

Capítulo 7 - Primitivação de Funções Reais de Variável Real

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2010/2011



Sumário

Primitiva versus Derivada

Regras de Primitivação

Primitivação por Partes

Primitiva *versus* Derivada

- ▶ Dada uma função f é possível determinar a função f' por derivação de f
- ▶ Dada uma função f , será possível determinar uma outra função F tal que $F'(x) = f(x)$?

Definição:

Uma função F é uma **primitiva** ou **integral indefinida** de uma função f num intervalo I se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

Exemplo:

$F(x) = (2 + x)^3$ é a primitiva de $f(x) = 3(2 + x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ pois
 $F'(x) = f(x)$

Função Primitiva não é Única

- ▶ Primitiva de uma função f não é única
- ▶ Se F e G são duas primitivas de f , então F e G diferem apenas numa constante
- ▶ Existe uma constante C tal que $G(x) = F(x) + C$

Exemplo:

$F(x) = (2+x)^3$ e $G(x) = (2+x)^3 - 5$ são ambas primitivas de $f(x) = 3(2+x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ pois $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$

- ▶ Notação: $\int f(x)dx$ (primitiva de $f(x)$)
- ▶ Escreve-se $\int f(x)dx = F(x) + C$ quando $F'(x) = f(x)$
- ▶ $\int 3(2+x)^2 dx = (2+x)^3 + C$

Propriedades das Primitivas

- ▶ $\int F'(x)dx = F(x) + C$
- ▶ $\frac{d}{dx} [\int f(x)dx] = f(x)$
- ▶ $\int k.f(x)dx = k. \int f(x)dx$
- ▶ $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Exemplos:

$$\int 2 \cos(x)dx = 2 \int \cos(x)dx = 2\text{sen}(x) + C$$

$$\int 2x - x^2 dx = \int 2x dx - \frac{1}{3} \int 3x^2 dx = x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$$

Primitivas Imediatas

Sejam f e g funções integráveis, C e k constantes e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$

$$\int k \, dx = kx + C$$

$$\int f' f^n \, dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para todo } n \neq -1$$

$$\int \frac{f'}{f} \, dx = \ln |f| + C \quad (\text{Repare no valor absoluto})$$

$$\int f' e^f \, dx = e^f + C$$

$$\int f' a^f \, dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$$

Exercício 1: Primitivas Imediatas

Calcular:

1. $\int \sqrt{x} + x^3 dx$

2. $\int 6x^2 \sqrt{2x^3 + 1} dx$

3. $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Soluções:

1. $\int \sqrt{x} + x^3 dx = \int x dx + \int x^3 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int 6x^2 \sqrt{2x^3 + 1} dx = \frac{(2x^3+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}(2x^3 + 1)^{3/2} + C$

3. $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln |x^2 + x| + C$

Primitivas Imediatas, continuação

$$\int f' \operatorname{sen}(f) \, dx = -\cos(f) + C$$

$$\int f' \cos(f) \, dx = \operatorname{sen}(f) + C$$

$$\int f' \operatorname{tg}(f) \, dx = -\ln |\sec(f)| + C$$

$$\int \frac{f'}{a^2 + f^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{f}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}} \, dx = \operatorname{arcsen}(f) + C$$

Exercício 2: Primitivas Imediatas

Calcular:

1. $\int \cos(3x) dx$
2. $\int \sin(4x + 3) dx$
3. $\int x^2 \sin(x^3 + 2) dx$

Soluções:

1. $\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$
2. $\int \sin(4x + 3) dx = -\frac{1}{4} \int -4 \sin(4x + 3) dx = -\frac{1}{4} \cos(4x + 3) + C$
3. $\int x^2 \sin(x^3 + 2) dx = -\frac{1}{3} \int -3x^2 \sin(x^3 + 2) dx = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 2) + C$

Primitivação por Partes

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g' dx \text{ em que } F(x) = \int f(x) dx$$

- ▶ Técnica útil para primitivar produtos de funções que envolvem
 - ▶ funções polinomiais e exponenciais
 - ▶ funções trigonométricas e exponenciais
 - ▶ funções trigonométricas inversas
 - ▶ funções logarítmicas
- ▶ Se necessário, esta técnica pode ser aplicada várias vezes no mesmo problema, contudo deve manter-se a escolha da função $f(x)$

Exercício 3: Primitivas por Partes

Calcular:

1. $\int \ln(x) dx$

2. $\int x e^{2x} dx$

3. $\int x \sin(x) dx$

Soluções:

1. $\int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + C$

2. $\int x e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 1 dx = \frac{e^{2x}}{2} x - \frac{e^{2x}}{4} + C$

3. $\int x \sin(x) dx = -\cos(x)x + \int \cos(x) \cdot 1 dx = -\cos(x)x + \sin(x) + C$

Bibliografia

- ▶ Dale Ewen e Michael A. Topper, “Cálculo Técnico”, Hemus, 1981
- ▶ Earl W. Swokowski, "Cálculo Com Geometria Analítica, Volume 1". McGraw-Hill, 1983.