

Licenciaturas em Engenharia Civil e Electrotécnica
Métodos Numéricos - 2010/2011
Exame Época Recurso - 11 de Julho 2011
Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

Instruções:

- A parte teórica é sem consulta bibliográfica.
- A parte prática é com consulta bibliográfica.
- Os cálculos deverão ser efectuados recorrendo apenas ao software Octave.
- Apresente os resultados dos cálculos com uma precisão de pelo menos 5 dígitos significativos.
- Os computadores não poderão ser ligados à *Internet*.

I - Parte teórica (Duração: 20 min, cotação: 4 valores).

1. Considerando que $\tilde{x}$ é um valor arredondado de x com m casas decimais, indique um majorante para o erro absoluto cometido com o arredondamento.
2. Em que é que consiste o erro de truncatura?
3. Considerando o sistema linear $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e positiva definida, descreva as principais etapas da sua resolução pelo método da factorização de Cholesky.
4. Porque razão é necessário conhecer o valor inicial de uma equação diferencial ordinária para se poder fazer a sua resolução numérica?

II - Parte prática (duração: 2h00, cotação: 16 valores)

1. (5 valores) Considere a equação $(x + 1.2)^2 - e^{-x} = 0$.
 - (a) Localize graficamente a raiz desta equação (transcreva o gráfico da função para o papel, identificando um intervalo unitário onde está situada a raiz).
 - (b) Escreva o esquema iterativo de Newton-Raphson para a resolução deste problema?
 - (c) Aproxime a raiz desta equação através de 3 iterações do método de Newton-Raphson.
 - (d) Aproxime a raiz pelo método de Newton-Raphson com uma tolerância de 0.5×10^{-13} (sugestão: use a função `nle_newtraph` da NMLibforOctave).

2. (3 valores) Considerando os seguintes dados

$$y = f(t) \quad \left| \begin{array}{cccc} t & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y & 0.5 & 1.7 & 3.4 & 5.7 \end{array} \right.$$

- (a) Se tivermos em conta os quatro pontos dados qual vai ser o grau do polinómio interpolador?
- (b) Determine o polinómio interpolador de Lagrange.
- (c) Utilize o polinómio obtido na alínea anterior para interpolar o valor da função em 1.5 e 3.25.

3. (5 valores) Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1.44 & 3.96 & -6.33 \\ -1.50 & 2.49 & 0.97 \\ -2.44 & 0.40 & 2.04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.93 \\ 1.96 \\ 0.00 \end{bmatrix}.$$

- (a) Permute a ordem das equações de forma a reforçar a dominância por linhas da diagonal.
- (b) Escreva o esquema iterativo de Gauss-Seidel para a resolução do sistema anterior.
- (c) Aproxime a solução deste sistema efectuando três iterações do método de Gauss-Seidel.
- (d) Calcule o resíduo relativo associado à solução apresentada.
- (e) Resolva computacionalmente este sistema através do método de Gauss-Seidel (use a função `gauss_seidel` da NMLibforOctave), considerando o seguinte critério de paragem

$$\frac{\|b - Ax^{(k)}\|_2}{\|b\|_2} \leq 10^{-6}.$$

Indique a aproximação inicial à solução, o número de iterações efectuadas e a solução obtida, correctamente arredondada.

4. (3 valores) Considerando o problema de valor inicial $y' = y - t^2 - 1.1y$ para $t \geq 0$ com $y(0) = 2$, aproxime o valor de $y(0.25)$ através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem (apresente todos os cálculos efectuados para obter a solução).