frac{10x}{5x^2} = \frac{2}{x}$
Exemplo: $\frac{d}{dx}(e^{-2x}) = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x}$

Derivada de Funções Implícitas

- Uma equação da forma $y = 2x^2 - 3$ define explicitamente y como função de x
- A equação $4x^2 - 2y = 6$ define a mesma função
- Diz-se que y é uma função implícita de x

Exemplo: Derivar a função implícita $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$

$$\frac{d}{dx}(y^4 + 3y - 4x^3) = \frac{d}{dx}(5x + 1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y^4) + \frac{d}{dx}(3y) - \frac{d}{dx}(4x^3) = \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1)$$
$$\Leftrightarrow 4y^3y' + 3y' - 12x^2 = 5 + 0$$
$$\Leftrightarrow (4y^3 + 3)y' = 12x^2 + 5$$
$$\Leftrightarrow y' = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}$$

Derivadas de Ordem Superior

- Primeira derivada: $y' = f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{dy}{dx}$
- Segunda derivada: $y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}[f(x)'] = \frac{d^2y}{dx^2}$
- Terceira derivada: $y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}[f(x)''] = \frac{d^3y}{dx^3}$
- n-ésima derivada: $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f(x)^{(n-1)}\right] = \frac{d^ny}{dx^n}$

Exemplo: As 4 primeiras derivadas de $f(x) = 4x^2 - 5x + 8 - 3x^{-1}$

$$\begin{aligned}
f'(x) =& 8x - 5 + 3x^{-2} = 8x - 5 + \frac{3}{x^2} \\
f''(x) =& 8 - 6x^{-3} = 8 - \frac{6}{x^3} \\
f'''(x) =& 18x^{-4} = \frac{18}{x^4} \\
f^{(4)}(x) =& -72x^{-5} = -\frac{72}{x^5}
\end{aligned}$$

Monotonia

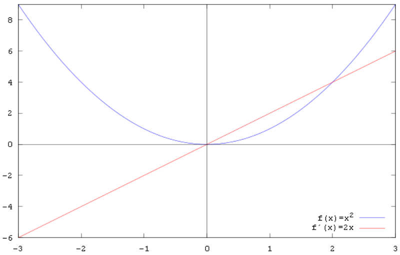
Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$

- $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$, então $f(x)$ é crescente em $[a; b]$
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a; b[$, então $f(x)$ é decrescente em $[a; b]$

Exemplo: Gráfico $f(x) = x^2$ consiste en duas partes, um decrescente e outra crescente. Podemos saber isso a partir da derivada que é

$$f'(x) = 2x \begin{cases} > 0 & \text{for } x > 0 \\ < 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

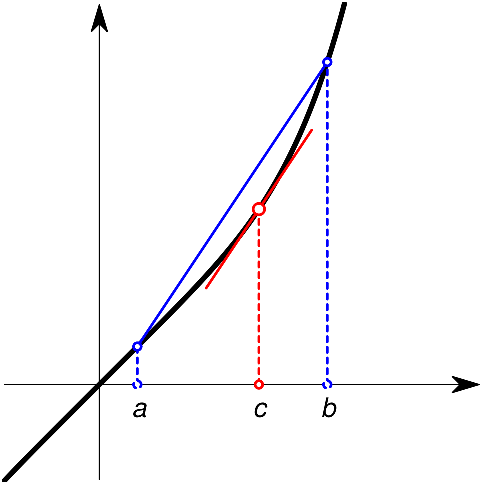
Pelo que $f(x) = x^2$ é *decrecente para* $x < 0$ e *crescente para* $x > 0$



Teorema do valor Médio

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$, então existe um número $c \in \,]a; b[$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

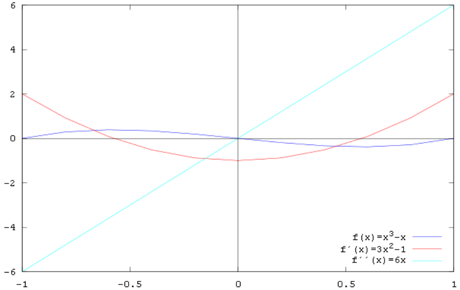


Concavidade

Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto contendo c, então, no ponto $(c, f(c))$, o gráfico tem:

- Concavidade para cima se $f''(x) > 0$
- Concavidade para baixo se $f''(x) < 0$

Exemplo: $f(x) = x^3 - x$

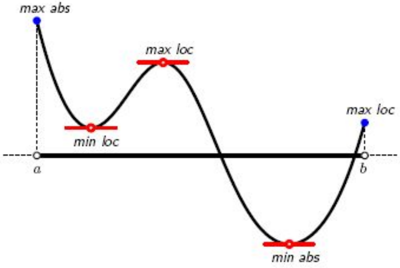


Mínimos e Máximos

Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto contendo c e $f'(c) = 0$:

- Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c
- Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c

Exemplo:



Exercício

Supondo que um determinado serviço de transporte dos correios impões que a soma do comprimento com o raio de uma embalagem cilíndrica seja inferior ou igual a 84 cm. Qual é o maior volume que é possível enviar por este serviço?

Bibliografia

- Dale Ewen e Michael A. Topper, “Cálculo Técnico”, Hemus, 1981
- Earl W. Swokowski, "Cálculo Com Geometria Analítica, Volume 1". McGraw-Hill, 1983.