Capítulo 4 - Valores e Vectores Próprios

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2011/2012

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Sumário

Motivação

- Problemas de valores próprios ocorrem em muitas áreas da ciência e da engenharia
- Valores próprios de uma matriz reflectem propriedades essenciais de uma matriz
- Valores próprios são igualmente importantes na análise de muitos métodos matemáticos
- Teoria e métodos aplicam-se tanto a matrizes reais como a matrizes complexas
- Para matrizes complexas utiliza-se a matriz transposta conjugada, A^H, em vez da transposta, A^T

Valores e Vectores Próprios

- Problema de valores próprios típico: dada uma matriz A, $n \times n$, encontrar um escalar λ e um vector não-nulo x tal que

$$Ax = \lambda x$$

- λ é valor próprio e x o vector próprio correspondente
- λ pode ser complexo mesmo que A seja real
- Espectro: $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, é o conjunto de todos os valores próprios de A
- Raio espectral: $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$

Exemplo 1: Valores e Vectores Próprios

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

1. Mostre que $x = [1\ 1]^T$ é vector próprio de A
2. Mostre que $y = [-1\ 1]^T$ não é vector próprio de A

Resposta:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x$$

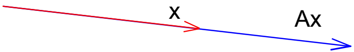
x é o vector próprio associado ao valor próprio 2

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda y$$

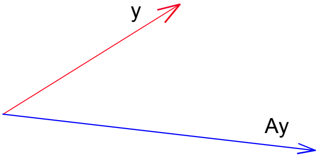
y não é vector próprio de A porque não existe nenhum escalar λ tal que $Ay = \lambda y$

Interpretação Geométrica

Interpretação Geométrica



- $Ax = \lambda x$
- Ax tem a mesma direcção de x
- comprimento e sentido de Ax depende de λ



- y não é valor próprio de A
- $Ay \neq \lambda y$
- Ay não tem a mesma direcção de y

Cálculo dos valores e vectores próprios

Seja A uma matriz de ordem $n \times n$, queremos determinar um vector x, de ordem $n \times 1$ tal que

$$\begin{aligned} & Ax = \lambda x \\ \Leftrightarrow & Ax - \lambda x = 0 \\ \Leftrightarrow & Ax - \lambda Ix = 0 \\ \Leftrightarrow & (A - \lambda I)x = 0 \end{aligned}$$

Temos de resolver o sistema homogéneo $(A - \lambda I)x = 0$ de maneira a encontrar a solução não trivial, pois $x \neq 0$, para tal o determinante da matriz dos coeficientes tem de ser nulo:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Desenvolvimento deste determinate origina um polinómio de grau n em λ cujas raízes são os valores próprios de A

Determinate e Polinómio Característico

Desenvolvimento do determinante característico $|A - \lambda I| = 0$ origina o polinómio característico

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$
$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

cujas n raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ são os valores próprios de A
Resolução dos n sistemas

$$(A - \lambda_i I)x_i = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

permite obter os n vectores próprios correspondentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Como $|A - \lambda I| = 0$ cada sistema $(A - \lambda_i I)x_i = 0$ tem solução múltipla, pelo que cada x_i representa uma solução particular extraída arbitrariamente da solução geral

Exemplo 2: Polinómio Característico

Determinar os valores próprios de $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow & \left| \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow & (3-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-1) = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} \\
\Leftrightarrow & \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4
\end{aligned}
$$

Exemplo 3: Determinar os Vectores Próprios

Determinar os vectores próprios de $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$(A-\lambda_1 I)\,x_1 = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} - x_{21} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = x_{21} \\ x_{21} = \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\text{se} \quad \alpha = 1 \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3, continuação

Determinar o vector próprio x_2 associado ao valor próprio $\lambda_2 = 4$

$$(A - \lambda_2 I)\, x_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_{12} - x_{22} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{12} = -x_{22} \\ x_{22} = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{se} \quad \alpha = 1 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades

- Valores próprios de matriz diagonal são os próprios elementos da diagonal
- Valores próprios de matriz triangular são os elementos da diagonal
- Matriz A de ordem n possui exactamente n valores próprios
- Se A for simétrica ($A = A^T$) os seus valores próprios são todos reais e os respectivos vectores próprios são ortogonais

Invariantes de uma Matriz

Considerando $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

- Traço de A é igual à soma de todos os elementos da diagonal principal de A:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

- Traço é igual à soma dos valores próprios

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

- Determinate de A é igual ao produto dos valores próprios

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

- Se um dos valores próprios de A for nulo a matriz A é singular

Singularidade e Não-Singularidade

Uma matriz A, $n \times n$, é não-singular se verificar qualquer uma das seguintes propriedades

1. Existe a inversa de A, designada por A^{-1}
2. $|A| \neq 0$
3. Para qualquer $z \neq 0$, $Az \neq 0$
4. Nenhum valor próprio de A é nulo: $\lambda = 0 \notin \lambda(A)$

Diagonalização de uma Matriz

- Uma matriz B é semelhante a uma matriz A se existir uma matriz invertível P tal que

$$B = P^{-1}AP$$

- Uma matriz A é diagonalizável se ela for semelhante a uma matriz diagonal. Diz-se também que A pode ser diagonalizada
- Matriz A, de ordem n, é diagonalizável se possuir exactamente n vectores próprios linearmente independentes. Neste caso A é semelhante a uma matriz diagonal D, com $D = P^{-1}AP$, cujos elementos diagonais são os valores próprios de A, enquanto que P é uma matriz cujas colunas são os vectores próprios de A
- Se uma matriz A, de ordem n, possui n valores próprios reais e distintos então os respectivos vectores próprios são linearmente independentes

Exemplo 4

Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

1. Como a matriz é simétrica ($A = A^T$), possui 2 vectores próprios orthogonais, como tal é diagonalizável.
2. Determinar P tal que $P^{-1}AP = D$ em que D é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os valores próprios de A e P é uma matriz cujas colunas são os respectivos vectores próprios.

Bibliografia

- Bernard Kolman, "Introdução à Álgebra Linear com Aplicações", Prentice-Hall do Brasil, 1998
- Ia. S. Bugrov e S. M. Nikolski, "Matemática para Engenharia, Vol. 1 - Elementos de Álgebra Linear e de Geometria Analítica", Editora Mir Moscovo, 1986