

Mestrados em Engenharia Química e Industrial - 1º semestre 2009/2010
Matemática Aplicada

Ficha prática nº 3 - Problemas de Valor Inicial para EDOs

Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

1. Considere a EDO $y' = -5y$ com a condição inicial $y(0) = 1$.
 - (a) Serão as soluções desta EDO estáveis?
 - (b) Para que valores do passo h é que o método de Euler é estável na resolução desta EDO?
 - (c) Aproxime o valor da solução em $t = 1$ pelo método de Euler (arbitre o valor de h de acordo com o resultado da alínea anterior).
 - (d) Para que valores do passo h é que o método de Euler implícito é estável na resolução desta EDO?
 - (e) Aproxime o valor da solução em $t = 1$ pelo método de Euler implícito (arbitre o valor de h de acordo com o resultado da alínea anterior).
 - (f) Sabendo que a solução exacta desta equação é dada por $y(t) = \exp(-5t)$, represente-a graficamente juntamente com as duas soluções numéricas anteriores.
2. O seguinte problema de valor inicial faz a modelação da cinética de uma reacção química. Supondo que a concentração de três componentes químicos é dada por $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y_3(t)$. Se a taxa de reacção $y_1 \rightarrow y_2$ é proporcional a y_1 , e a taxa de reacção $y_2 \rightarrow y_3$ é proporcional a y_2 , então as concentrações são governadas pelo sistema de EDOs linear e homogéneo, com coeficientes constantes

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 y_1 \\ c_1 y_1 - c_2 y_2 \\ c_2 y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & -c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

em que c_1 e c_2 são as taxas de reacção, consideradas constantes nos dois casos.

- (a) Se as taxas de reacção forem positivas, serão as soluções deste sistema estáveis?
- (b) Se as concentrações forem $c_1 = 1$ e $c_2 = 10$, para que valores de h é que o método de Euler será estável?
- (c) Mostre analiticamente que o método de Euler modificado é incondicionalmente estável quaisquer que sejam os valores de c_1 e c_2 .
- (d) Resolva numericamente este sistema supondo que $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1$. Considere $c_1 = 1$ e dois valores alternativos de c_2 : $c_2 = 10$ e $c_2 = 1000$. Para cada um dos valores de c_2 resolva o sistema usando os métodos seguintes
 - i. Euler implícito.
 - ii. Runge-Kutta de 4ª ordem.
 - iii. Predictor-corrector de 4ª ordem.

Em cada um dos casos apresente graficamente os resultados de forma a visualizar a evolução das concentrações desde do tempo inicial $t_0 = 0$ até atingirem um estado estacionário. Repita o exercício para vários passos de tempo h escolhidos por si.

- (e) Comente os resultados obtidos.
3. Considere o problema de uma massa suspensa numa mola com amortecimento. A equação da distancia à origem é

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

em que m é a massa, k é a constante de rigidez da mola e c a constante de amortecimento.

- (a) Escreva este problema na forma de um sistema de EDOs de primeira ordem.
- (b) Considerando $m = 1$, $c = 2$ e $k = 0,75$, indique o tipo de estabilidade deste sistema.
- (c) Será o método Euler estável se $h = 0.2$?
- (d) Considerando que o deslocamento original é nulo ($y(0) = 0$) e que a velocidade original é de 5 unidades de comprimento por unidade de tempo ($y'(0) = 5$) aproxime numericamente a solução para os casos de $m = 10$ e de $m = 0.1$ através dos métodos seguintes
 - i. Euler implícito.
 - ii. Runge-Kutta de 4ª ordem.
 - iii. Preditor-corrector de 4ª ordem.

Em cada um dos casos apresente graficamente os resultados de forma a visualizar a evolução da posição e velocidade da massa desde do tempo inicial $t_0 = 0$ até atingirem um estado estacionário. Repita o exercício para vários passos de tempo h escolhidos por si.

- (e) Comente os resultados obtidos.
4. O modelo Kermack-McKendrick utilizado para simular uma epidemia em determinada população consiste no seguinte sistema de EDOs

$$\begin{aligned}y_1' &= -cy_1y_2 \\y_2' &= cy_1y_2 - dy_2 \\y_3' &= dy_2\end{aligned}$$

em que y_1 representa o número de indivíduos susceptíveis de serem contaminados, y_2 o número de infectados e y_3 os indivíduos removidos da infecção por recuperação e consequente imunidade, isolamento ou morte. Os parâmetros c e d representam, respectivamente, as taxas de infecção e de remoção.

- (a) Utilize o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) para resolver numericamente este sistema com os seguintes valores dos parâmetros $c = 1$ e $d = 5$, e valores iniciais $y_1(0) = 95$, $y_2(0) = 5$ e $y_3(0) = 0$. Integre de $t = 0$ até $t = 1$ e represente no mesmo gráfico todas as soluções em função de t .
- (b) Experimente com outros valores para os parâmetros e para as condições iniciais. Será possível encontrar valores para os quais a epidemia não cresce, ou para os quais toda a população é dizimada?
- (c) Varie o passo de tempo h de forma a mostrar que o método RK4 não é incondicionalmente estável.