Licenciaturas em Engenharia de Energias Renováveis

Matemática I - 2011/2012

1º teste parcial - 23 de Novembro 2011

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

Instruções:

- Teste sem consulta bibliográfica.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular.
- Apresente detalhadamente todos os cálculos efectuados.

Duração: 1h50m sem tolerância

1. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

1 (a) Calcule $\|v\|$ e $\|x\|$.

1 (b) Determine a de maneira a que u e v sejam colineares.

1 (c) Mostre que x e y são ortogonais.

1 (d) Determine $proj_u(x)$, o vector projecção de x sobre u, (considere $a = -1$).

2. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

calcule sempre que possível:

1 (a) $B - C$, $A + B$ e $B^T + C$;

3 (b) AB, AC, BC e $(CB)^2$;

2 (c) Resolva a equação matricial $(CB)x = y$ de maneira a determinar o vector x.

3. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

2 (a) Mostre que este sistema tem solução única;

3 (b) Resolva o sistema pelo método da eliminação de Gauss.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2 (a) Calcule os valores próprios de A.

3 (b) Calcule os vectores próprios de A.

Teste parcial de Matemática I - Eng. Energias Renov.

1. a) 1 valor

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (-\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{3}{2})^2} = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{14}{4}} = \tfrac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\|x\| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

b) 1 valor

$u \parallel v$ se $u = \alpha v$ com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\alpha \\ a = -\frac{1}{2}\alpha \\ 3 = -\frac{3}{2}\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \text{---} \\ \alpha = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ a = -\frac{1}{2}(-2) \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ a = 1 \end{cases} \qquad \boxed{a = 1}$$

c) 1 valor

$x \perp y$ se $x^T y = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5/2 \end{bmatrix} = 0$

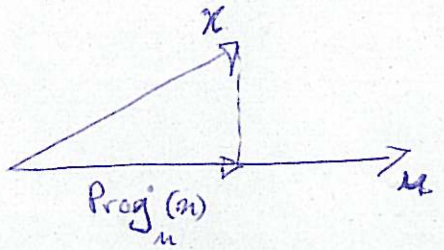
$\Leftrightarrow (-4)(1) + (-1)(1) + (2) \cdot (5/2) = 0$

$\Leftrightarrow -4 - 1 + 10/2 = 0$

$\Leftrightarrow -5 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

d) 1 valor



$$\operatorname{Proj}_u(x) = C_u(x) \frac{u}{\|u\|} = \frac{x^T u}{\|u\|} \cdot \frac{u}{\|u\|} = \frac{x^T u}{\|u\|^2} \cdot u$$

$$= -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} \\ -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

$x^T u = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -8 + 1 + 6 = -1$

$\|u\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 3^2 = 4 + 1 + 9 = 14$

2 (1 valor)

a) $A - C$ Impossível. Dimensões não compatíveis

$A + B$ " " " "

$$B^T + C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) (3 valores)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2-2 & 1+0-1 \\ 2+2+2 & -1+0+1 \\ 8+4+6 & -4+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$$

AC Impossível. Dimensões não compatíveis

$$BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 0+1 & 2+0 \\ 1+0 & 0+0 & -1+0 \\ -2-3 & 0-1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0+2 & 1+0+1 \\ -6+1-0 & 3+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(CB)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-10 & 0+6 \\ 0-15 & -10+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $(CB)X = Y \Leftrightarrow (CB)^{-1}(CB)X = (CB)^{-1}Y \Leftrightarrow IX = (CB)^{-1}Y \Leftrightarrow$

(2 valores)

$X = (CB)^{-1}Y$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\Leftrightarrow}{l_1 \leftrightarrow l_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -5 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} l_1 \leftarrow -\frac{1}{5} l_1 \\ l_2 \leftarrow \frac{1}{2} l_2 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right]$$

$$l_1 \leftarrow l_1 + \frac{3}{5} l_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow [I \mid (CB)^{-1}]$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{2}{2} - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 a) $Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

Solução é única se $|A| \neq 0$

2 valores

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 0 + 9 - 0 + 4 = 20 \neq 0 \Rightarrow \text{Sol. única.}$$

b) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \underset{l_2 \leftarrow -\frac{1}{5} l_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \underset{l_3 \leftarrow l_3 + 6l_2}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ y + z = 2 \\ -4z = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y = 2 - 3 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2(-1) + 3(3) = 9 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + 2 - 9 \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

3 valores

(5) (4)

4) (a) $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)=0$

$\Leftrightarrow -\lambda = 0 \lor 1-\lambda=0 \lor 1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \lor \lambda=1 \lor \lambda=1$

Valores próprios: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ e $\lambda_3=1$ $\boxed{\text{2 valores}}$

(b) $(A-\lambda_1 I)X_1=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=0 \\ x_2+2x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-2x_3 \\ x_3=0 \\ x_1=\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$

$\Leftrightarrow X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $\alpha=1$ obtemos $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{1 valor}}$

$(A-\lambda_2 I)X_2=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+x_3=0 \\ 2x_3=0 \\ 0_3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3 \\ x_3=0 \\ x_2=\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$ $\Leftrightarrow X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $\alpha=1 \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{1 valor}}$

Como $\lambda_3=\lambda_2=1$ então $X_3=X_2$

$X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{1 valor}}$