Mestrados em Engenharia Química e Industrial - 2009/2010
Matemática Aplicada

Exame Época de Recurso - 15/02/2010

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

Instruções:

- Parte teórica sem consulta bibliográfica, parte prática com consulta bibliográfica.
- Os cálculos deverão ser efectuados recorrendo ao software Octave, sendo os resultados apresentados com pelo menos 4 dígitos significativos.
- Sempre que usar uma função da NMLibforOctave indique a forma como ela é chamada e o valor atribuído a cada um dos *inputs*.
- Os computadores não podem estar ligados à *Internet*.

I - Parte teórica (Duração: 15 min, cotação: 4 valores).

1. Indique a razão pela qual é necessário conhecer o valor da função $\mathbf{y}$ em um instante t_0 para que a solução da EDO $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ seja única.
2. O que distingue um problema de valores fronteira de um problema de valor inicial para uma EDO?
3. O que entende por estabilidade de uma equação diferencial ordinária (EDO)?
4. O que entende por estabilidade de um método numérico?

II - Parte prática (duração: 1 h e 45 min, cotação: 16 valores)

1. Considere uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} 35 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 16 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 11 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

   (a) Sabendo que um dos valores próprios desta matriz está próximo de 22, aproxime-o através do método das potencias inversas com uma tolerância de 10^{-6}.

   (b) Sabendo que um dos vectores próprios é grosseiramente aproximado pelo vector $x_0 = [0.21\ 0.011\ 0.59\ \ -0.91]^T$, calcule o respectivo valor próprio através do método das iterações de Rayleigh com uma tolerância de 10^{-6}.

   (c) Calcule todos valores próprios e respectivos vectores próprios com uma tolerância de 10^{-6}.

2. Considere o problema de uma massa suspensa numa mola com amortecimento. A equação da distancia à origem é

$$y'' + \frac{c}{m}y' + ky = 0$$

   em que m é a massa, k é a constante de rigidez da mola e c a constante de amortecimento.

(a) Escreva este problema na forma de um sistema de EDOs de primeira ordem.

(b) Considerando $m = 1.5$, $c = 3$ e $k = 0,3$ indique se as soluções deste sistema serão estáveis ou instáveis.

(c) Considerando que o deslocamento original é de uma unidade ($y(0) = 1$) e que a velocidade original é de 4 unidades de comprimento por unidade de tempo ($y'(0) = 4$), aproxime a solução através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem com um passo $h = 0.2$, considerando $0 \leq t \leq 1$ (sugestão utilize a função `[]=ode45()` existente no Octave).

3. Consideramos a equação da onda

$$u_{tt} = 3u_{xx}, \quad -1/2 \leq x \leq 1/2, \quad t \geq 0$$

com condições iniciais

$$u(0, x) = \cos(x\pi), \quad u_t(0, x) = 0, \quad -1/2 \leq x \leq 1/2$$

e condições de fronteira

$$u(t, -1/2) = 0, \quad u(t, 1/2) = 0 \quad t \geq 0$$

(a) Deduza o esquema de discretização explícito para a resolução numérica através do método das diferenças finitas completo.

(b) Utilize o esquema explícito para aproximar $u(0.4, x)$, considerando $\Delta t = 0.2$ e $\Delta x = 0.25$.

(c) Deduza o esquema de discretização implícito para a resolução numérica através do método das diferenças finitas completo.

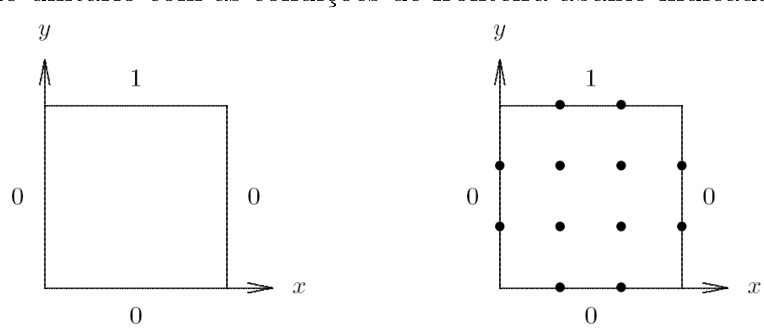
(d) Utilize o esquema implícito para aproximar $u(0.4, x)$, considerando $\Delta t = 0.2$ e $\Delta x = 0.25$.

(e) Suponde agora que $-1/2 \leq x \leq 1/2$, integre a equação de $t = 0$ a $t = 0.8$ pelo esquema implícito (utilize a função `[]=pde_wave_imp()`) e indique quais são os valores da função em $t = 0.8$, isto é, os valores de $u(0.8, x)$?

4. Considere a resolução por diferenças finitas do seguinte problema de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} - u = 2x$$

num quadrado unitário com as condições de fronteira abaixo indicadas.



(a) Obtenha o sistema de equações algébricas lineares correspondente à malha usada para discretizar o domínio (lado direito da figura).

(b) Calcule os valores aproximados da variável independente u nos pontos interiores do domínio.