Capítulo 3 - Sistemas de Equações Lineares

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

Matemática I - 1º Semestre 2011/2012

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Sumário

Método da Matriz Inversa

- Representação Matricial de um Sistema
- Cálculo da Matriz Inversa

Sumário

Método da Matriz Inversa

- Representação Matricial de um Sistema
- Cálculo da Matriz Inversa

Método de Cramer

Sumário

Método da Matriz Inversa
- Representação Matricial de um Sistema
- Cálculo da Matriz Inversa

Método de Cramer

Método de Eliminação de Gauss

Sumário

Método da Matriz Inversa

- Representação Matricial de um Sistema
- Cálculo da Matriz Inversa

Método de Cramer

Método de Eliminação de Gauss

Classificação dos sistemas

- Classificação

Motivação

Exemplo 1: aplicação de sistemas de equações lineares

Uma empresa de transportes marítimos transporta as suas mercadorias em caixas de 3 tipos, designados por A, B e C, dispondo igualmente de 3 tipos de contentores, designados por I, II e III, que podem transportar as seguintes quantidades de caixas:

	A	B	C
I	4	5	2
II	3	2	2
III	2	3	3

Quantas caixas de cada tipo (x_1, x_2 e x_3) deve a empresa preparar para o caso de ter ao seu dispor 42 contentores do tipo I, 27 do tipo *II* ou 33 do tipo *III*?

Motivação, continuação

Exemplo 1: solução é obtida resolvendo o seguinte sistemas

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 27 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33 \end{cases}$$

Motivação, continuação

Exemplo 1: solução é obtida resolvendo o seguinte sistemas

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 27 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33 \end{cases}$$

Este sistema pode representar-se na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 27 \\ 33 \end{bmatrix}$$

Motivação, continuação

Exemplo 1: solução é obtida resolvendo o seguinte sistemas

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 27 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33 \end{cases}$$

Este sistema pode representar-se na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 27 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 27 \\ 33 \end{bmatrix}$$

Motivação, continuação

Exemplo 1: solução é obtida resolvendo o seguinte sistemas

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 27 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33 \end{cases}$$

Este sistema pode representar-se na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 27 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 27 \\ 33 \end{bmatrix}$$

Como resolver este sistema?

O sistema com m equações e n incógnitas pode ser representado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O sistema com m equações e n incógnitas pode ser representado por

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

O sistema com m equações e n incógnitas pode ser representado por

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b}$$

O sistema com m equações e n incógnitas pode ser representado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b} \Leftrightarrow Ax = b$$

Equação Matricial

- Sistema pode ser representado pela equação matricial $Ax = b$
  - A é a matriz dos coeficientes
  - x é vector da incógnitas (solução so sistema)
  - b é vector dos termos independentes do sistema

Equação Matricial

- Sistema pode ser representado pela equação matricial $Ax = b$
  - A é a matriz dos coeficientes
  - x é vector da incógnitas (solução so sistema)
  - b é vector dos termos independentes do sistema
- Resolver o sistema consiste em resolver a equação matricial $Ax = b$ em ordem ao vector x

Equação Matricial

- Sistema pode ser representado pela equação matricial $Ax = b$
  - A é a matriz dos coeficientes
  - x é vector da incógnitas (solução so sistema)
  - b é vector dos termos independentes do sistema
- Resolver o sistema consiste em resolver a equação matricial $Ax = b$ em ordem ao vector x
- Vamos resolver apenas sistemas em que o número de equações é igual ao número de incógnitas ($m = n$), nesse caso a matriz A é quadrada

Resolução da Equação Matricial

- Se A for quadrada e não-singular, existe uma matriz, representada por A^{-1}, que é inversa de A tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Resolução da Equação Matricial

- Se A for quadrada e não-singular, existe uma matriz, representada por A^{-1}, que é inversa de A tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Resolver

$$Ax = b$$

Resolução da Equação Matricial

- Se A for quadrada e não-singular, existe uma matriz, representada por A^{-1}, que é inversa de A tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Resolver

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ \Leftrightarrow &A^{-1}Ax = A^{-1}b \end{aligned}$$

Resolução da Equação Matricial

- Se A for quadrada e não-singular, existe uma matriz, representada por A^{-1}, que é inversa de A tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Resolver

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \Leftrightarrow & A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ \Leftrightarrow & I_n x = A^{-1}b \end{aligned}$$

Resolução da Equação Matricial

- Se A for quadrada e não-singular, existe uma matriz, representada por A^{-1}, que é inversa de A tal que
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$
- Resolver
$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \Leftrightarrow & A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ \Leftrightarrow & I_n x = A^{-1}b \\ \Leftrightarrow & x = A^{-1}b \end{aligned}$$
- A solução do sistema é igual à multiplicação da matriz inversa, A^{-1}, pelo vector dos termos independentes, b

Resolução da Equação Matricial

- Se A for quadrada e não-singular, existe uma matriz, representada por A^{-1}, que é inversa de A tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Resolver

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \Leftrightarrow & A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ \Leftrightarrow & I_n x = A^{-1}b \\ \Leftrightarrow & x = A^{-1}b \end{aligned}$$

- A solução do sistema é igual à multiplicação da matriz inversa, A^{-1}, pelo vector dos termos independentes, b
- Resolução do sistema passa por calcular A^{-1}

Matriz Adjunta

Definição de Matriz Adjunta:

Considerando A uma matriz de ordem n, chama-se matriz adjunta de A, e designa-se por $adj(A)$, à matriz de ordem n cujo (j,i)-ésimo elemento é o cofactor (ou complemento algébrico) A_{ij} de a_{ij}:

$$adj\,(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Matriz Adjunta

Calcular a matriz adjunta de A, do Exemplo 1, $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Exemplo 2: Matriz Adjunta

Calcular a matriz adjunta de A, do Exemplo 1, $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Começamos por calcular os cofactores

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Exemplo 2, continuação

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -9 & 8 & -2 \\ 6 & -2 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 6 \\ -5 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Desenvolvimento de Laplace

- Se A for quadrada e de ordem n verifica-se que

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} |A| & \text{se } \; i = k, \\ 0 & \text{se } \; i \neq k. \end{cases}$$

- Se $i = k$ corresponde ao determinante de A obtido através do desenvolvimento de Laplace segundo a i-ésima linha
- Caso $i \neq k$ corresponde ao determinante de uma matriz B cuja linha k é substituída pela linha i, que pelas propriedades dos determinantes é nulo

Desenvolvimento de Laplace

- Se A for quadrada e de ordem n verifica-se que

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} |A| & \text{se } \ i = k, \\ 0 & \text{se } \ i \neq k. \end{cases}$$

- Se $i = k$ corresponde ao determinante de A obtido através do desenvolvimento de Laplace segundo a i-ésima linha
- Caso $i \neq k$ corresponde ao determinante de uma matriz B cuja linha k é substituída pela linha i, que pelas propriedades dos determinantes é nulo

Desenvolvimento de Laplace

- Se A for quadrada e de ordem n verifica-se que

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} |A| & \text{se } i = k, \\ 0 & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

- Se $i = k$ corresponde ao determinante de A obtido através do desenvolvimento de Laplace segundo a i-ésima linha
- Caso $i \neq k$ corresponde ao determinante de uma matriz B cuja linha k é substituída pela linha i, que pelas propriedades dos determinantes é nulo
- Este resultado pode extender-se ao desenvolvimento de Laplace por coluna

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} |A| & \text{se } j = k, \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Exemplo 3: Desenvolvimento de Laplace

Considerando a matriz A, do Exemplo 1, vamos calcular

1. Desenvolvimento da linha 2
2. Desenvolvimento da linha 2 com os cofactores da 3ª linha
3. Desenvolvimento da coluna 3 com os cofactores da 1ª coluna

Exemplo 3: Desenvolvimento de Laplace

Considerando a matriz A, do Exemplo 1, vamos calcular

1. Desenvolvimento da linha 2
2. Desenvolvimento da linha 2 com os cofactores da 3ª linha
3. Desenvolvimento da coluna 3 com os cofactores da 1ª coluna

Respostas:

1. $a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} = (3)(-9)+(2)(8)+(2)(-2) = -15 = |A|$

Exemplo 3: Desenvolvimento de Laplace

Considerando a matriz A, do Exemplo 1, vamos calcular

1. Desenvolvimento da linha 2
2. Desenvolvimento da linha 2 com os cofactores da 3ª linha
3. Desenvolvimento da coluna 3 com os cofactores da 1ª coluna

Respostas:

1. $a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} = (3)(-9)+(2)(8)+(2)(-2) = -15 = |A|$
2. $a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = (3)(6) + (2)(-2) + (2)(-7) = 0$

Exemplo 3: Desenvolvimento de Laplace

Considerando a matriz A, do Exemplo 1, vamos calcular

1. Desenvolvimento da linha 2
2. Desenvolvimento da linha 2 com os cofactores da 3ª linha
3. Desenvolvimento da coluna 3 com os cofactores da 1ª coluna

Respostas:

1. $a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} = (3)(-9)+(2)(8)+(2)(-2) = -15 = |A|$
2. $a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = (3)(6) + (2)(-2) + (2)(-7) = 0$
3. $a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = (2)(0) + (2)(-9) + (3)(6) = 0$

Matriz Inversa

$$A \cdot adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Como o (i, j)-ésimo elemento da matriz produto $A \cdot adj(A)$ é

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Matriz Inversa, continuação

$$A \cdot adj(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I_n$$

Da mesma forma $adj(A) \cdot A = |A| I_n$

$$\begin{aligned} & adj(A) \cdot A = |A| I_n \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{|A|} adj(A) \cdot A = I_n \\ \Leftrightarrow & A^{-1} \cdot A = I_n \end{aligned}$$

Matriz Inversa, continuação

Se A for uma matriz quadrada de ordem n a sua inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Matriz Inversa, continuação

Se A for uma matriz quadrada de ordem n a sua inversa é

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

A admite inversa se e só se $|A| \neq 0$

Exemplo 4: Resolução pelo Método da Matriz Inversa

Considerando a matriz A, do Exemplo 1, vamos calcular

1. A^{-1}, a matriz inversa de A
2. Resolver o sistema $Ax = b$, enunciado no Exemplo 1

Exemplo 4: Resolução pelo Método da Matriz Inversa

Considerando a matriz A, do Exemplo 1, vamos calcular

1. A^{-1}, a matriz inversa de A
2. Resolver o sistema $Ax = b$, enunciado no Exemplo 1

Respostas:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 6 \\ -5 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

Exemplo 4: Resolução pelo Método da Matriz Inversa

Considerando a matriz A, do Exemplo 1, vamos calcular

1. A^{-1}, a matriz inversa de A
2. Resolver o sistema $Ax = b$, enunciado no Exemplo 1

Respostas:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{-15}\begin{bmatrix} 0 & -9 & 6 \\ -5 & 8 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 42 \\ 27 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Componentes do Vector Solução

Como vimos anteriormente, a solução dum sistema $Ax = b$, com n equações e n incógnitas, existe e é única se $|A| \neq 0$ e é dada por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1i}}{|A|} & \frac{A_{2i}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{ni}}{|A|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Componentes do Vector Solução

Como vimos anteriormente, a solução dum sistema $Ax = b$, com n equações e n incógnitas, existe e é única se $|A| \neq 0$ e é dada por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1i}}{|A|} & \frac{A_{2i}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{ni}}{|A|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Da igualdade anterior verificamos que

$$x_i = \frac{A_{1i}}{|A|} b_1 + \frac{A_{2i}}{|A|} b_2 + \cdots + \frac{A_{ni}}{|A|} b_n \quad \text{para} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Método de Cramer

Seja A_i uma matriz obtida de A, substituindo a coluna i por b

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Método de Cramer

Seja A_i uma matriz obtida de A, substituindo a coluna i por b

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Calculando $|A_i|$ pelo desenvolvimento de Laplace da i-ésima coluna:

$$|A_i| = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}$$

Método de Cramer

Seja A_i uma matriz obtida de A, substituindo a coluna i por b

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Calculando $|A_i|$ pelo desenvolvimento de Laplace da i-ésima coluna:

$$\begin{aligned} |A_i| &= b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni} \\ &= x_i\,|A| \end{aligned}$$

Método de Cramer

Seja A_i uma matriz obtida de A, substituindo a coluna i por b

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Calculando $|A_i|$ pelo desenvolvimento de Laplace da i-ésima coluna:

$$\begin{aligned} |A_i| &= b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni} \\ &= x_i\,|A| \end{aligned}$$

Assim concluímos que

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplo 5: Método de Cramer

Resolver sistema $Ax = b$, do Exemplo 1, pelo método de Cramer

Exemplo 5: Método de Cramer

Resolver sistema $Ax = b$, do Exemplo 1, pelo método de Cramer

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 42 & 5 & 2 \\ 27 & 2 & 2 \\ 33 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-45}{-15} = 3$$

Exemplo 5: Método de Cramer

Resolver sistema $Ax = b$, do Exemplo 1, pelo método de Cramer

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 42 & 5 & 2 \\ 27 & 2 & 2 \\ 33 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-45}{-15} = 3$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 42 & 2 \\ 3 & 27 & 2 \\ 2 & 33 & 3 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-60}{-15} = 4$$

Exemplo 5: Método de Cramer

Resolver sistema $Ax = b$, do Exemplo 1, pelo método de Cramer

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 42 & 5 & 2 \\ 27 & 2 & 2 \\ 33 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-45}{-15} = 3$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 42 & 2 \\ 3 & 27 & 2 \\ 2 & 33 & 3 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-60}{-15} = 4$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 42 \\ 3 & 2 & 27 \\ 2 & 3 & 33 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-75}{-15} = 5$$

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas dizem-se equivalentes se todas as soluções de um deles (e só essas) forem também soluções do outro.

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas dizem-se equivalentes se todas as soluções de um deles (e só essas) forem também soluções do outro.

1. Dois sistemas são equivalentes se um for obtido do outro por alteração da ordem de duas das suas equações:

$$E_i \leftrightarrow E_j$$

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas dizem-se equivalentes se todas as soluções de um deles (e só essas) forem também soluções do outro.

1. Dois sistemas são equivalentes se um for obtido do outro por alteração da ordem de duas das suas equações:
$$E_i \leftrightarrow E_j$$
2. Dois sistemas são equivalentes se um for obtido do outro por multiplicação de uma das suas equações por um escalar não nulo:
$$E_i \leftarrow \alpha E_i, \quad \text{com} \quad \alpha \neq 0$$

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas dizem-se equivalentes se todas as soluções de um deles (e só essas) forem também soluções do outro.

1. Dois sistemas são equivalentes se um for obtido do outro por alteração da ordem de duas das suas equações:
$$E_i \leftrightarrow E_j$$
2. Dois sistemas são equivalentes se um for obtido do outro por multiplicação de uma das suas equações por um escalar não nulo:
$$E_i \leftarrow \alpha E_i, \quad \text{com} \quad \alpha \neq 0$$
3. Dois sistemas são equivalentes se a uma das suas equações for adicionado (ou subtraído) um múltiplo de outra equação:
$$E_i \leftarrow E_i + \alpha E_j.$$

Exemplo 1: Sistemas Equivalentes

Os seguintes sistemas são equivalentes

$$\begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ x+y-z=-1 \\ 3x-z=1 \\ -x-y+z=1 \end{cases} \overset{E_1 \leftrightarrow E_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-3y+z=4 \\ 3x-z=1 \\ -x-y+z=1 \end{cases}$$

$$\overset{E_1 \leftarrow 2E_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y-2z=-2 \\ 2x-3y+z=4 \\ 3x-z=1 \\ -x-y+z=1 \end{cases} \overset{E_3 \leftarrow E_3 - E_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y-2z=-2 \\ 2x-3y+z=4 \\ x-2y+z=3 \\ -x-y+z=1 \end{cases}$$

Exemplo 1, continuação

Operações sobre equações apenas afecta linhas das matrizes A e b, sistema $Ax = b$ é representado, para efeitos de resolução, pela matriz aumentada $[A|b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Exemplo 1, continuação

Operações sobre equações apenas afecta linhas das matrizes A e b, sistema $Ax = b$ é representado, para efeitos de resolução, pela matriz aumentada $[A|b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Estas operações são designadas por operações elementares por linhas

Sistemas Triangulares

- Os sistemas triangulares são facilmente resolvidos por substituição

Sistemas Triangulares

- Os sistemas triangulares são facilmente resolvidos por substituição

Sistemas Triangulares

- Os sistemas triangulares são facilmente resolvidos por substituição
- Se A é triangular superior os elementos abaixo da diagonal principal são nulos: $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e o sistema $Ax = b$ é resolvido por substituição regressiva

$$x_n = b_n / a_{nn}, \qquad x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j / a_{ii} \right), \qquad i = n-1, \dots, 1$$

Sistemas Triangulares

- Os sistemas triangulares são facilmente resolvidos por substituição
- Se A é triangular superior os elementos abaixo da diagonal principal são nulos: $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e o sistema $Ax = b$ é resolvido por substituição regressiva

$$x_n = b_n / a_{nn}, \qquad x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j / a_{ii} \right), \qquad i = n-1, \ldots, 1$$

- Se A é triangular inferior os elementos acima da diagonal principal são todos nulos: $a_{ij} = 0$ para $i < j$ e o sistema $Ax = b$ é resolvido por substituição progressiva

$$x_1 = b_1 / a_{11}, \qquad x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j / a_{ii} \right), \qquad i = 2, \ldots, n$$

Exemplo 2: Sistemas Triangulares

- Sistema triangular inferior

$$Ay = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} y_1 & & & & & & & = & 3 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & & & = & 7 \\ 4y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & & & = & 17 \\ 3y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 15 \end{array} \right.$$

Exemplo 2: Sistemas Triangulares

- Sistema triangular inferior

$$Ay = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & & & & = 3 \\ 2y_1 + y_2 & & & & = 7 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_3 & & & & = 17 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 & & & & = 15 \end{cases}$$

- Resolvendo por substiutição progressiva obtemos $y = [3\ 1\ 2\ 0]^T$

Exemplo 2: Sistemas Triangulares

- Sistema triangular inferior

$$Ay = b \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} y_1 & & & & & & & = & 3 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & & & = & 7 \\ 4y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & & & = & 17 \\ 3y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 15 \end{array}\right.$$

- Resolvendo por substiutição progressiva obtemos $y = [3\ 1\ 2\ 0]^T$
- Sistema triangular superior

$$Ax = b \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exemplo 2: Sistemas Triangulares

- Sistema triangular inferior

$$Ay = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 & & & & = & 3 \\ 2y_1 + y_2 & & & & = & 7 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_3 & & & & = & 17 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 & & & & = & 15 \end{cases}$$

- Resolvendo por substiutição progressiva obtemos $y = [3\ 1\ 2\ 0]^T$
- Sistema triangular superior

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 2x_3 + 2x_4 & = & 2 \\ 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

- Resolvendo por substituição progressiva obtemos $x = [1\ 0\ 1\ 0]^T$

Método de Gauss

1. Reduzir o sistema à forma triangular através de operações elementares por linhas

Método de Gauss

1. Reduzir o sistema à forma triangular através de operações elementares por linhas
2. Resolver o sistema triangular por substituição

Método de Gauss

1. Reduzir o sistema à forma triangular através de operações elementares por linhas
2. Resolver o sistema triangular por substituição

Este método é por vezes designado por método de eliminação de Gauss, pois consiste em eliminar as incógnitas das equações até se poder resolver o sistema por substituição

Exemplo 3: Método de Eliminação de Gauss

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - z = -1 \\ 3x - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

Exemplo 3: Método de Eliminação de Gauss

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - z = -1 \\ 3x - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Método de Eliminação de Gauss

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - z = -1 \\ 3x - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é igual a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 3: Método de Eliminação de Gauss

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - z = -1 \\ 3x - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada é igual a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \Leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 3, continuação

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L1 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 6 \\ 0 & -3 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3, continuação

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L1 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 6 \\ 0 & -3 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (3/5)L2}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1/5 & | & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3, continuação

$$\begin{array}{r} L_2 \leftarrow L_2 - 2L1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L1 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 6 \\ 0 & -3 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\Longleftrightarrow}{L_3 \leftarrow L_3 - (3/5)L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1/5 & | & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Terminada a primeira faze vamos proceder à substituição regressiva

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & 3z & = & 6 \\ & & & & 1/5z & = & 2/5 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemplo 3, continuação

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L1 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (3/5)L2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Terminada a primeira faze vamos proceder à substituição regressiva

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & 3z & = & 6 \\ & & & & 1/5z & = & 2/5 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & - & 5y & + & 3(2) & = & 6 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Exemplo 3, continuação

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & & & & y & = & 0 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exemplo 3, continuação

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & & & & y & = & 0 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 0 & - & 2 & = & -1 \\ & & & & y & = & 0 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exemplo 3, continuação

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ & & & & y & = & 0 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 0 & - & 2 & = & -1 \\ & & & & y & = & 0 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 0 \\ z & = & 2 \end{array} \right.$$

Método de Gauss-Jordan

1. Anular todos os coeficientes situados fora da diagonal principal

Método de Gauss-Jordan

1. Anular todos os coeficientes situados fora da diagonal principal
2. Assegurar que todos os coeficientes da diagonal principal são unitários.

Método de Gauss-Jordan

1. Anular todos os coeficientes situados fora da diagonal principal
2. Assegurar que todos os coeficientes da diagonal principal são unitários.

Este método consiste em manter apenas uma incógnita por equação, eliminado as restantes, de maneira a obter directamente a solução do sistema

Exemplo 4: Método de Gauss-Jordan

Sistema do exemplo 4

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - z = -1 \\ 3x - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

Exemplo 4: Método de Gauss-Jordan

Sistema do exemplo 4

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - z = -1 \\ 3x - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

é equivalente a outro que pode ser representado pela matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -5 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4: Método de Gauss-Jordan

Sistema do exemplo 4

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ x + y - z = -1 \\ 3x - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

é equivalente a outro que pode ser representado pela matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & -5 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L3 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4, continuação

$$\underset{L_2 \leftarrow (-1/5)L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4, continuação

$$\overset{L_2 \leftarrow (-1/5)L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4, continuação

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow (-1/5)L_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right] \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Cálculo da Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

- Se A uma matriz $n \times n$, procuramos uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

Cálculo da Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

- Se A uma matriz $n \times n$, procuramos uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

- Colunas de B denotadas por x_j, isto é $B = [x_1 x_2 \ldots x_n]$, com

$$x_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$

Cálculo da Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

- Se A uma matriz $n \times n$, procuramos uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

- Colunas de B denotadas por x_j, isto é $B = [x_1 x_2 \dots x_n]$, com

$$x_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$

- Denotamos colunas de I_n por e_j, tal que $I_n = [e_1 e_2 \dots e_n]$, com

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da Inversa pelo Método de Gauss-Jordan, continuação

- Temos que

$$AB = A\,[x_1\ \ x_2 \ldots x_n] = [Ax_1\ \ Ax_2 \ldots Ax_n]$$

Cálculo da Inversa pelo Método de Gauss-Jordan, continuação

- Temos que

$$AB = A\,[x_1 \;\; x_2 \ldots x_n] = [Ax_1 \;\; Ax_2 \ldots Ax_n]$$

- Por outro lado queremos determinar B tal que $AB = I_n$, isto é

$$[Ax_1 \;\; Ax_2 \ldots Ax_n] = [e_1 \;\; e_2 \ldots e_n]$$

Cálculo da Inversa pelo Método de Gauss-Jordan, continuação

- Temos que

$$AB = A\,[x_1 \; x_2 \ldots x_n] = [Ax_1 \; Ax_2 \ldots Ax_n]$$

- Por outro lado queremos determinar B tal que $AB = I_n$, isto é

$$[Ax_1 \; Ax_2 \ldots Ax_n] = [e_1 \; e_2 \ldots e_n]$$

- Que corresponde a resolver n sistemas lineares da forma

$$Ax_j = e_j, \quad (1 \leq j \leq n)$$

Cálculo da Inversa pelo Método de Gauss-Jordan, continuação

- Temos que

$$AB = A\,[x_1\ x_2 \ldots x_n] = [Ax_1\ Ax_2 \ldots Ax_n]$$

- Por outro lado queremos determinar B tal que $AB = I_n$, isto é

$$[Ax_1\ Ax_2 \ldots Ax_n] = [e_1\ e_2 \ldots e_n]$$

- Que corresponde a resolver n sistemas lineares da forma

$$Ax_j = e_j, \quad (1 \leq j \leq n)$$

- Como a matriz dos coeficientes A é a mesma, podem ser resolvidos em simultâneo pelo método de Gauss-Jordan aplicado à matriz aumentada

$$[A|e_1\,e_2 \ldots e_n] = [A|I_n]$$

Método para Cálculo da Inversa

Dada uma matriz A de dimensões $n \times n$:

Método para Cálculo da Inversa

Dada uma matriz A de dimensões $n \times n$:

1. Formar a matriz aumentada $[A|I_n]$, juntado a identidade I_n a A

Método para Cálculo da Inversa

Dada uma matriz A de dimensões $n \times n$:

1. Formar a matriz aumentada $[A|I_n]$, juntado a identidade I_n a A
2. Reduzir através de operações elementares por linhas a matriz A à matriz identidade; se nesta faze aparecer uma linha só com elementos nulos paramos pois significa que A não admite inversa

Método para Cálculo da Inversa

Dada uma matriz A de dimensões $n \times n$:

1. Formar a matriz aumentada $[A|I_n]$, juntado a identidade I_n a A
2. Reduzir através de operações elementares por linhas a matriz A à matriz identidade; se nesta faze aparecer uma linha só com elementos nulos paramos pois significa que A não admite inversa
3. Concluída a fase anterior obtemos $[C|D]$

Método para Cálculo da Inversa

Dada uma matriz A de dimensões $n \times n$:

1. Formar a matriz aumentada $[A|I_n]$, juntado a identidade I_n a A
2. Reduzir através de operações elementares por linhas a matriz A à matriz identidade; se nesta faze aparecer uma linha só com elementos nulos paramos pois significa que A não admite inversa
3. Concluída a fase anterior obtemos $[C|D]$
   3.1 Se $C = I_n$, então $D = A^{-1}$

Método para Cálculo da Inversa

Dada uma matriz A de dimensões $n \times n$:

1. Formar a matriz aumentada $[A|I_n]$, juntado a identidade I_n a A
2. Reduzir através de operações elementares por linhas a matriz A à matriz identidade; se nesta faze aparecer uma linha só com elementos nulos paramos pois significa que A não admite inversa
3. Concluída a fase anterior obtemos $[C|D]$
   3.1 Se $C = I_n$, então $D = A^{-1}$
   3.2 Se $C \neq I_n$, então C tem uma linha nula. Neste caso A não admite inversa, é singular

Exemplo 5: Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Exemplo 5: Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Começamos por construir a matriz aumentada $[A|I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 5: Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Começamos por construir a matriz aumentada $[A|I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 5: Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

$$\xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 5: Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

$$\xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo 5: Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

$$\xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftarrow -(1/2)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

Exemplo 5: Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -(1/2)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

Exemplo 5: Inversa pelo Método de Gauss-Jordan

$$\xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftarrow -(1/2)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Classificação dos Sistemas Quanto à Solução

- Sistema linear pode ter

Classificação dos Sistemas Quanto à Solução

- Sistema linear pode ter
  - Solução única

Classificação dos Sistemas Quanto à Solução

- Sistema linear pode ter
  - Solução única
  - Solução múltipla

Classificação dos Sistemas Quanto à Solução

- Sistema linear pode ter
  - Solução única
  - Solução múltipla
  - Não ter solução

Classificação dos Sistemas Quanto à Solução

- Sistema linear pode ter
  - Solução única
  - Solução múltipla
  - Não ter solução
- Exemplo: seja o sistema $\begin{cases} -x + 3z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -1 \\ 3y + 4z = 3 \end{cases}$ Verifique que os vectores $[-2\ 1\ 0]^T$ e $[7\ \ -3\ 3]^T$ são ambos solução deste sistema

Classificação dos Sistemas Quanto à Solução

- Sistema linear pode ter
  - Solução única
  - Solução múltipla
  - Não ter solução
- Exemplo: seja o sistema $\begin{cases} -x+3z=2 \\ 2x+3y-2z=-1 \\ 3y+4z=3 \end{cases}$ Verifique que os vectores $[-2\ 1\ 0]^T$ e $[7\ \ -3\ 3]^T$ são ambos solução deste sistema
- Como determinar o tipo de solução sem resolver?

Sistemas de Equações Lineares

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \ldots + x_n a_{in} = b$$

Sistemas de Equações Lineares

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \ldots + x_n a_{in} = b$$

- Vector b é gerado pela combinação linear dos vectores coluna de A

Sistemas de Equações Lineares

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \ldots + x_n a_{in} = b$$

- Vector b é gerado pela combinação linear dos vectores coluna de A
- Vector x contêm os coeficientes da combinação linear

Sistemas com 2 equações 2 incógnitas

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Sistemas com 2 equações 2 incógnitas

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

- Vectores a_{i1} e $a_{i2} \in \mathbb{R}^2$ geram qualquer vector $b \in \mathbb{R}^2$ se forem não colineares: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ solução única

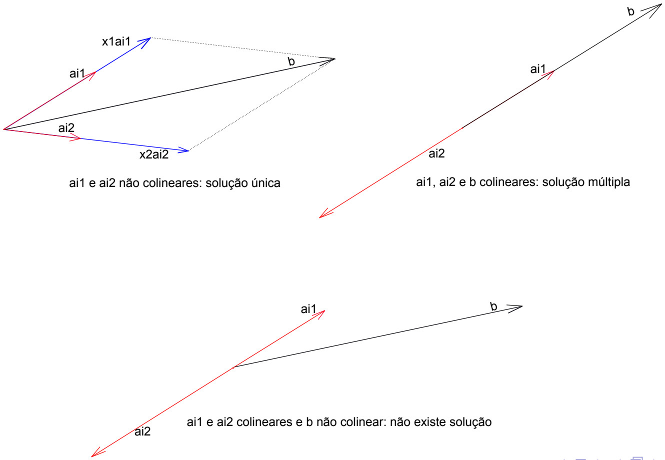
Sistemas com 2 equações 2 incógnitas

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

- Vectores a_{i1} e $a_{i2} \in \mathbb{R}^2$ geram qualquer vector $b \in \mathbb{R}^2$ se forem não colineares: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ solução única
- Se a_{i1} e a_{i2} forem colineares ($|A| = 0$) só geram b se este for também colinear $|A_j| = 0$ (para $j = 1$ ou 2) $\Rightarrow$ solução múltipla

Interpretação Geométrica de um Sistemas 2×2



Sistemas com 3 equações 3 incógnitas

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sistemas com 3 equações 3 incógnitas

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Vectores a_{i1}, a_{i2} e $a_{i3} \in \mathbb{R}^3$ geram qualquer vector $b \in \mathbb{R}^3$ se forem não coplanares: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ solução única

Sistemas com 3 equações 3 incógnitas

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Vectores a_{i1}, a_{i2} e $a_{i3} \in \mathbb{R}^3$ geram qualquer vector $b \in \mathbb{R}^3$ se forem não coplanares: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ solução única
- Se a_{i1} , a_{i2} e a_{i3} forem coplanares ($|A| = 0$) só geram b se este for também coplanar $|A_j| = 0$ (para $j = 1$ e 2) $\Rightarrow$ solução múltipla

Sistemas com n equações n incógnitas

Sistema $Ax = b$ com A de ordem $n \times n$

Sistemas com n equações n incógnitas

Sistema $Ax = b$ com A de ordem $n \times n$

1. Sistema consistente (sistema com solução)

Sistemas com n equações n incógnitas

Sistema $Ax = b$ com A de ordem $n \times n$

1. Sistema consistente (sistema com solução)
   1.1 Solução única $|A| \neq 0$

Sistemas com n equações n incógnitas

Sistema $Ax = b$ com A de ordem $n \times n$

1. Sistema consistente (sistema com solução)
   1.1 Solução única $|A| \neq 0$
   1.2 Solução múltipla $|A| = 0$ e $|A_j| = 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n-1$

Sistemas com n equações n incógnitas

Sistema $Ax = b$ com A de ordem $n \times n$

1. Sistema consistente (sistema com solução)
   1.1 Solução única $|A| \neq 0$
   1.2 Solução múltipla $|A| = 0$ e $|A_j| = 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n-1$

2. Sistema inconsistente $|A| = 0$ e existir um A_j tal que $|A_j| \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ (sistema sem solução)

Exemplo 6: classificação de sistemas lineares

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. Indique que tipo de solução (sem a calcular) admite este sistema
2. Calcule a solução do sistema

Exemplo 6: classificação de sistemas lineares

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. Indique que tipo de solução (sem a calcular) admite este sistema
2. Calcule a solução do sistema

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ solução múltipla ou sem solução}$$

Exemplo 6: classificação de sistemas lineares

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. Indique que tipo de solução (sem a calcular) admite este sistema
2. Calcule a solução do sistema

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ solução múltipla ou sem solução}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

solução múltipla

Exemplo 7, continuação

Aplicando o método de eliminação de Gauss

$$[A|b] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Exemplo 7, continuação

Aplicando o método de eliminação de Gauss

$$[A|b] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftrightarrow \begin{cases} -x + 3z = 2 \\ 3y + 4z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3z \\ y = \frac{3-4z}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemplo 7, continuação

Aplicando o método de eliminação de Gauss

$$[A|b] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftrightarrow \begin{cases} -x + 3z = 2 \\ 3y + 4z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3z \\ y = \frac{3-4z}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solução geral é $\begin{bmatrix} -2 + 3\alpha \\ \frac{3-4\alpha}{3} \\ \alpha \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$

Exemplo 7, continuação

Aplicando o método de eliminação de Gauss

$$[A|b] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftrightarrow \begin{cases} -x + 3z = 2 \\ 3y + 4z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3z \\ y = \frac{3-4z}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solução geral é $\begin{bmatrix} -2 + 3\alpha \\ \frac{3-4\alpha}{3} \\ \alpha \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$

Podemos obter soluções particulares atribuindo valores a α

Sistemas homogéneos

Sistemas em que o vector dos termos independentes é o vector nulo

$$Ax = 0$$

Têm sempre pelo menos uma solução:

Sistemas homogéneos

Sistemas em que o vector dos termos independentes é o vector nulo

$$Ax = 0$$

Têm sempre pelo menos uma solução:

- Se $|A| \neq 0$, $x = A^{-1}0 = 0$ (solução trivial $x = 0$ é única)

Sistemas homogéneos

Sistemas em que o vector dos termos independentes é o vector nulo

$$Ax = 0$$

Têm sempre pelo menos uma solução:

- Se $|A| \neq 0$, $x = A^{-1}0 = 0$ (solução trivial $x = 0$ é única)
- se $|A| = 0$ então como a coluna j de A_j é nula temos $|A_j| = 0$ (solução múltipla)

Sistemas homogéneos

Sistemas em que o vector dos termos independentes é o vector nulo

$$Ax = 0$$

Têm sempre pelo menos uma solução:

- Se $|A| \neq 0$, $x = A^{-1}0 = 0$ (solução trivial $x = 0$ é única)
- se $|A| = 0$ então como a coluna j de A_j é nula temos $|A_j| = 0$ (solução múltipla)

Exemplo: $Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$, como $|A| = 0$, verifique que admite outras soluções para além da trivial, $[0\ 0\ 0]^T$, como por exemplo $[9\ \ -4\ 3]^T$

Bibliografia

- Bernard Kolman, "Introdução à Álgebra Linear com Aplicações", Prentice-Hall do Brasil, 1998
- Ia. S. Bugrov e S. M. Nikolski, "Matemática para Engenharia, Vol. 1 - Elementos de Álgebra Linear e de Geometria Analítica", Editora Mir Moscovo, 1986