

Capítulo 9 - Integral Definido e Mudança de Variável

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2010/2011



Sumário

Integral Definido e Mudança de Variável

Motivação

- ▶ Por vezes a expressão de uma função é complexa
- ▶ Formulas de primitivação imediata não se aplicam directamente
- ▶ Mudança de variável simplifica o processo de primitivação.

Exemplo 1 - Mudança de variável

Calcular $\int x\sqrt[3]{7-6x^2}dx$

- ▶ Fazendo a mudança de variável $u = 7 - 6x^2$
- ▶ Derivada da nova variável é $du = -12xdx$
- ▶ Introduzindo o factor -12 e multiplicando por $-1/12$ obtemos

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{7-6x^2}dx &= -\frac{1}{12} \int \sqrt[3]{7-6x^2}(-12)xdx \\ &= -\frac{1}{12} \int \sqrt[3]{u}du \\ &= -\frac{1}{12} \int u^{1/3}du \\ &= -\frac{1}{12} \frac{4^{4/3}}{4/3} + C \\ &= -\frac{1}{16}(7-6x^2)^{4/3} + C\end{aligned}$$

Integral Definido e Mudança de Variável

Teorema da Mudança de Variável

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du, \quad \text{onde } u = g(x)$$

Este teorema afirma que após fazer as substituições $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, podemos utilizar os valores de g que correspondem a $x = a$ e $x = b$, respectivamente, como limites do integral envolvendo u , tornando-se assim desnecessário voltar à variável original x após integrar

Exemplo 2 - Teorema da Mudança de Variável

Calcular $\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}} dx$

- ▶ Fazendo a mudança de variável $u = 5x - 1$ e $du = 5dx$
- ▶ Com os limites de integração $u = 9$, para $x = 2$, e $u = 49$, para $x = 10$

$$\begin{aligned} 3 \int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}} dx &= \frac{3}{5} \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}} 5dx \\ &= \frac{3}{5} \int_9^{49} \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{3}{5} \int_9^{49} u^{-1/2} du \\ &= \frac{3}{5} \left[2u^{1/2} \right]_9^{49} \\ &= \frac{6}{5} \left[49^{1/2} - 9^{1/2} \right] = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

Exercícios Propostos

Calcular através da mudança de variável:

1. $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^3 x dx$

2. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$

3. $\int_{-2}^0 \frac{x^2}{(x^3-2)^2} dx$

4. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3} dx$

Bibliografia

- ▶ Earl W. Swokowski, "Cálculo Com Geometria Analítica, Volume 1". McGraw-Hill, 1983.