Mestrados em Engenharia da Construção - 1º semestre 2010/2011

Métodos de Aproximação em Engenharia

Ficha prática nº 2 - Problemas de valores próprios

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

1. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Calcule o valor próprio dominante e o vector próprio correspondente, utilizando como vector inicial o vector $x_0 = [0\ 0\ 1]^T$ e uma tolerância para o erro de 10^{-12}.

   (b) Calcule o valor próprio de menor magnitude e o vector próprio correspondente, utilizando como vector inicial o vector $x_0 = [0\ 0\ 1]^T$ e uma tolerância para o erro de 10^{-12}.

2. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{bmatrix}$$
   (a) Calcule o valor próprio de menor magnitude e o vector próprio correspondente, utilizando como vector inicial um vector gerado aleatoriamente e uma tolerância para o erro de 10^{-8}.

   (b) Calcule o valor próprio de maior magnitude e o vector próprio correspondente, utilizando como vector inicial um vector gerado aleatoriamente e uma tolerância para o erro de 10^{-8}.

   (c) Aplique o método dos quocientes de Rayleigh, utilizando como vector inicial um vector gerado aleatoriamente e uma tolerância para o erro de 10^{-8}.

3. Considere uma matriz
$$A = \begin{bmatrix} 30 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Sabendo que um dos valores próprios desta matriz está próximo de 17, aproxime-o através do método das potencias inversas.

   (b) Sabendo que um dos vectores próprios é grosseiramente aproximado pelo vector $x_0 = [0.2\ 0.01\ 0.6\ -0.9]^T$, calcule o respectivo valor próprio através do método das iterações de Rayleigh.

   (c) Os dois valores próprios de maior magnitude e os respectivos vectores próprios.

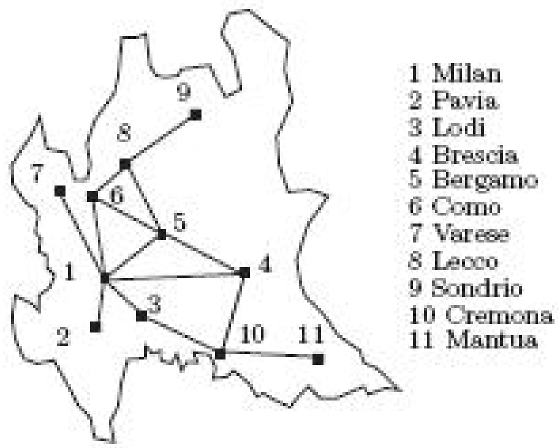
   (d) Calcule todos valores próprios e respectivos vectores próprios.

4. Uma *cadeia de Markov* consiste num sistema com n possíveis estados que passa por uma série de transições de um estado para outro. A probabilidade de passar de um estado j para um estado i é dada por a_{ij}, em que $0 \leq a_{ij} \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Seja A a matriz das probabilidades de transição e seja $x_i^{(k)}$ a probabilidade do sistema estar no estado i depois da transição k. Se a distribuição de probabilidades inicial for dada pelo vector $x^{(0)}$, o vector de distribuição das probabilidades após k etapas será então dado por

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} = A^k x^{(0)}.$$

A longo prazo, o comportamento do sistema é consequentemente determinado por $\lim_{k\to\infty} A^k$.

Considere a representação esquemática da rede de linhas férreas que liga as principais cidades italianas da Lombardia



Supondo que um passageiro que viaja nesta rede de cidade em cidade, sem destino conhecido, apanha o comboio na estação de Sondrio.

(a) Determine a matriz A das probabilidades de transição.

(b) Quais as probabilidades do passageiro estar em cada uma das cidades após sete viagens?

(c) Quais as probabilidades do passageiro estar em cada uma das cidades após um elevado número de viagens?

(d) Acha que o vector distribuição das probabilidades a longo prazo depende do vector inicial $x^{(0)}$?

(e) Qual é a cidade mais acessível por via férrea?

(f) Qual é a cidade menos acessível por via férrea?

(g) Explique os resultados anteriores tendo em conta os valores e vectores próprios de A.