Capítulo 1 - Cálculo Matricial

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

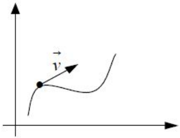
Matemática I - 1º Semestre 2011/2012

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

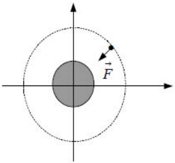
Sumário

Grandezas escalares e vectoriais

- Grandezas físicas escalares: massa, energia, volume...
- Escalares: quantidades que são descritas completamente por um só número (real ou complexo)
- Grandezas físicas vectoriais: velocidade, força, aceleração...
- Vectores: caracterizam-se pela sua dimensão, direcção e sentido
- Exemplos:



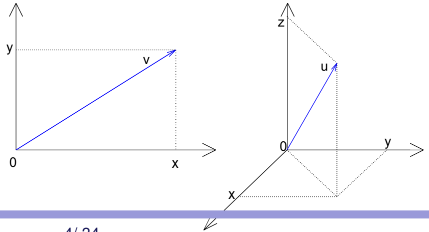
Vector velocidade no deslocamento de um ponto móvel ao longo da sua trajectória.



Força gravitacional exercida pela Terra sobre um satélite.

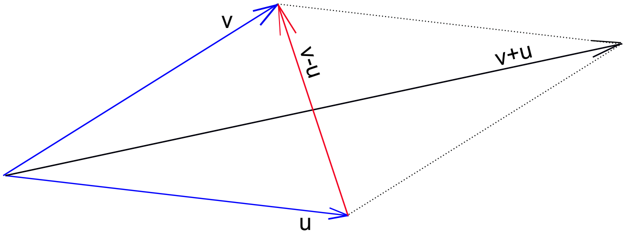
Representação de um vector

- Sequência de escalares em linha $[v_1\, v_2 \ldots v_n]$ ou coluna $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$
- Cada escalar corresponde a uma coordenada ou componente num referencial cartesiano
- Exemplos: $v = [x \quad y] \in \mathbb{R}^2$ e $u = [x \quad y \quad z] \in \mathbb{R}^3$



Adição de Vectores

- Seja $v = [v_1 \ v_2 \ldots v_n]$ e $v = [u_1 \ u_2 \ldots u_n]$ dois vectores de $\mathbb{R}^n$
- Adição: $v + u = [v_1 + u_1 \ v_2 + u_2 \ldots v_n + u_n] \in \mathbb{R}^n$
- Subtracção: $v - u = [v_1 - u_1 \ v_2 - u_2 \ldots v_n - u_n] \in \mathbb{R}^n$
- Geometricamente:



Multiplicação por um escalar

- **Multiplicação por um escalar**: se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha v = v\alpha \in \mathbb{R}^n$
  - Direcção de αv é igual à de v
  - Sentido de αv é igual ao de v se $\alpha > 0$
  - Sentido de αv é contrário ao de v se $\alpha < 0$
  - Dimensão de αv é maior do que a de v se $|\alpha| > 1$
  - Dimensão de αv é menor do que a de v se $|\alpha| < 1$

Propriedade

- Sejam u, v e w vectores arbitrários de $\mathbb{R}^n$; sejam α e β dois escalares arbitrários reais, então $u+v \in \mathbb{R}^n$:
  1. $u+v=v+u$
  2. $u+(v+w)=(v+u)+w$
  3. Existe um vector 0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $u+0=0+u=u$ para todo o $u \in \mathbb{R}^n$
  4. Existe um vector $-u$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $u+(-u)=(-u)+u=0$ para todo o $u \in \mathbb{R}^n$
- $\alpha u \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ é fechado em relação à multiplicação por um escalar)
  1. $\alpha(u+v)=\alpha v+\alpha u$
  2. $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$
  3. $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$
  4. $1u=u$

Produto Escalar

- Seja $v = [v_1 \;\; v_2 \dots v_n]$ e $u = [u_1 \;\; u_2 \dots u_n]$ dois vectores de $\mathbb{R}^n$
- Vector transposto de u, representado por u^T, é $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$
- Produto escalar (ou interno) de v por u é dado por

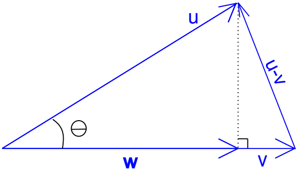
$$vu^T = [v_1 \;\; v_2 \dots v_n]. \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n$$

Propriedades do Produto Escalar

- Se u, v e w são vectores linha em $\mathbb{R}^n$ e α é um escalar, então:
  1. $u.u^T > 0$ para todo $u \neq 0$, $u.u^T = 0$ se e só se $u = 0$
  2. $u.v^T = v.u^T$
  3. $(u+v).w^T = u.w^T + v.w^T$
  4. $(\alpha u).v^T = u.(\alpha v^T) = \alpha(u.v^T)$
- Norma do vector v representa o seu comprimento (magnitude), é dada por $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{vv^T}$
- Como $\|v\| = \sqrt{vv^T}$ obtemos que $vv^T = \|v\|^2$

Produto Escalar

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= \|u\|^2 \sin(\theta)^2 + (\|v\| - \|w\|)^2 \\ &= \|u\|^2 \sin(\theta)^2 + (\|v\| - \|u\| \cos(\theta))^2 \\ &= \|u\|^2 \sin(\theta)^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\| \cos(\theta) + \|u\|^2 \cos(\theta)^2 \\ &= \|u\|^2 \left(\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2\right) + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\| \cos(\theta) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\| \cos(\theta)\end{aligned}$$



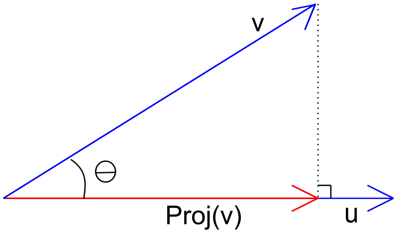
$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= (u-v)(u-v)^T = uu^T - uv^T - vu^T + vv^T \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2uv^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\| \cos(\theta) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2uv^T \\ &\Leftrightarrow uv^T = \|u\|\,\|v\| \cos(\theta)\end{aligned}$$

$$\cos(\theta) = \frac{uv^T}{\|u\|\,\|v\|}$$

Projecção de um Vector

- Componente de um vector v sobre um vector u é dada por $C_u(v) = \|v\| \cos(\theta)$, com $\theta = \angle(v, u)$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$
- Vector projecção de v sobre um vector u é dada por $proj_u(v) = C_u(v) \frac{u}{\|u\|}$



Produto Escalar, continuação

- Prova-se que $v.u^T = \|v\| \|u\| \cos(\theta)$, isto é, $v.u^T = C_u(v) \|u\|$
- $v.u^T$ representa o produto da componente de v sobre u, vezes a norma de u; se u for unitário $v.u^T$ representa apenas a componente de v sobre u
- $vu^T = 0$ se u e v forem ortogonais (perpendiculares)

Exercício 1

Seja $v = [2\ 2\ \ -1]$ e $u = [2\ 0\ 1]$ dois vectores de $\mathbb{R}^3$

1. Calcule $v.u^T$
2. Calcule $\|v\|$ e $\|u\|$
3. Calcule a componente de v sobre u
4. Calcule o vector projecção de v sobre u
5. Obtenha um vector ortogonal a u

Matrizes

- Um arranjo rectangular de $m \times n$ escalares (reais ou complexos) distribuídos por linhas ou colunas designa-se matriz de ordem (ou do tipo) $m \times n$:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n \text{ colunas}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} m \text{ linhas}$$

Elementos de um Matrizes

- Os números a_{11}, a_{12}, ...,a_{mn} são designados por elementos (ou entradas) da matriz A
- Matriz $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$

$$
\begin{array}{cc}
\text{linha i} & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \\
 & \text{coluna j}
\end{array}
$$

- Matriz é um conjunto de vectores linha ou coluna, um vector é uma matriz linha ou coluna

Matrizes Quadradas

- Matriz quadrada: número de linhas igual ao número de colunas
- Elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ de uma matriz quadrada de ordem n formam a chamada diagonal principal, se todos os elementos são nulos fora da diagonal principal temos uma matriz diagonal
- Exemplos de matrizes quadradas:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]$ com $i = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, q$ e $B = [b_{ij}]$, com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, dir-se-ão iguais se, e só se:

1. A e B tiverem o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas ($p = m$ e $q = n$)
2. Se todos os elementos correspondentes das duas matrizes forem iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$ para todos $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Então podemos escrever $A = B$

Adição (ou subtracção) de Matrizes

- Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ com $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$ define-se a matriz soma destas duas matrizes como sendo a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{para} \quad \text{i} = 1, 2, ..., \text{m} \quad \text{e} \quad \text{j} = 1, 2, ..., \text{n}$$

  Podemos então escrever que $C = A + B$

- Da mesma forma a subtracção de A por B resulta numa matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \text{para} \quad \text{i} = 1, 2, ..., \text{m} \quad \text{e} \quad \text{j} = 1, 2, ..., \text{n}$$

  Podemos então escrever que $C = A - B$

Adição e Subtracção de Matrizes, Exemplo

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$
- Se chamarmos C à soma das matrizes A e B, então

$$C = A+B = \begin{bmatrix} 1+(-4) & 0+3 & 2+(-2) \\ 5+5 & 3+5 & 1+1 \\ 6+3 & 4+4 & 2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 10 & 8 & 2 \\ 9 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

- Se chamarmos D à subtracção das matrizes A e B, então

$$D = A-B = \begin{bmatrix} 1-(-4) & 0-3 & 2-(-2) \\ 5-5 & 3-5 & 1-1 \\ 6-3 & 4-4 & 2-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Adição de Matrizes

Se as matrizes A, B e C tiverem dimensões $m \times n$, verifica-se:

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Existe uma única matriz 0, chamada matriz nula, com as mesmas dimensões de A tal que $A + 0 = A$
- Existe uma única matriz B, representada por $-A$, com as mesmas dimensões de A tal que $A + B = 0$

Multiplicação de uma Matrizes por um Escalar

- A multiplicação de uma matriz $A = [a_{ij}]$, de dimensão $m \times n$, por um escalar α é definida pela matriz $B = [b_{ij}]$, de dimensão $m \times n$, obrida multiplicado cada elemento da matriz pelo escalar:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, n$$

  Diz-se que a matriz B é um múltiplo escalar da matriz A

- Exemplo: o produto da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ pelo escalar -2

  é dado por

$$-2A = \begin{bmatrix} (-2)5 & (-2)(-3) \\ (-2)0 & (-2)(-2) \\ (-2)3 & (-2)0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 0 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação por um Escalar

Seja A uma matriz $m \times n$ e α e β dois escalares (reais ou complexos), verifica-se:

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Transposta de uma matriz

- Se A é uma matriz $[a_{ij}]$, de dimensão $m \times n$, então a matriz $A^T = [a_{ji}]$ para $j = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad i = 1, \ldots, m$ é chamada de transposta de A
- Exemplo: sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

  $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
- Propriedades: $(A^T)^T = A$ e $(A + B)^T = A^T + B^T$

Transposta de uma Matriz Complexa

- Se A é uma matriz complexa $[a_{ij}]$, de dimensão $m \times n$, define-se a sua conjugada $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$ para $i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, n$
- Se A é uma matriz complexa $[a_{ij}]$, de dimensão $m \times n$, define-se a sua transposta-conjugada $A^H = \overline{A}^T = [\overline{a}_{ji}]$ para $j = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad i = 1, \dots, m$
- Exemplo: sejam $A = \begin{bmatrix} 5+2i & -3i \\ 4+i & 2-8i \\ 3 & 1+2i \end{bmatrix}$
- $\overline{A} = \begin{bmatrix} 5-2i & 3i \\ 4-i & 2+8i \\ 3 & 1-2i \end{bmatrix}$ e $A^H = \begin{bmatrix} 5-2i & 4-i & 3 \\ 3i & 2+8i & 1-2i \end{bmatrix}$
- Propriedades: $(A^H)^H = A \quad \text{e} \quad (A+B)^H = A^H + B^H$

Multiplicação de Matrizes

Se A é uma matriz $[a_{ij}]$, de dimensão $m \times p$, e $B = [b_{ij}]$, de dimensão $p \times n$ então o produto de A por B, denotado de AB, é a matriz $C = [C_{ij}]$, de dimensão $m \times n$ definida por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, n$$

- c_{ij} é o produto escalar do vector linha i de A pelo vector coluna j de B

Multiplicação de Matrizes, continuação

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & a_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = C$$

Multiplicação de Matrizes, continuação

- Número de colunas de A tem de ser igual ao número de linhas de B
- Número de linhas de AB é igual ao número de linhas de A e número de colunas de AB é igual ao número de colunas de B

$$\overbrace{m \times p}^{A}\overbrace{p \times n}^{B} = \overbrace{m \times n}^{AB}$$

Multiplicação de Matrizes, exemplo

Multiplique as seguintes matrizes: Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} (5)(3)+(-3)(2) & (5)(-3)+(-3)(-2) & (5)(1)+(-3)(2) \\ (0)(3)+(-2)(2) & (0)(-3)+(-2)(-2) & (0)(1)+(-2)(2) \\ (3)(3)+(0)(2) & (3)(-3)+(0)(-2) & (3)(1)+(0)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15-6 & -15+6 & 5-6 \\ 0-4 & 0+4 & 0-4 \\ 9+0 & -9+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \\ 9 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação de Matrizes

Seja A uma matriz $m \times p$, B e C duas matrizes com a mesma dimensão $p \times n$ e α um escalar:

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Matrizes Especiais

- A é simétrica se $A = A^T$
- A é hermitiana se $A = A^H$
- A é normal se $AA^T = A^T A$
- A é unitária se $AA^H = A^H A$

Matrizes Identidade

- O produto de matrizes não é comutativo em geral ($AB \neq BA$), mas apenas em particular para algumas matrizes especiais
- Se A for uma matriz quadrada, $n \times n$, e existir uma matriz B, com a mesma dimensão, tal que $AB = BA = A$, diz-se que B é a identidade de A e é representada por I

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

- Se A for uma matriz quadrada, $n \times n$, e existir uma matriz B, com a mesma dimensão, tal que $AB = BA = I$, diz-se que B é a inversa de A (ou vice-versa) e é representada por A^{-1}
- Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} (2)(-1)+(3)(1) & (2)(\frac{3}{2})+(3)(-1) \\ (2)(-1)+(2)(1) & (2)(\frac{3}{2})+(2)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $AB = I$ podemos afirmar que $B = A^{-1}$ (B é inversa de A) ou que $A = B^{-1}$ (A é inversa de B)

Matriz Ortogonal

- Se A for uma matriz quadrada, $n \times n$, e se verificar $AA^T = A^T A = I$, diz-se que A é ortogonal
- Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$
- Como
$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
podemos afirmar que A é ortogonal

Bibliografia

- Bernard Kolman, "Introdução à Álgebra Linear com Aplicações", Prentice-Hall do Brasil, 1998
- Eduardo J.C. Martinho, J. da Costa Oliveira e M. Amaral Fortes, "Matemática para o Estudo da Física". Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.