2^o Ano de Engenharias Civil e Electrotécnica

Métodos Numéricos - 2^o semestre 2010/2011

Ficha prática n^o 4 - Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & -3 \\ 1 & -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Utilize a função `lu` do Octave para efectuar a factorização LU com pivotagem parcial desta matriz;

   (b) Utilize a factorizarão obtida na alínea anterior para resolver computacionalmente $Ax = b$ em que $b = [44\ 14\ 36\ 8]^T$;

   (c) Utilize a mesma factorizarão para resolver computacionalmente $Ax = b$ em que $b = [12\ 8\ 11\ \ -4]^T$;

2. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 6 & 9 \\ 5 & 18 & 2 & -8 \\ 6 & 2 & 14 & 0 \\ 9 & -8 & 0 & 22 \end{bmatrix}$$

   (a) Verifique que a matriz A é simétrica e positiva definida;

   (b) Utilize a função `chol` do Octave para efectuar a factorização de Cholesky desta matriz;

   (c) utilize o resultado da alínea anterior para resolver computacionalmente o sistema $Ax = b$ em que $b = [1\ 2\ \ -2\ 0]^T$;

   (d) utilize o resultado da alínea anterior para resolver computacionalmente o sistema $Ax = b$ em que $b = [40\ 17\ 22\ 23]^T$;

3. Considere o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \\ 3 & -0,1 & -0,2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19,3 \\ 71,4 \\ 7,85 \end{bmatrix}$$

   (a) Permute a ordem das equações de forma a reforçar a dominância por linhas da diagonal.

   (b) Escreva o esquema iterativo de Jacobi para a resolução do sistema anterior.

   (c) Aproxime a solução deste sistema efectuando duas iterações do método de Jacobi.

(d) Calcule o resíduo relativo em cada uma das iterações efectuadas.

(e) Resolva computacionalmente este sistema através do método de Jacobi (use a função `jacobi` da NMlibforOctave), considerando o seguinte critério de paragem
$$\frac{\left\|b - Ax^{(k)}\right\|_2}{\|b\|_2} \leq 10^{-4}.$$

4. Considere o sistema da alínea anterior

(a) Permute a ordem das equações de forma a reforçar a dominância por linhas da diagonal.

(b) Escreva o esquema iterativo de Gauss-Seidel para a resolução do sistema anterior.

(c) Aproxime a solução deste sistema efectuando duas iterações do método de Gauss-Seidel.

(d) Calcule o resíduo relativo em cada uma das iterações efectuadas.

(e) Resolva computacionalmente este sistema através do método de Gauss-Seidel (use a função `gauss-seidel` da NMlibforOctave), considerando o seguinte critério de paragem
$$\frac{\left\|b - Ax^{(k)}\right\|_2}{\|b\|_2} \leq 10^{-4}.$$

5. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique que a matriz dos coeficientes do sistema é simétrica e positiva definida;

(b) Resolva computacionalmente este sistema pelos métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e Gradiente Conjugado de maneira a que
$$\frac{\left\|b - Ax^{(k)}\right\|_2}{\|b\|_2} \leq 10^{-8}$$
e analise os resultados obtidos.