

Capítulo 9 - Integral Definido

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2010/2011



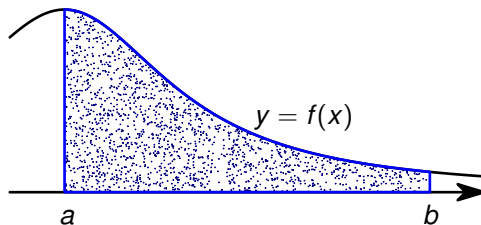
Sumário

Area sob uma Curva

Integral Definido

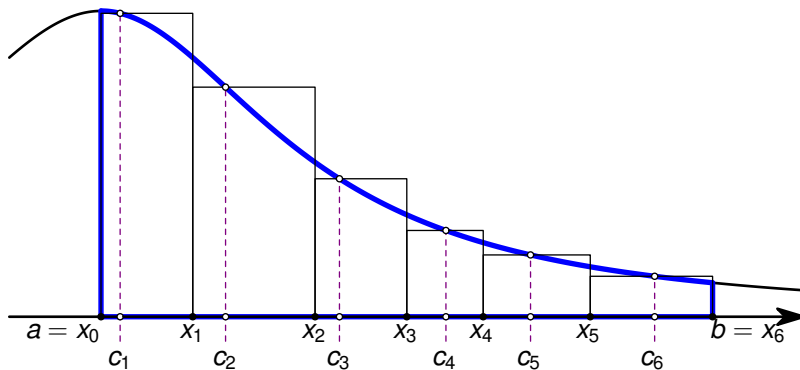
Aplicações do Integral Definido

Como Calcular a Área sob uma Função?



- ▶ Como calcular a área a sombreado?
- ▶ Situada entre a função $y = f(x)$ e o eixo dos x
- ▶ Limitada à esquerda por $x = a$ e à direita por $x = b$

Decomposição da Área em Múltiplos Rectângulos



Decomposição da Área em Múltiplos Rectângulos, continuação

- ▶ Decompondo o intervalo $[a; b]$ em vários sub-intervalos
- ▶ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$
- ▶ Com $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
- ▶ Em cada intervalo escolhemos um ponto c_k para $k = 1, 2, \dots, n$
- ▶ Área aproximada por

$$R = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$$

(*soma de Riemann*)

Exemplo: área sob uma função constante $f(x) = k$

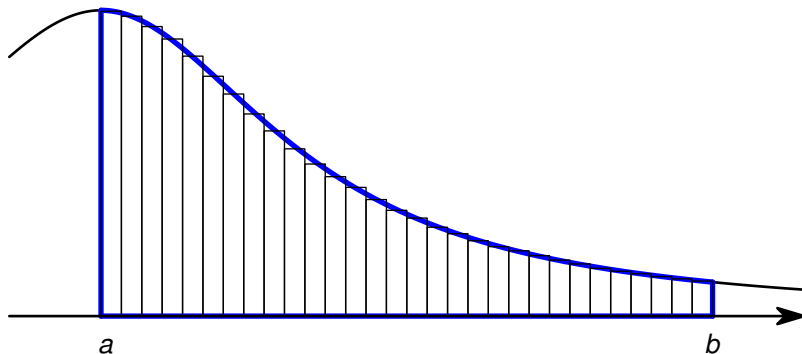
Calcular a área sob a função $f(x) = k$ no intervalo $[0; x]$

1. Decompor o intervalo $[0; x]$ em sub-intervalos de amplitude Δx
2. Somar as áreas correspondentes a cada sub-intervalo:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x \\ &= k\Delta x + k\Delta x + \dots + k\Delta x \\ &= k(\Delta x + \Delta x + \dots + \Delta x) \\ &= kx\end{aligned}$$

- ▶ Área dada pela função kx , por exemplo, se $x = 2$ a área $= 2k$
- ▶ Se k for negativo área $= |kx|$
- ▶ Como $(kx)' = k = f(x)$, a função área é primitiva de $f(x)$, i.é,
área $= |F(x)|$

Decomposição da Área em Múltiplos Rectângulos, continuação



- ▶ Quando função não é constante a decomposição em sub-intervalos não aproxima tão bem a área total
- ▶ Quanto maior for o número de sub-intervalos melhor será a aproximação

Integral Definido

- ▶ Soma de Riemann: $S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$
- ▶ Área entre a e b é aproximada pela soma de Riemann (área $|\approx S_n|$)
- ▶ Área = $|\lim_{n \rightarrow \infty} S_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i|$
- ▶ Se todos os intervalos tiverem a mesma amplitude Δx

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

por sua vez

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for uma função cujo integral $\int_a^b f(x)dx$ existe, e se F é uma primitiva de f no intervalo $[a, b]$, verifica-se que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Abreviadamente, podemos escrever:

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{def}}{=} [F(x)]_{x=a}^b = [F(x)]_a^b$$

Exemplo: Teorema Fundamental do Cálculo

Calcular $\int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$

Começamos por calcular a primitiva de $f(x) = 2 - x - x^2$

$$\int (2 - x - x^2) dx = 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c$$

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c \right]_{-2}^1 \\&= \left[2(1) - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3} + c \right] - \left[2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} + c \right] \\&= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) \\&= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Aplicações do Integral Definido

Entre outras aplicações, o integral definido pode ser utilizado para calcular áreas e volumes definidos analiticamente por funções

- ▶ Áreas sob funções
- ▶ Áreas entre funções
- ▶ Volumes definidos pela revolução de funções em torno de um eixo

Exemplo: calcular área sob uma função

Determinar a área entre o eixo x e $y = x^3$ de $x = -1$ até $x = 1$

Resolvendo de forma imediata obtemos

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Processo correcto consiste em calcular a área entre $y = x^3$ e $y = 0$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^0 (0 - x^3) dx + \int_0^1 (x^3 - 0) dx \\ &= - \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx \\ &= - \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= - \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo: área entre funções

Determinar a área entre as funções $y = x$ e $y = x^3$ de $x = -1$ até $x = 1$

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exemplo: volume de revolução

Determinar o volume do sólido que resulta da rotação em torno do eixo x da função $y = x$ de $x = 0$ até $x = 2$

Sólido resulta da soma de todas as circunferências de espessura dx e raio x desde 0 até 2

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi f(x)^2 dx \\ &= \int_0^2 \pi x^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 x^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \pi \left[\frac{8}{3} - \frac{0}{3} \right] = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Exemplo: volume de revolução

Determinar o volume do sólido que resulta da rotação em torno do eixo y da função $y = x^2$ de $y = 0$ até $y = 4$

Quando a rotação é em torno do eixo y , devemos ter uma função $x = f(y)$, neste caso

$$x = \sqrt{y} \quad (\text{para } 0 \leq y \leq 4)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi f(y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 y dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi [8 - 0] = 8\pi \end{aligned}$$

Bibliografia

- ▶ Eduardo J.C. Martinho, J. da Costa Oliveira e M. Amaral Fortes, "Matemática para o Estudo da Física". Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.
- ▶ Dale Ewen e Michael A. Topper, "Cálculo Técnico", Hemus, 1981
- ▶ Earl W. Swokowski, "Cálculo Com Geometria Analítica, Volume 1". McGraw-Hill, 1983.