Capítulo 2 - Determinantes

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2011/2012

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Sumário

Introdução aos Determinantes

- Determinante de uma matriz quadrada A de ordem n é um escalar denotado por $|A|$ ou $\det(A)$
- Vai determinar se os vectores coluna da matriz A são linearmente dependentes (colineares ou complanares) ou não
- Regra de cálculo do determinante varia com ordem da matriz A
- Determinate de uma matriz $A = [a_{11}]$, de ordem 1×1, é $|A| = a_{11}$
- Exemplo: se $A = [-3]$, então $|A| = -3$

Definição

- Determinante de uma matriz quadrada A de ordem 2 é dado por

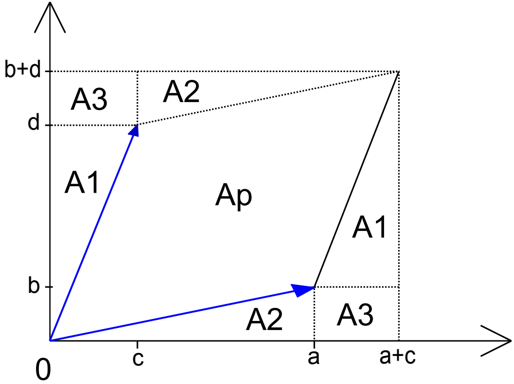
$$|A| = \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- Corresponde à subtracção do produto dos elementos da diagonal principal pelo produto da diagonal secundária
- Exemplo: determinante de $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ é

$$|A| = \left| \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right| = (-1)(-2) - (1)(3) = 2 - 3 = -1$$

Interpretação Geométrica

- Paralelogramo gerado pelos vectores coluna de $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$



Interpretação Geométrica, continuação

- Vamos calcular a área A_P do paralelogramo gerado pelos vectores coluna de A
- Sabemos que $2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_p = (a + c)(b + d)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2\left(\frac{cd}{2}\right) + 2\left(\frac{ab}{2}\right) + 2cb + A_p = ab + ad + cb + cd \\
&\Leftrightarrow cd + ab + 2cb + Ap = ab + ad + cb + cd \\
&\Leftrightarrow A_p = ab + ad + cb + cd - cd - ab - 2cb \\
&\Leftrightarrow A_p = ad - cb \\
&\Leftrightarrow A_p = |A| \\
&\Leftrightarrow A_p = \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right|
\end{aligned}
$$

Interpretação Geométrica, continuação

- Trocando a ordem das colunas de A obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix}$ cujo determinante é

$$|B| = cb - ad = -(ad - cb) = -|A|$$

- Valor absoluto do determinante corresponde à área do paralelogramo
- Área de paralelogramo gerado por vectores colineares é nula, pelo que o respectivo determinate será igual a zero

Exemplo 1: Interpretação Geométrica do Determinante

1. Calcular área do paralelogramo gerado por $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$
2. Indique se os vectores $w = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $z = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$ são ou não colineares

Definição

Determinante de uma matriz quadrada A de ordem 3 é um escalar calculado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23}) \end{aligned}$$

Regra de Sarrus- Regra prática para determinante de uma matriz de ordem 3

1. Repetir as duas primeiras colunas
2. Somar o produto das diagonais principais
3. Subtrair o produto das diagonais secundárias

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Exemplo 2: determinante de ordem 3 pela regra de Sarrus

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

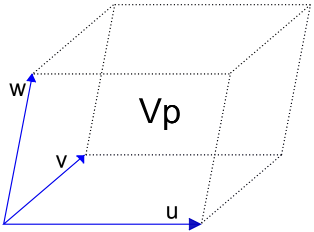
$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} &= (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) - (3)(1)(3) - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) \\ &= 2 + 18 + 6 - 9 - 3 - 8 \\ &= 26 - 20 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Interpretação Geométrica do Determinante de Ordem 3

Paralelepípedo gerado pelas coluna de

$$A = [u\ v\ w] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



- Determinate de A (em valor absoluto) é igual ao volume do paralelepípedo
- $Vp = |\det(A)|$
- Sinal do $|A|$ depende da ordem dos vectores
- $|A| = 0$ se vectores forem complanares

Interpretação Geométrica do Determinante de Ordem 3

Exemplo 3: volume de um paralelepípedo

- Calcule o volume do paralelepípedo gerado pelos vectores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } w = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Resposta

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &= (1)(3)(2) + (-2)(1)(2) + (3)(1)(1) - (2)(3)(3) - (1)(1)(1) - (2)(1)(-2) \\ &= 6 - 4 + 3 - 18 - 1 + 4 \\ &= -10 \end{aligned}$$

- Volume $= 10$

Definição:

Seja A uma matriz $n \times n$. Seja M_{ij} a submatriz $(n-1)(n-1)$ de A obtida eliminado-se a linha i e a coluna j de A. O determinante $|M_{ij}|$ é chamado determinate menor ou simplesmente menor associado a a_{ij}.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$, $|M_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 42 = -34$

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 7 = 10$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 10 = -16$$

Definição:

Seja A uma matriz $n \times n$. O cofactor A_{ij} associado a a_{ij} é definido por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Exemplo:

Seja A a mesma matriz do exemplo anterior $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, Sabendo que $|M_{12}| = -34$, $|M_{23}| = 10$ e $|M_{31}| = -16$ temos

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = (-1)(-34) = 34$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = (-1)(10) = -10$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = (1)(-16) = -16$$

Definição:

Seja A uma matriz $n \times n$. O determinate de A pode ser calculado através do desenvolvimento de Laplace da linha i $(1 \leq i \leq n)$:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Determinate de A pode também pode ser calculado também através do desenvolvimento de Laplace da coluna j $(1 \leq j \leq n)$:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Exemplo:

Vamos calcular o determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Resolução:

Vamos fazer o desenvolvimento de Laplace pela terceira linha (tem mais zeros!):

$$
\begin{aligned}
|A| =& a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} \\
=& a_{31}(-1)^{3+1}|M_{31}| + a_{32}(-1)^{3+2}|M_{32}| + a_{33}(-1)^{3+3}|M_{33}| + a_{34}(-1)^{3+4}|M_{34}| \\
=& (3)(1)|M_{31}| + (0)(-1)|M_{32}| + (0)(1)|M_{33}| + (-3)(-1)|M_{34}| \\
=& (3)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + (3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (3)(20) + (3)(-4) \\
&= 48
\end{aligned}
$$

- $|A| = \left|A^T\right|$
- Se B uma matriz obtida a partir de A trocando duas linhas (ou colunas) então $|B| = -|A|$
- Se B uma matriz obtida a partir de A somando a linha ℓ multiplicada por um escalar α à linha i então $|B| = |A|$
- Se B uma matriz obtida a partir de A somando a coluna k multiplicada por um escalar β à coluna j então $|B| = |A|$
- Se A uma matriz triangular (superior ou inferior) então $|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$
- $|AB| = |A|\,|B|$

Bibliografia

- Bernard Kolman, "Introdução à Álgebra Linear com Aplicações", Prentice-Hall do Brasil, 1998