Mestrados em Engenharia da Construção - 1º semestre 2010/2011

Métodos de Aproximação em Engenharia

Ficha prática nº 3 - Problemas de valor inicial para EDOs

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

1. Considere a EDO $y' = -5y$ com a condição inicial $y(0) = 1$.
   (a) Serão as soluções desta EDO estáveis?
   (b) Para que valores do passo h é que o método de Euler é estável na resolução desta EDO?
   (c) Aproxime o valor da solução em $t = 1$ pelo método de Euler (arbitre o valor de h de acordo com o resultado da alínea anterior).
   (d) Para que valores do passo h é que o método de Euler implícito é estável na resolução desta EDO?
   (e) Aproxime o valor da solução em $t = 1$ pelo método de Euler implícito (arbitre o valor de h de acordo com o resultado da alínea anterior).
   (f) Sabendo que a solução exacta desta equação é dada por $y(t) = \exp(-5t)$, represente-a graficamente juntamente com as duas soluções numéricas anteriores.

2. Considere o problema de uma massa suspensa numa mola com amortecimento. A equação da distancia à origem é

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

   em que m é a massa, k é a constante de rigidez da mola e c a constante de amortecimento.
   (a) Escreva este problema na forma de um sistema de EDOs de primeira ordem.
   (b) Considerando $m = 1$, $c = 2$ e $k = 0,75$, indique o tipo de estabilidade deste sistema.
   (c) Será o método Euler estável se $h = 0.2$?
   (d) Considerando que o deslocamento original é nulo ($y(0) = 0$) e que a velocidade original é de 5 unidades de comprimento por unidade de tempo ($y'(0) = 5$) aproxime numericamente a solução para os casos de $m = 10$ e de $m = 0.01$ através dos métodos seguintes
      i. Euler implícito.
      ii. Runge-Kutta de 4ª ordem.
      iii. Preditor-corrector de 4ª ordem.

      Em cada um dos casos apresente graficamente os resultados de forma a visualizar a evolução da posição e velocidade da massa desde do tempo inicial $t_0 = 0$ até atingirem um estado estacionário. Repita o exercício para vários passos de tempo h escolhidos por si.
   (e) Comente os resultados obtidos.

3. O modelo Kermack-McKendrick utilizado para simular uma epidemia em determinada população consiste no seguinte sistema de EDOs

$$
\begin{aligned}
y_1' &= -\,c y_1 y_2 \\
y_2' &= c y_1 y_2 - d y_2 \\
y_3' &= d y_2
\end{aligned}
$$

em que y_1 representa o número de indivíduos susceptíveis de serem contaminados, y_2 o número de infectados e y_3 os indivíduos removidos da infecção por recuperação e consequente imunidade, isolamento ou morte. Os parâmetros c e d representam, respectivamente, as taxas de infecção e de remoção.

(a) Utilize o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) para resolver numericamente este sistema com os seguintes valores dos parâmetros $c = 1$ e $d = 5$, e valores iniciais $y_1(0) = 95$, $y_2(0) = 5$ e $y_3(0) = 0$. Integre de $t = 0$ até $t = 1$ e represente no mesmo gráfico todas as soluções em função de t.

(b) Experimente com outros valores para os parâmetros e para as condições iniciais. Será possível encontrar valores para os quais a epidemia não cresce, ou para os quais toda a população é dizimada?

(c) Varie o passo de tempo h de forma a mostrar que o método RK4 não é incondicionalmente estável.