

Capítulo 5 - Funções Reais de Variável Real

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2011/2012



Sumário

Funções
Limites

Funções Trigonométricas

Outras Funções Transcendentes

Definição de Função

Uma **função f** definida num conjunto X e tomando valores em Y é uma correspondência que associa a cada elemento x de X um único elemento y de Y

$$f : X \rightarrow Y$$

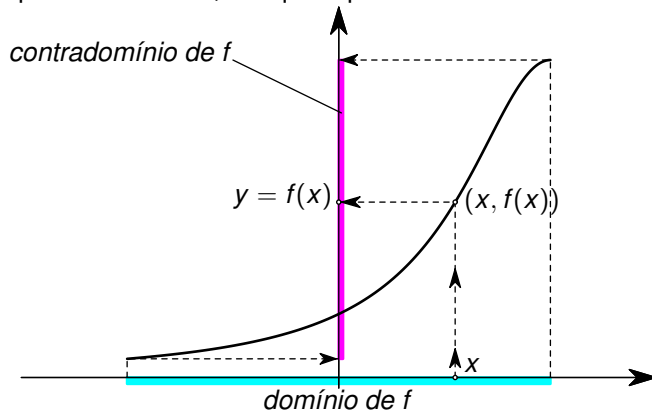
$$x \mapsto y = f(x)$$

- ▶ Elemento y é chamado **imagem** de x através de f e é denotado por $f(x)$
- ▶ Conjunto X é o **domínio** da função
- ▶ **Contradomínio** da função consiste em todas as imagens de elementos de X

Neste curso, estudaremos apenas funções reais ($Y = \mathbb{R}$) de variável real ($X = \mathbb{R}$)

Representação Gráfica de uma Função

Gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) no plano cartesiano, em que x pertence ao domínio de f e $y = f(x)$



Representação Gráfica, continuação

Algumas propriedades podem ajudar a representar graficamente a função:

- ▶ Função f é **injectiva** se para cada elemento x do seu domínio corresponder uma imagem y diferente, isto é, se $f(x) = f(y)$ implicar $x = y$
- ▶ Função f é **par** se para cada elemento x do seu domínio o seu simétrico $-x$ também pertencer ao domínio e se verificar $f(-x) = f(x)$
- ▶ Função f é **ímpar** se para cada elemento x do seu domínio o seu simétrico $-x$ também pertencer ao domínio e se verificar $f(-x) = -f(x)$

Tipos de Funções

Funções podem ser classificadas nos seguintes tipos:

- ▶ **Funções algébricas:** envolvem apenas operações algébricas (adição, subtração, divisão, multiplicação e potenciação) sobre números reais
 - ▶ **Funções polinomiais:** definidas por um polinómio tem domínio $\mathbb{R}$, ex. $f(x) = 1 - 2x^2$
 - ▶ **Função racionais:** definidas por quocientes de polinómios, domínios constituídos pelos números reais que não anulam o denominador, ex. $f(x) = \frac{x}{1-x^5}$
 - ▶ **Função irracionais:** definidas por expressões que envolvem pelo menos um radical, domínios constituídos pelos números reais que tornam as raízes de ordem par positivas, ex. $f(x) = 1 + \sqrt{3-x}$
- ▶ **Funções transcendent:** funções trigonométricas, logarítmicas e exponencial, ex. $f(x) = 5 \cos(x)$ e $f(x) = \log(5x)$

Funções Compostas

Dadas duas funções f e g , podemos obter, desde que os seus domínios se intersectem, outras funções através das operações adição, subtração, multiplicação e divisão das mesmas:

$$\blacktriangleright (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\blacktriangleright (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\blacktriangleright (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\blacktriangleright \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemplo: se $f(x) = 3x - x^4$ e $g(x) = 6 - x$ podemos definir uma nova função $h(x)$ resultante da soma como

$$h(x) = f(x) + g(x) = 6 + 2x - x^4$$

Funções Compostas, continuação

Dadas duas funções f e g , se o domínio de f se intersectar com o contradomínio de g , podemos definir a **função composta** $f \circ g$ (diz-se f após g) como

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Domínio da função composta: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

Exemplo: se $f(x) = \frac{x}{1-x}$ e $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ a função composta será

$$(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

$D_g = [-1; 1]$ contudo $g(0) = 1 \notin D_f$ pelo que $D_{f \circ g} = [-1; 0[\cup]0; 1]$

Funções Inversa

Dada uma função f injectiva com domínio X e contradomínio Y , então uma função g com domínio Y e contradomínio X é inversa de f se

$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{para todo } x \in Y$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{para todo } x \in X$$

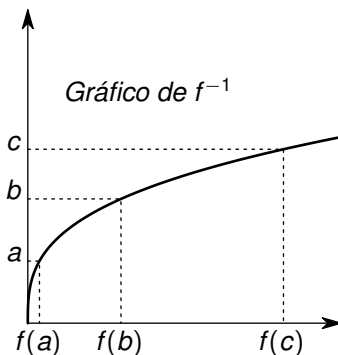
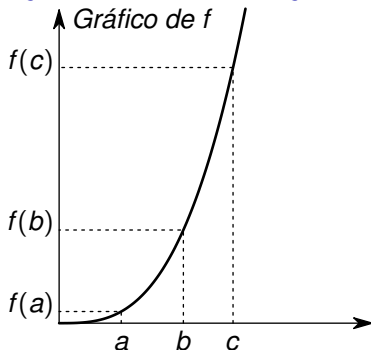
Método de cálculo de f^{-1}

1. Resolver a equação $y = f(x)$ em ordem a x para obter $x = f^{-1}(y)$
2. Substituir na equação o x pelo y e o y pelo x

Exemplo: para calcular a inversa de $f(x) = 2x + 3$ resolvemos $y = 2x + 3$ em ordem a x , obtendo $x = \frac{y-3}{2}$, invertendo as variáveis obtemos

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

Funções Inversa, continuação



- ▶ Gráficos de f e de $f^{-1}(x)$ são simétricos em relação à recta $y = x$
- ▶ Embora uma função não-injectiva não tenha inversa definida para a totalidade do seu domínio pode no entanto admitir inversa numa parte do seu domínio em que é injectiva

Limite de uma Função

Se f é uma função então a expressão

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

é lida como “o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L ”, isto significa que quando escolhermos um valor de x próximo *mas diferente de* a , então $f(x)$ estará próxima do valor L ; mais ainda, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L à medida que x se aproxima de a
Exemplo: Se $f(x) = x + 3$ então

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7,$$

é verdade, porque se substituirmos por valores de x cada vez mais próximos de 4 em $f(x) = x + 3$, o resultado será cada vez mais próximo de 7.

Limite de uma Função, exemplo

Exemplo: Para calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ se substituirmos x por 2 obtemos

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{2^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

que não existe. Mas se substituirmos x por valores cada vez mais próximos de 2 obtemos a sucessão

x	$f(x)$
3.000000	0.600000
2.500000	0.555556
2.100000	0.512195
2.010000	0.501247
2.001000	0.500125

que mostra que $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 0.5

Limite Laterais

Diz-se que **L** é o **limite de f à direita** de **a** se e só se para toda a sucessão de valores de **x** convergentes para **a**, por valores superiores a **a**, corresponder uma sucessão de valores de $f(x)$ convergentes para **L**

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Diz-se que **L** é o **limite de f à esquerda** de **a** se e só se para toda a sucessão de valores de **x** convergentes para **a**, por valores inferiores a **a**, corresponder uma sucessão de valores de $f(x)$ convergentes para **L**

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

- ▶ Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
- ▶ Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M \neq L$, então não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Propriedades dos Limite

1. Quando o limite de uma função existe ele é único
2. Limite de uma função constante é a própria constante
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$
6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
7. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

Aplicação destas propriedades leva-nos por vezes a situações de **indeterminação**: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ que devemos ultrapassar por manipulações algébricas de forma a calcular o limite pretendido

Continuidade de Funções

Uma função f é **contínua em a** se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- ▶ f é **contínua à direita de a** se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- ▶ f é **contínua à esquerda de a** se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Obviamente, se uma função é contínua em a então ela é contínua à esquerda e à direita de a

Uma função pode ser contínua apenas em parte (num intervalo) do seu domínio

Continuidade de Funções, exemplo

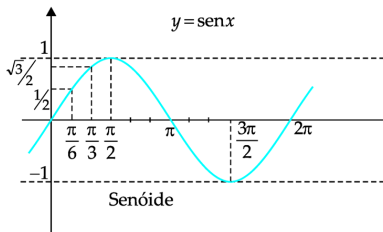
Exemplo: seja a seguinte função definida por braços

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

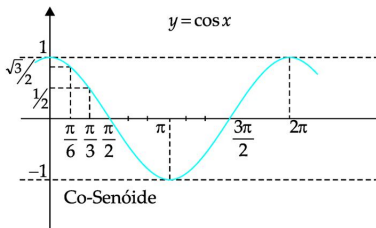
$f(x)$ não é contínua pois:

- ▶ f é contínua à direita de 0 pois $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0^2 = 0$
- ▶ f não é contínua à esquerda de 0 pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$

$f(x)$ é contínua no intervalo $[0; +\infty[$

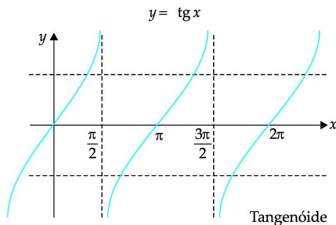
Função seno: $y = \text{sen}(x)$ 

- ▶ Domínio: $\mathbb{R}$, contradomínio: $[-1; 1]$
- ▶ Função ímpar e periódica de período 2π
($\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2k\pi)$, $k = 1, 2, \dots$)
- ▶ Função inversa: $\arcsen(x)$ se restringirmos o domínio a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
 - ▶ Domínio $\arcsen(x)$: $[-1; 1]$
 - ▶ Contradomínio $\arcsen(x)$: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Função cosseno: $y = \cos(x)$ 

- ▶ Domínio: $\mathbb{R}$, contradomínio: $[-1; 1]$
- ▶ Função par e periódica de período 2π
($\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$, $k = 1, 2, \dots$)
- ▶ Função inversa: $\arccos(x)$ se restringirmos o domínio a $[0; \pi]$
 - ▶ Domínio $\arccos(x)$: $[-1; 1]$
 - ▶ Contradomínio $\arccos(x)$: $[0; \pi]$

Função tangente: $y = tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$

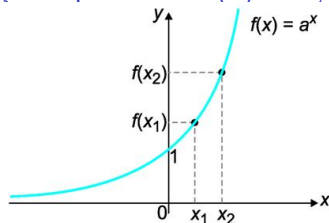


- ▶ Domínio: $\mathbb{R}$, contradomínio: $\mathbb{R}$
- ▶ Função ímpar e periódica de período π
($\text{tg}(x) = \text{tg}(x + k\pi)$, $k = 1, 2, \dots$)
- ▶ Função inversa: $\text{arctg}(x)$ se restringirmos o domínio a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
 - ▶ Domínio $\text{arctg}(x)$: $\mathbb{R}$
 - ▶ Contradomínio $\text{arctg}(x)$: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Outras Funções Trigonométricas

- ▶ Cotangente: $\cotg(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, função ímpar de período π com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$
- ▶ Secante: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, função par de período 2π com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$
- ▶ Cossecante: $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, função ímpar de período 2π com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$

Função exponencial: $f(x) = a^x$, com $a > 1$

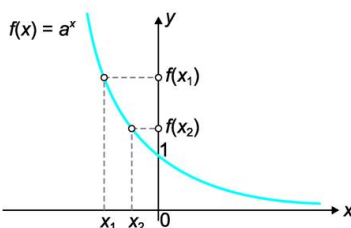


se $a > 1$, $f(x)$ crescente

- ▶ Domínio: $\mathbb{R}$
- ▶ Contradomínio: $\mathbb{R}^+$
- ▶ Exponencial natural (ou neperiana) $f(x) = e^x$ com

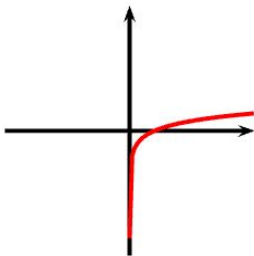
$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2.71828$$

também conhecido por número de Neper

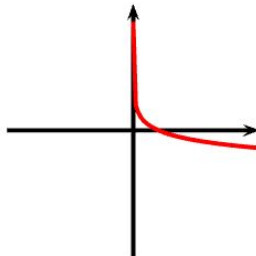


$0 < a < 1$, $f(x)$ decrescente

Função logaritmo: $f(x) = \log_a(x)$, com $a > 0$



$a > 1$, $f(x)$ crescente



$0 < a < 1$, $f(x)$ decrescente

- ▶ Logaritmo é a função inversa da exponencial:
 $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$
- ▶ Domínio: $\mathbb{R}^+$
- ▶ Contradomínio: $\mathbb{R}$
- ▶ Logaritmo natural (ou neperiano) $f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$

Bibliografia

- ▶ Eduardo J.C. Martinho, J. da Costa Oliveira e M. Amaral Fortes, "Matemática para o Estudo da Física". Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.
- ▶ Earl W. Swokowski, "Cálculo Com Geometria Analítica, Volume 1". McGraw-Hill, 1983.