

Mestrados em Engenharia Química e Industrial - 1º semestre 2009/2010
Matemática Aplicada

Ficha prática nº 5 - Equações às Derivadas Parciais

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

1. Consideramos a equação do calor unidimensional

$$u_t = cu_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

com condições iniciais

$$u(0, x) = \sin(x\pi), \quad 0 \leq x \leq 1$$

e condições de fronteira

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0 \quad t \geq 0$$

- (a) Deduza o esquema explícito para a resolução numérica através da discretização total por diferenças finitas.
- (b) Se quisermos determinar a distribuição das temperaturas ao longo do tempo que valores poderão ser atribuídos a Δt se $\Delta x = 0.2$ e $c = 0.75$?
- (c) Integre a equação de $t = 0$ a $t = 1$ e apresente os resultados na forma de gráfico de uma superfície tridimensional ao longo do plano (t, x) , arbitrando o valor de Δt de acordo com a alínea anterior.
- (d) Deduza o esquema implícito para a resolução numérica através da discretização total por diferenças finitas.
- (e) Se quisermos determinar a distribuição das temperaturas ao longo do tempo que valores poderão ser atribuídos a Δt se $\Delta x = 0.2$ e $c = 0.75$?
- (f) Integre a equação de $t = 0$ a $t = 1$ e apresente os resultados na forma de gráfico de uma superfície tridimensional ao longo do plano (t, x) , arbitrando o valor de Δt de acordo com a alínea anterior.
- (g) Deduza o esquema de Crank-Nicolson para este problema e determine a distribuição das temperaturas em $t = 0.2$.
- (h) Represente graficamente a solução obtida na alínea anterior.

2. Consideramos a equação da onda

$$u_{tt} = 2u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

com condições iniciais

$$u(0, x) = 3 \sin(x\pi), \quad u_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

e condições de fronteira

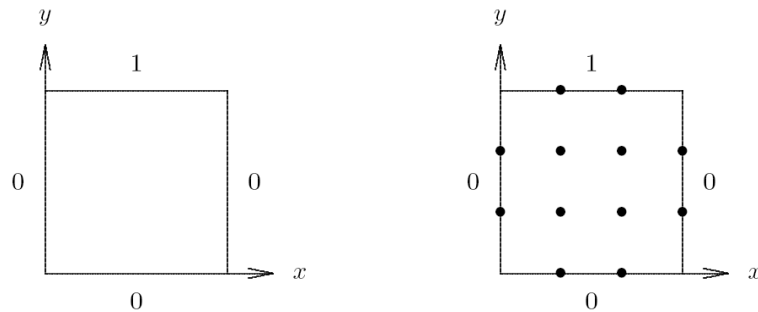
$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0 \quad t \geq 0$$

- Deduza o esquema de discretização explícito para a resolução numérica através do método das diferenças finitas completo.
- Utilize o esquema explícito para aproximar $u(0.4, x)$, considerando $\Delta t = 0.2$ e $\Delta x = 0.25$.
- Deduza o esquema de discretização implícito para a resolução numérica através do método das diferenças finitas completo.
- Utilize o esquema implícito para aproximar $u(0.4, x)$, considerando $\Delta t = 0.2$ e $\Delta x = 0.25$.
- Integre a equação de $t = 0$ a $t = 2$ pelo esquema implícito e apresente os resultados na forma de gráfico de uma superfície tridimensional ao longo do plano (t, x) (utilize a função `[] = pde_wave_imp()`).
- Quais são os valores da função em $t = 1.2$, i.e, os valores de $u(1.2, x)$? Represente graficamente a solução.

3. Considere a resolução por diferenças finitas da equação de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = x + y$$

num quadrado unitário com as condições de fronteira abaixo indicadas.



- Obtenha o sistema de equações algébricas lineares correspondente à malha usada para discretizar o domínio (lado direito da figura).
- Calcule os valores aproximados da variável independente u nos pontos interiores do domínio.