

Capítulo 6 - Derivação de Funções Reais de Variável Real

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2010/2011



Sumário

Noção de Derivada

Regras de Derivação

Aplicações da Derivada

Velocidade Instantânea

Posição de um veículo que se desloca entre dois pontos é dada por uma função $y = f(x)$ em que x representa o tempo

- ▶ Distância percorrida a velocidade média $v_{\text{med}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- ▶ Exemplo: Supondo que uma partícula em movimento, cuja posição é dada por $y = x^3 + 1$ cm, inicia o deslocamento em $a = 0$ seg. e pára em $b = 12$ seg., velocidade média será

$$v_{\text{med}} = \frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \frac{(12^3 + 1) - (0^3 + 1)}{12} = 144 \text{ cm/seg}$$

- ▶ Velocidade média não informa sobre o tipo de movimento entre a e b , por vezes queremos saber detalhadamente o movimento em cada instante
- ▶ Velocidade instantânea é a variação da posição num pequeno intervalo:

$$v_{\text{inst}} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Definição de Derivada

Taxa de variação de uma função num ponto x :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

é a **derivada da função f** no ponto x

Exemplo: Uma partícula em movimento, cuja posição é dada por $y = 3x^2 + 1$ cm, no tempo $x = 2$ seg. tem velocidade instantânea

$$\begin{aligned} v_{\text{inst}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(2 + \Delta x)^2 + 1] - [3(2)^2 + 1]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(12 + 3\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 12 + 3\Delta x = 12 \text{ cm/seg} \end{aligned}$$

Interpretação Geométrica da Derivada

- ▶ Recta secante à função $f(x)$ em x e $x + \Delta x$ tem declive

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- ▶ Uma recta tangente à função $f(x)$ em x tem declive

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- ▶ Derivada de uma função num ponto x representa o declive da recta tangente à função nesse ponto

Derivada como Função

- ▶ Derivada de uma função num ponto x qualquer resulta numa nova função
- ▶ *Exemplo:* derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ para um x qualquer

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 1] - [3x^2 + 1]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(6x + 3\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x + 3\Delta x = 6x\end{aligned}$$

Derivada de $f(x)$ é uma função representada por $\frac{dy}{dx}$, y' , $\frac{d}{dx} [f(x)]$ ou $f'(x)$

Regras de Derivação

Aplicando a definição de derivada

$$\frac{d}{dx} [f(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

deduzem-se as expressões correspondentes às derivadas de qualquer função

De acordo com as propriedades dos limites temos

- ▶ $\frac{d}{dx} [cf(x)] = c \frac{d}{dx} [f(x)]$, com c uma constante
- ▶ $\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] + \frac{d}{dx} [g(x)]$
- ▶ $\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] - \frac{d}{dx} [g(x)]$

Derivada de uma Função Polinomial

- ▶ $\frac{d}{dx}(c) = 0$, com c uma constante
- ▶ $\frac{d}{dx}(x) = 1$
- ▶ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx}(2x^3 + x - 6)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^3 + x - 6) &= (2x^3 + x - 6)' \\ &= (2x^3)' + (x)' - (6)' \\ &= 2(x^3)' + 1 - 0 \\ &= 2(3x^2) + 1 \\ &= 6x^2 + 1\end{aligned}$$

Regra da cadeia:

Se $y = f(u)$, $u = g(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existirem, então a função composta definida por $y = f[g(x)]$ tem derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x)$$

Exemplo: se $y = u^3$ e $u = x^2 + 1$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = (u^3)' u' \\ &= 3u^2(x^2 + 1)' \\ &= 3(x^2 + 1)^2(2x) \\ &= 6x(x^2 + 1)^2\end{aligned}$$

Derivada do Produtos de Funções

Seja $y = f(x)$ uma função que resulta do produto de duas funções $y = u.v$ com $u = g(x)$ e $v = h(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx} [(4x + 3)(7x - 1)]$

Considerando $u = 4x + 3$, $v = 7x - 1$ e $y = u.v$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ &= uv' + vu' \\ &= (4x + 3)(7x - 1)' + (7x - 1)(4x + 3)' \\ &= (4x + 3)(7) + (7x - 1)(4) \\ &= 28x + 21 + 28x - 4 \\ &= 56x + 17\end{aligned}$$

Derivada do Quociente de Funções

Seja $y = f(x)$ uma função que resulta do quociente de duas funções $y = u/v$ com $u = g(x)$ e $v = h(x) \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx} \left(\frac{5x+3}{4x^2-7} \right)$. Considerando $u = 5x + 3$, $v = 4x^2 - 7$ e $y = u/v$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{vu' - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(4x^2 - 7)(5x + 3)' - (5x + 3)(4x^2 - 7)'}{(4x^2 - 7)^2} \\ &= \frac{(4x^2 - 7)(5) - (5x + 3)(8x)}{(4x^2 - 7)^2} \\ &= \frac{20x^2 - 35 - 40x^2 - 24x}{(4x^2 - 7)^2} = \frac{-20x^2 - 24x - 35}{(4x^2 - 7)^2} \end{aligned}$$

Derivada da Potência de uma Funções

Seja $y = u^n$ com $u = f(x) \neq 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx} (\sqrt{3x^2 - 2})$. Como $\sqrt{3x^2 - 2} = (3x^2 - 2)^{1/2}$, consideramos $u = 3x^2 - 2$ e $y = u^{1/2}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [(3x^2 - 2)^{1/2}] \\ &= \frac{1}{2} (3x^2 - 2)^{1/2-1} (3x^2 - 2)' \\ &= \frac{1}{2} (3x^2 - 2)^{-1/2} (6x) \\ &= \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}} \end{aligned}$$

Derivadas de Funções Trigonométricas

- ▶ $\frac{d}{dx} (\text{sen } u) = (\cos u) \frac{du}{dx}$
- ▶ $\frac{d}{dx} (\cos u) = -(\text{sen } u) \frac{du}{dx}$
- ▶ $\frac{d}{dx} (\text{tg } u) = (\sec^2 u) \frac{du}{dx}$
- ▶ $\frac{d}{dx} (\text{cotg } u) = -(\text{cosec}^2 u) \frac{du}{dx}$
- ▶ $\frac{d}{dx} (\sec u) = (\sec^2 u)(\text{tg } u) \frac{du}{dx}$
- ▶ $\frac{d}{dx} (\text{cosec } u) = -(\text{cosec } u)(\text{cotg } u) \frac{du}{dx}$

Exemplo: calcular $\frac{d}{dx} \cos(x^4 - 2x)$. Considerando $u = x^4 - 2x$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos u) &= -(\text{sen } u) \frac{du}{dx} \\ &= -(\text{sen } u)(x^4 - 2x)' \\ &= -(\text{sen } u)(4x^3 - 2) \\ &= (-4x^3 + 2)\text{sen } u\end{aligned}$$

Derivadas das Funções Exponencial e Logaritmo

- ▶ $\frac{d}{dx} (\log_b u) = \frac{1}{u} (\log_b e) \frac{du}{dx}$ com $e = 2,718\dots$
- ▶ $\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
- ▶ $\frac{d}{dx} (b^u) = \frac{b^u}{\log_b e} \frac{du}{dx}$
- ▶ $\frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$

Exemplo: $\frac{d}{dx} \ln(5x^2) = \frac{1}{5x^2} (5x^2)' = \frac{10x}{5x^2} = \frac{2}{x}$

Exemplo: $\frac{d}{dx} (e^{-2x}) = e^{-2x} (-2x)' = -2e^{-2x}$

Derivada de Funções Implícitas

- ▶ Uma equação da forma $y = 2x^2 - 3$ define explicitamente y como função de x
- ▶ A equação $4x^2 - 2y = 6$ define a mesma função
- ▶ Diz-se que y é uma função **implícita** de x

Exemplo: Derivar a função implícita $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y^4 + 3y - 4x^3) &= \frac{d}{dx}(5x + 1) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(y^4) + \frac{d}{dx}(3y) - \frac{d}{dx}(4x^3) &= \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \\ \Leftrightarrow 4y^3 y' + 3y' - 12x^2 &= 5 + 0 \\ \Leftrightarrow (4y^3 + 3)y' &= 12x^2 + 5 \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}\end{aligned}$$

Derivadas de Ordem Superior

- ▶ Primeira derivada: $y' = f'(x) = \frac{d}{dx} [f(x)] = \frac{dy}{dx}$
- ▶ Segunda derivada: $y'' = f''(x) = \frac{d}{dx} [f(x)'] = \frac{d^2 y}{dx^2}$
- ▶ Terceira derivada: $y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx} [f(x)''] = \frac{d^3 y}{dx^3}$
- ▶ n -ésima derivada: $= f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} [f(x)^{(n-1)}] = \frac{d^n y}{dx^n}$

Exemplo: As 4 primeiras derivadas de $f(x) = 4x^2 - 5x + 8 - 3x^{-1}$

$$f'(x) = 8x - 5 + 3x^{-2} = 8x - 5 + \frac{3}{x^2}$$

$$f''(x) = 8 - 6x^{-3} = 8 - \frac{6}{x^3}$$

$$f'''(x) = 18x^{-4} = \frac{18}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -72x^{-5} = \frac{72}{x^5}$$

Monotonia

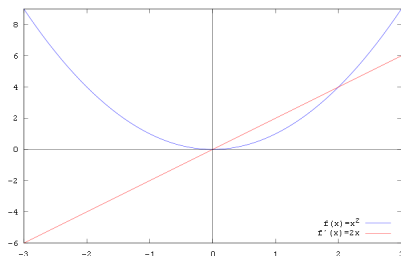
Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$

- ▶ $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$, então $f(x)$ é crescente em $[a; b]$
- ▶ $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a; b[$, então $f(x)$ é decrescente em $[a; b]$

Exemplo: Gráfico $f(x) = x^2$ consiste em duas partes, um decrescente e outra crescente. Podemos saber isso a partir da derivada que é

$$f'(x) = 2x \begin{cases} > 0 & \text{for } x > 0 \\ < 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

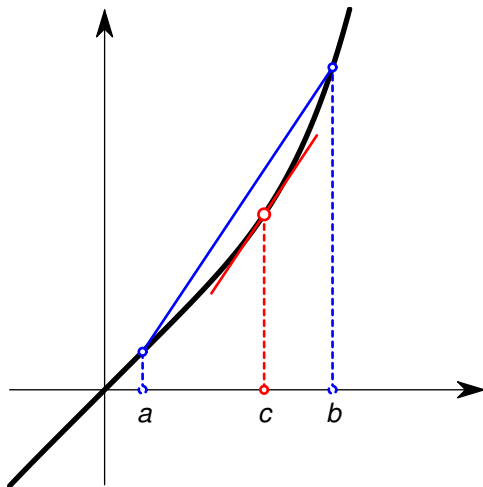
Pelo que $f(x) = x^2$ é *decrescente* para $x < 0$ e *crescente* para $x > 0$



Teorema do valor Médio

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$, então existe um número $c \in]a; b[$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

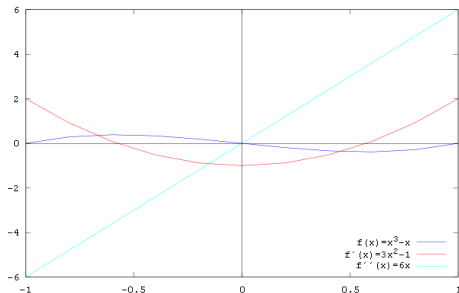


Concavidade

Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto contendo c , então, no ponto $(c, f(c))$, o gráfico tem:

- Concavidade para cima se $f''(x) > 0$
- Concavidade para baixo se $f''(x) < 0$

Exemplo: $f(x) = x^3 - x$

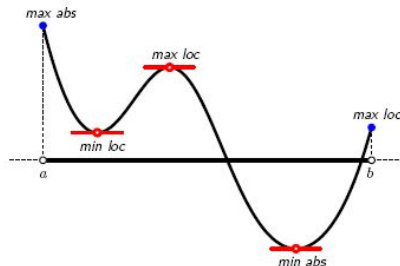


Mínimos e Máximos

Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto contendo c e $f'(c) = 0$:

- ▶ Se $f''(c) > 0$, então f tem um máximo local em c
- ▶ Se $f''(c) < 0$, então f tem um mínimo local em c

Exemplo:



Bibliografia

- ▶ Dale Ewen e Michael A. Topper, “Cálculo Técnico”, Hemus, 1981
- ▶ Earl W. Swokowski, "Cálculo Com Geometria Analítica, Volume 1". McGraw-Hill, 1983.