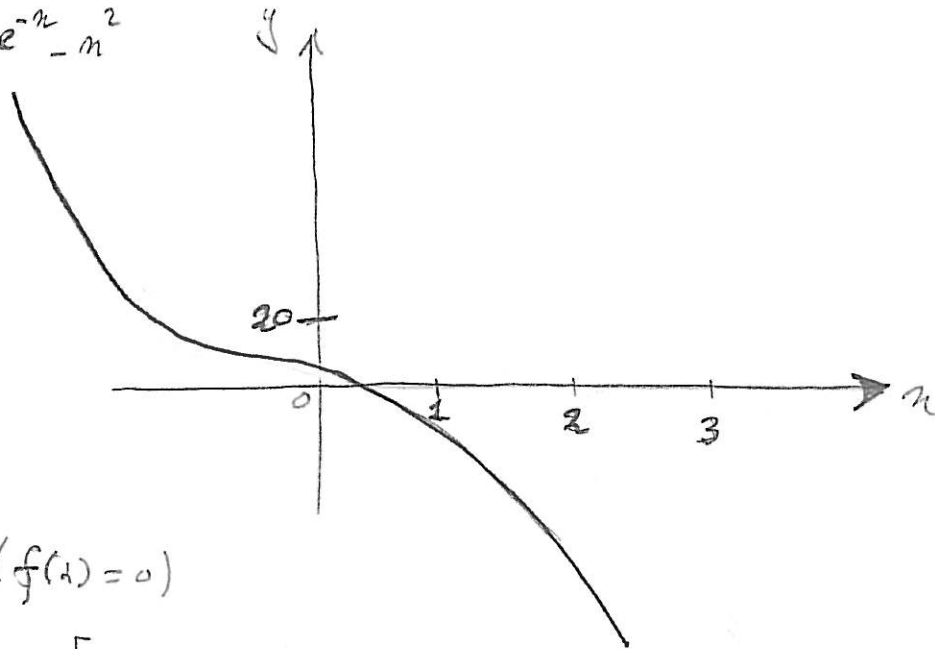


Ex. 1 a) $y = e^{-x} - x^2$



$d \equiv \text{raiz } (f(d) = 0)$

$d \in]0, 1[$

b) $|\Delta_n| \leq 10^{-8} \quad (\Rightarrow) \quad \left| \frac{b-a}{2^k} \right| \leq 10^{-8} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1-0}{2^k} \leq 10^{-8}$

$(\Rightarrow) \quad \frac{1}{2^k} \leq 10^{-8} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{10^{-8}} \leq 2^k \quad (\Rightarrow) \quad 2^k \geq 10^8$

$(\Rightarrow) \quad \log_2(2^k) \geq \log_2(10^8)$

$(\Rightarrow) \quad k \geq \log_2(10^8) \quad (\Rightarrow) \quad k \geq 26,6$

$k = 27$

Seriam necessarias 27 iterações.

c) $d \in]0, 1[$

$f(0) = e^0 - 0^2 = 1 > 0$

$f(1) = e^{-1} - 1^2 \approx -0,63212 < 0$

1ª iteração:

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0,5$$

$$f(m) = e^{-0,5} - 0,5^2 \approx 0,357 > 0$$

$$d \in]0,5; 1[$$

2ª iteração: $m = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$

$$f(m) = e^{-0,75} - 0,75^2 \approx -0,0901 < 0$$

$$d \in]0,5; 0,75[$$

3ª iteração:

$$m = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

$$f(m) = e^{-0,625} - 0,625^2 \approx 0,14464 > 0$$

$$d \in]0,625; 0,75[$$

$$d \approx \frac{0,625 + 0,75}{2} = 0,6875$$

Resumo:

$$f(a) > 0$$

$$f(b) < 0$$

K	a	b	m	f(m)
0	0	1	0,5	0,357
1	0,5	1	0,75	-0,0901
2	0,5	0,75	0,625	0,14464
3	0,625	0,75		

$$d \in]0,625; 0,75[$$

d) utilizando a função "bisection";

(3)

$$[m, r, k] = \text{bisection}(f, a, b, \text{itmax}, \text{tol})$$

Com $f = e^{-x} - x^2$

$a = 0$ e $b = 1$

$\text{itmax} = 50$ (por exemplo)

$\text{tol} = 0,5 \times 10^{-8}$

obtemos:

$$d \approx 0,70346742$$

Ex. 2

a) Determinar $P_2(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$

tal que

$$\begin{cases} P_2(t_1) \approx y_1 \\ P_2(t_2) \approx y_2 \\ P_2(t_3) \approx y_3 \\ P_2(t_4) \approx y_4 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} a_1 + a_2 t_1 + a_3 t_1^2 \approx y_1 \\ a_1 + a_2 t_2 + a_3 t_2^2 \approx y_2 \\ a_1 + a_2 t_3 + a_3 t_3^2 \approx y_3 \\ a_1 + a_2 t_4 + a_3 t_4^2 \approx y_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (=) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_x \approx \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,7 \\ 3,4 \\ 5,7 \end{bmatrix}}_b$$

$$(=) A x \approx b \quad (=) A^T A x = A^T b$$

(4)

$$A^T A x = A^T b \quad (\Rightarrow) \quad \begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,3 \\ 36,9 \\ 129,1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = -0,125 \\ x_2 = 0,355 \\ x_3 = 0,275 \end{cases}$$

O polinômio interpolador é:

$$P_2(t) = -0,125 + 0,355t + 0,275t^2$$

$$b) \quad f(3,25) \approx P_2(3,25) = -0,125 + 0,355 \times 3,25 + 0,275 \times 3,25^2$$

$$(\Rightarrow) \quad f(3,25) \approx 3,8334$$

$$\boxed{\text{Ex. 3}} \quad a) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^3 - y \end{bmatrix}}_{F(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_0 \quad (\Rightarrow) \quad F(x) = 0$$

$$J_{F(x)} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

1ª iteração: Resolver em ordem a δ_0

$$(\Rightarrow) \quad \begin{bmatrix} 2(1) & 2(1) \\ 3(1)^2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1^2 + 1^2 - 1 \\ 1^3 - 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(5)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_x = -0,125 \\ \delta_y = -0,375 \end{cases}$$

calcular a aproximação da solução:

$$X_2 = X_0 + \delta_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,125 \\ -0,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,625 \end{bmatrix}$$

2ª iteração: Resolver $JF(x_1) \delta_1 = -F(x_2)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1,75 & 1,25 \\ 2,2969 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,15625 \\ 0,04492 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_x = -0,04596 \\ \delta_y = -0,06065 \end{cases}$$

$$\text{calcular } X_2 = X_1 + \delta_1 = \begin{bmatrix} 0,875 - 0,04596 \\ 0,625 - 0,06065 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,82904 \\ 0,56435 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \approx 0,82904 \\ y \approx 0,56435 \end{cases}$$

$$b) \Delta x \approx \|X_2 - X_1\|_2 = \|\delta_1\|_2 = \sqrt{(-0,04596)^2 + (-0,06065)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x \approx 0,0761 \quad (\text{Erro absoluto})$$

$$r_x = \frac{\|\Delta x\|_2}{\|X_2\|_2} \approx \frac{\|\delta_1\|_2}{\|X_2\|_2} = \frac{0,0761}{1,0029} \approx 0,0759$$

c) utilizando a função "nle_newtsys"

(6)

$$[x, r, k] = \text{nle_newtsys}(F, J, x_0, \text{itmax}, \text{tol})$$

Com os inputs

$$F = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^3 - y \end{bmatrix} \quad e \quad J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{itmax} = 10 \text{ (por exemplo)} \quad e \quad \text{tol} = 10^{-12}$$

$$\text{obtemos} \quad \begin{cases} x = 0,826031357654 \\ y = 0,563624162161 \end{cases}$$

Ex. 4

$$a) \quad y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1)]$$

1) Premissa:

$$\begin{aligned} y_{1,p} &= y_0 + h f(t_0, y_0) = y_0 + h (y_0 - t_0^2 - 1,1 y_0) \\ &= 2 + 0,25 (2 - 0^2 - 1,1 \times 2) = 1,95 \end{aligned}$$

2) Correção:

$$\begin{aligned} y_{1,c} &= y_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, y_0) + f(t_1, y_{1,p})] \\ &= 2 + \frac{0,25}{2} [(2 - 0^2 - 1,1 \times 2) + (1,95 - 0,25^2 - 1,1 \times 1,95)] \\ &= 1,9428125 \end{aligned}$$

$$y(0,25) \approx 1,9428125$$