

# Capítulo 4 - Valores e Vectores Próprios

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática  
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2011/2012



# Sumário

Problemas de Valores e Vectors Próprios  
Interpretação Geométrica

Cálculo através do Polinómio Característico

Propriedades

## Motivação

- ▶ Problemas de valores próprios ocorrem em muitas áreas da ciência e da engenharia
- ▶ Valores próprios de uma matriz reflectem propriedades essenciais de uma matriz
- ▶ Valores próprios são igualmente importantes na análise de muitos métodos matemáticos
- ▶ Teoria e métodos aplicam-se tanto a matrizes reais como a matrizes complexas
- ▶ Para matrizes complexas utiliza-se a matriz transposta conjugada,  $A^H$ , em vez da transposta,  $A^T$

## Valores e Vectores Próprios

- ▶ **Problema de valores próprios** típico: dada uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , encontrar um escalar  $\lambda$  e um vector não-nulo  $x$  tal que

$$Ax = \lambda x$$

- ▶  $\lambda$  é **valor próprio** e  $x$  o **vector próprio** correspondente
- ▶  $\lambda$  pode ser complexo mesmo que  $A$  seja real
- ▶ **Espectro**:  $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , é o conjunto de todos os valores próprios de  $A$
- ▶ **Raio espectral**:  $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}$

### Exemplo 1: Valores e Vectores Próprios

Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

1. Mostre que  $x = [1 \ 1]^T$  é vector próprio de  $A$
2. Mostre que  $y = [-1 \ 1]^T$  não é vector próprio de  $A$

Resposta:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x$$

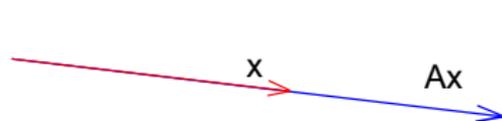
$x$  é o vector próprio associado ao valor próprio 2

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda y$$

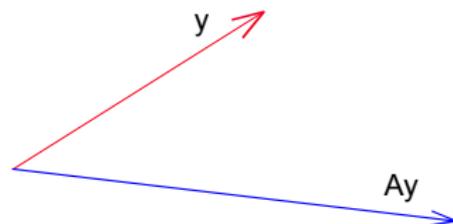
$y$  não é vector próprio de  $A$  porque não existe nenhum escalar  $\lambda$  tal que  $Ay = \lambda y$

## Interpretação Geométrica

### Interpretação Geométrica



- ▶  $Ax = \lambda x$
- ▶  $Ax$  tem a mesma direcção de  $x$
- ▶ comprimento e sentido de  $Ax$  depende de  $\lambda$



- ▶  $y$  não é valor próprio de  $A$
- ▶  $Ay \neq \lambda y$
- ▶  $Ay$  não tem a mesma direcção de  $y$



## Cálculo dos valores e vetores próprios

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n \times n$ , queremos determinar um vector  $x$ , de ordem  $n \times 1$  tal que

$$Ax = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax - \lambda Ix = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

Temos de resolver o sistema homogéneo  $(A - \lambda I)x = 0$  de maneira a encontrar a solução não trivial, pois  $x \neq 0$ , para tal o determinante da matriz dos coeficientes tem de ser nulo:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Desenvolvimento deste determinante origina um polinómio de grau  $n$  em  $\lambda$  cujas raízes são os valores próprios de  $A$

## Determinante e Polinómio Característico

Desenvolvimento do **determinante característico**  $|A - \lambda I| = 0$  origina o **polinómio característico**

$$c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n = 0$$
$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

cujas  $n$  raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são os valores próprios de  $A$   
Resolução dos  $n$  sistemas

$$(A - \lambda_i I)x_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

permite obter os  $n$  vectores próprios correspondentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$   
Como  $|A - \lambda I| = 0$  cada sistema  $(A - \lambda_i I)x_i = 0$  tem solução múltipla, pelo que cada  $x_i$  representa uma solução particular extraída arbitrariamente da solução geral

## Exemplo 2: Polinómio Característico

Determinar os valores próprios de  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - \lambda)(3 - \lambda) - (-1)(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$$

## Exemplo 3: Determinar os Vectores Próprios

Determinar os vectores próprios de  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I) x_1 = 0 &\Leftrightarrow \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} - x_{12} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = x_{12} \\ x_{12} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{se } \alpha = 1 \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo 3, continuação

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda_2 I) x_2 = 0 &\Leftrightarrow \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_{11} - x_{12} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -x_{12} \\ x_{12} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R} \\
 &\quad \text{se } \alpha = 1 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Propriedades

- ▶ Valores próprios de matriz diagonal são os próprios elementos da diagonal
- ▶ Valores próprios de matriz triangular são os elementos da diagonal
- ▶ Matriz  $A$  de ordem  $n$  possui exactamente  $n$  valores próprios
- ▶ Se  $A$  for simétrica ( $A = A^T$ ) os seus valores próprios são todos reais e os respectivos vectores próprios são ortogonais

## Invariantes de uma Matriz

$$\text{Considerando } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- ▶ **Traço** de  $A$  é igual à soma de todos os elementos da diagonal principal de  $A$ :

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

- ▶ Traço é igual à soma dos valores próprios

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

- ▶ Determinante de  $A$  é igual ao produto dos valores próprios

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

- ▶ Se um dos valores próprios de  $A$  for nulo a matriz  $A$  é singular

## Singularidade e Não-Singularidade

Uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , é **não-singular** se verificar qualquer uma das seguintes propriedades

1. Existe a inversa de  $A$ , designada por  $A^{-1}$
2.  $|A| \neq 0$
3. Para qualquer  $z \neq 0$ ,  $Az \neq 0$
4. Nenhum valor próprio de  $A$  é nulo:  $\lambda = 0 \notin \lambda(A)$



## Bibliografia

- ▶ Bernard Kolman, "Introdução à Álgebra Linear com Aplicações", Prentice-Hall do Brasil, 1998
- ▶ Ia. S. Bugrov e S. M. Nikolski, "Matemática para Engenharia, Vol. 1 - Elementos de Álgebra Linear e de Geometria Analítica", Editora Mir Moscovo, 1986