

# Mestrados em Engenharia Química e Industrial - 2009/2010

## Matemática Aplicada

Exame Época Normal - 27/01/2010

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

Instruções:

- A primeira parte é sem consulta bibliográfica.
- A segunda parte é com consulta bibliográfica.
- Os cálculos deverão ser efectuados recorrendo ao software Octave.
- Sempre que usar uma função da NMLibforOctave indique a forma como ela é chamada e o valor atribuído a cada um dos *inputs*.
- Apresente os resultados dos cálculos com uma precisão de pelo menos 4 dígitos significativos.
- Os computadores não podem estar ligados à *Internet*.

### I - Parte teórica (Duração: 30 min, cotação: 5 valores).

1. O que entende por condicionamento de um problema de valores próprios?
2. O que entende por estabilidade de uma equação diferencial ordinária (EDO)?
3. O que entende por estabilidade de um método numérico?
4. Em que diferem os métodos de discretização total dos métodos semidiscretos no âmbito da resolução de equações às derivadas parciais?
5. Compare os métodos de Newton e do gradiente conjugado (vantagens, desvantagens,... ) no âmbito da optimização não-linear.

### II - Parte prática (duração: 1 h e 45 min, cotação: 15 valores)

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2.9766 & 0.3945 & 0.4198 & 1.1159 \\ 0.4198 & -0.3097 & 2.5675 & 0.6079 \\ 0.3945 & 2.7328 & -0.3097 & 0.1129 \\ 1.1159 & 0.1129 & 0.6079 & 1.7231 \end{bmatrix}$$

- (a) Qual é o método mais indicado para calcular o valor próprio de menor magnitude e o respectivo vector próprio? Calcule esse par próprio (apenas esse) com uma tolerância de  $10^{-5}$ , utilizando como aproximação inicial um vector gerado aleatoriamente. Quantas iterações são necessárias?
- (b) Qual é o método mais indicado para calcular o valor próprio de maior magnitude e o respectivo vector próprio? Calcule esse par próprio (apenas esse) com uma tolerância de  $10^{-5}$ , utilizando como aproximação inicial um vector de uns. Quantas iterações são necessárias?

- (c) Indique qual a estratégia mais adequada de calcular o valor próprio mais próximo de 2 e o respectivo vector próprio. Calcule esse par próprio (apenas esse) com uma tolerância de  $10^{-5}$ . Quantas iterações foram necessárias?
2. Considere a EDO escalar e não linear  $y' = -2ty^3$ , com valor inicial  $y(0) = 1$ . Supondo que queremos aproximar  $y(0.2)$  pelo método de Euler implícito utilizando um passo de tempo  $h = 0.2$ .
- Escreva a equação algébrica não-linear a partir da qual  $y_1$  será obtido.
  - Escreva o esquema iterativo de Newton-Raphson para a resolução da equação não-linear obtida na alínea anterior.
  - Obtenha uma aproximação inicial para o método de Newton-Raphson fazendo um passo pelo método de Euler Simples.
  - Calcule uma aproximação de  $y_1$  através de três iterações do método de Newton-Raphson.
  - Integre computacionalmente a equação pelo método de Euler implícito para  $0 \leq t \leq 1$  utilizando um passo de tempo  $h = 0.2$ .
3. Considere a resolução por diferenças finitas da seguinte Equação Diferencial Ordinária (EDO)

$$f_{xx} - \phi^2 f = 0,$$

com  $\phi = 0.1$  e condições de fronteira

$$f_x(0) = 0 \text{ e } f(1) = 1.$$

- Determine o número de pontos interiores da malha se a discretização for feita com  $h = 0.2$  e faça um esquema dessa malha.
  - Aproxime a condição de fronteira  $f_x(0) = 0$  pela formula das diferenças finitas em avanço e indique qual o valor de  $f_1$  comparativamente a  $f_2$ .
  - Aproxime por diferenças finitas a EDO em cada um dos pontos interiores da malha e escreva o sistema de equações algébricas lineares resultante.
  - Resolva o sistema anterior de maneira a obter os valores da função em cada um dos pontos interiores.
4. Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = -3(x^4 - y^2 - 2x^2y) - 4(1 - x)^2.$$

Aproxime computacionalmente o valor máximo desta função e o ponto  $(x, y)$  onde este ocorre através do método de Newton, usando como aproximação inicial um ponto arbitrado por si e uma tolerância de  $10^{-8}$ . Indique igualmente o número de iterações necessárias para convergir.