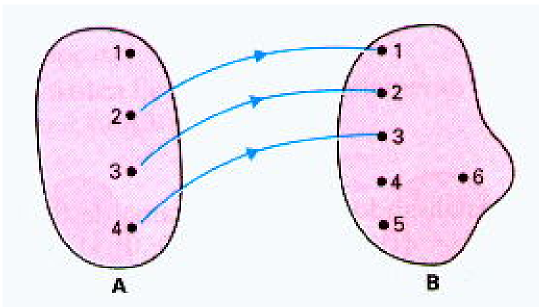
FUNÇÕES

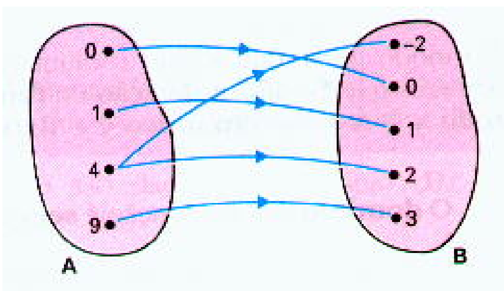
O conceito de função é um dos mais importantes em toda a matemática. O conceito básico de função é o seguinte: toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder **a todo** elemento do primeiro conjunto **um único** elemento do segundo, ocorre uma função.

O uso de funções pode ser encontrado em diversos assuntos. Por exemplo, na tabela de preços de uma loja, a cada produto corresponde um determinado preço. Outro exemplo seria o preço a ser pago numa conta de luz, que depende da quantidade de energia consumida.

Observe, por exemplo, o diagrama das relações abaixo:

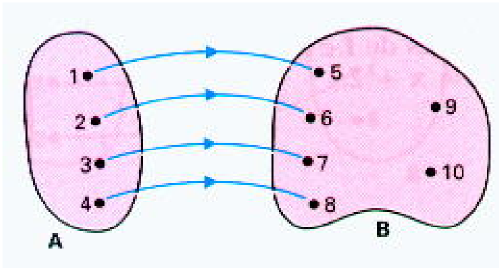


A relação acima não é uma função, pois existe o elemento **1** no conjunto **A**, que não está associado a nenhum elemento do conjunto **B**.



A relação acima também não é uma função, pois existe o elemento **4** no conjunto **A**, que está associado a mais de um elemento do conjunto **B**.

Agora preste atenção no próximo exemplo:



A relação acima é uma função, pois todo elemento do conjunto **A**, está associado a **somente um** elemento do conjunto **B**.

De um modo geral, dados dois conjuntos **A** e **B**, e uma relação entre eles, dizemos que essa relação é uma **função de A em B** se e somente se, **para todo x** $\in$**A** existe **um único y** $\in$**B** de modo que x se relacione com y.

DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO:

O **domínio** de uma função é **sempre** o próprio conjunto de partida, ou seja, D=A. Se um elemento **x** $\in$**A** estiver associado a um elemento **y** $\in$**B**, dizemos que **y** é a **imagem** de **x** (indica-se y=f(x) e lê-se "**y** é igual a **f** de **x**").

Exemplo: se **f** é uma função de IN em IN (isto significa que o domínio e o contradomínio são os números naturais) definida por **y=x+2**. Então temos que:

- A imagem de 1 através de **f** é 3, ou seja, f(1)=1+2=3;
- A imagem de 2 através de **f** é 4, ou seja, f(2)=2+2=4;

De modo geral, a imagem de **x** através de **f** é x+2, ou seja: f(x)=x+2.

Numa função **f** de **A** em **B**, os elementos de **B** que são imagens dos elementos de **A** através da aplicação de **f** formam o **conjunto imagem** de **f**.

Com base nos diagramas acima, concluímos que existem **2** condições para uma relação **f** seja uma função:

1ª) O domínio deve sempre coincidir com o conjunto de partida, ou seja, **todo elemento de A** é ponto de partida de flecha. Se tivermos um elemento de **A** do qual não parta flecha, a relação não é função.

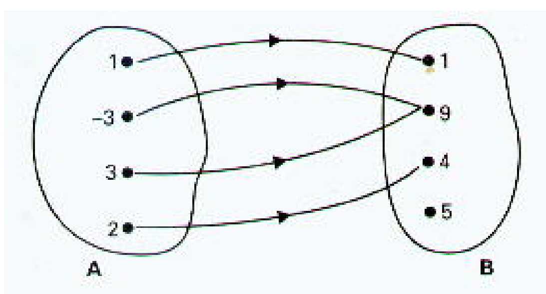
2ª) De cada elemento de **A** deve partir **uma única** flecha. Se de um elemento de **A** partir mais de uma flecha, a relação não é função.

Observações:

- Como **x** e **y** têm seus valores variando nos conjuntos **A** e **B**, recebem o nome de **variáveis**.
- A variável **x** é chamada **variável independente** e a variável **y**, **variável dependente**, pois para obter o valor de **y** dependemos de um valor de **x**.
- Uma função **f** fica definida quando são dados seu domínio (conjunto **A**), seu contradomínio (conjunto **B**) e a lei de associação y=f(x).

<u>EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:</u>

1) Considere a função f: A → B representada pelo diagrama a seguir:



Determine:

a) o domínio (**D**) de **f**;
b) f(1), f(-3), f(3) e f(2);
c) o conjunto imagem (**Im**) de **f**;
d) a lei de associção

Resolução:

a) O domínio é igual ao conjunto de partida, ou seja, D=A.
b) f(1)=1, f(-3)=9, f(3)=9 e f(2)=4.

c) O conjunto imagem é formado por todas imagens dos elementos do domínio, portanto: Im = {1,4,9}.

d) Como $1^2=1$, $(-3)^2=9$, $3^2=9$ e $2^2=4$, temos **$y=x^2$**.

2) Dada a função f: IR→IR (ou seja, o domínio e a contradomínio são os números reais) definida por $f(x)=x^2-5x+6$, calcule:

a) f(2), f(3) e f(0);

b) o valor de **x** cuja imagem vale 2.

Resolução:

a) $f(2)= 2^2-5(2)+6 = 4-10+6 = 0$
$f(3)= 3^2-5(3)+6 = 9-15+6 = 0$
$f(0)= 0^2-5(0)+6 = 0-0+6 = 6$

b) Calcular o valor de x cuja imagem vale 2 equivale a resolver a equação f(x)=2, ou seja, $x^2-5x+6=2$. Utilizando a fórmula de Bhaskara encontramos as raízes 1 e 4. Portanto os valores de **x** que têm imagem 2 são 1 e 4.

OBTENÇÃO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO:

- O **domínio** é o subconjunto de IR no qual todas as operações indicadas em y=f(x) são possíveis.
  Vamos ver alguns exemplos:

1) $f(x)=\sqrt{2x-4}$

Como $\sqrt{2x-4}$ só é possível em IR se $2x-4 \geq 0$, ou seja, $x \geq 2$, então,

$D=\{x \in IR / x \geq 2\}$

2) $f(x)=\dfrac{5}{x+1}$

Como $x+1$ é denominador, ele não poderá ser nulo (pois não existe divisão por zero).

Portanto $x+1 \neq 0$, ou seja, $x \neq -1$. Então:

$D=\{x \in IR / x \neq -1\}$

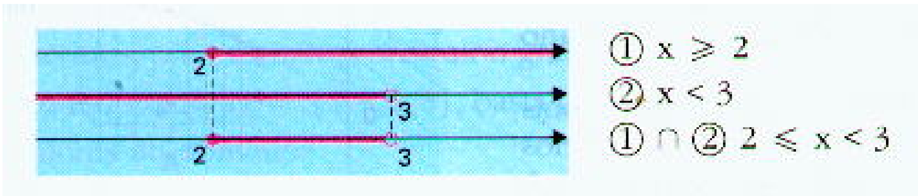
3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$

Vamos analisar primeiro o numerador: como x - 2 está dentro da raiz, então devemos ter

$x-2 \geq 0$, ou seja, $x \geq 2$ (condição 1)

Agora o denominador: como 3-x está dentro da raiz devemos ter $3-x \geq 0$, mas além disso ele também está no denominador, portanto devemos ter $3-x \neq 0$. Juntando as duas condições devemos ter: $3-x > 0$, ou seja, $x < 3$ (condição 2).

Resolvendo o sistema formado pelas condições 1 e 2 temos:



Devemos considerar o intervalo que satisfaz as duas condições ao mesmo tempo.
Portanto, $D=\{x \in IR \mid 2 \leq x < 3\}$.

CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO CARTESIANO DE UMA FUNÇÃO

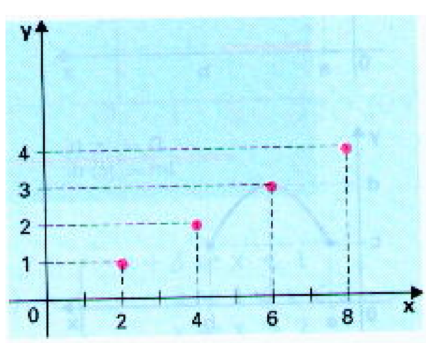
Para construir o gráfico de uma função **f**, basta atribuir valores do domínio à variável **x** e, usando a sentença matemática que define a função, calcular os correspondentes valores da variável **y**. Por exemplo, vamos construir o gráfico da função definida por y=x/2. Escolhemos alguns valores para o domínio. Por exemplo D={2,4,6,8}, e agora calculamos os respectivos valores de **y**. Assim temos:

x=2 ➔ y=2/2 = 1
x=4 ➔ y=4/2 = 2
x=6 ➔ y=6/2 = 3
x=8 ➔ y=8/2 = 4

Então montamos a seguinte tabela:

x	**y**
2	1
4	2
6	3
8	4

Identificamos os pontos encontrados no plano cartesiano:

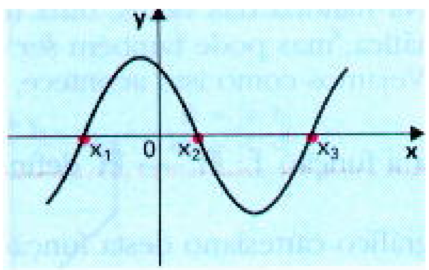


O gráfico da função será uma reta que passará pelos quatro pontos encontrados. Basta traçar a reta, e o gráfico estará construído.

Obs: para desenhar o gráfico de uma reta são necessários apenas dois pontos. No exemplo acima escolhemos 4 pontos, mas bastaria escolher dois elementos do domínio, encontrar suas imagens, e logo após traçar a reta que passa por esses 2 pontos.

RAÍZES DE UMA FUNÇÃO

Dada uma função y=f(x), os valores, os valores de **x** para os quais f(x)=0 são chamados **raízes** de uma função. No gráfico cartesiano da função, as raízes são abscissas dos pontos onde o gráfico corta o eixo horizontal. Observe o gráfico abaixo:



No gráfico acima temos: $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$ e $f(x_3)=0$.
Portanto x_1, x_2 e x_3 são raízes da função.

PROPRIEDADES DE UMA FUNÇÃO

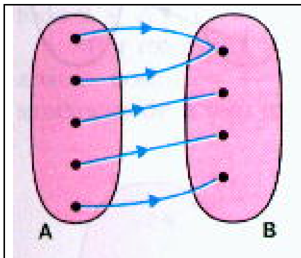
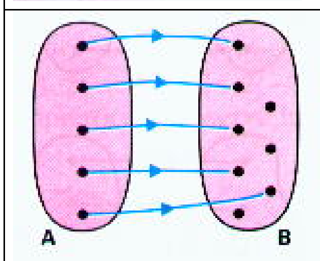
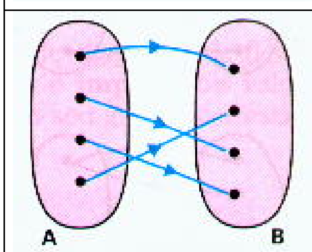
Essas são algumas propriedades que caracterizam uma função **f:A→B**:

a) **Função sobrejetora**: Dizemos que uma função é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem for igual ao contradomínio, isto é, se Im=B. Em outras palavras, não pode sobrar elementos no conjunto B sem receber flechas.

b) **Função Injetora:** A função é injetora se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem. Portanto não pode haver nenhum elemento no conjunto B que receba duas flechas. Por exemplo, a função f:IR→IR definida por $f(x)=3x$ é injetora pois se $x_1 \neq x_2$ então $3x_1 \neq 3x_2$, portanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.

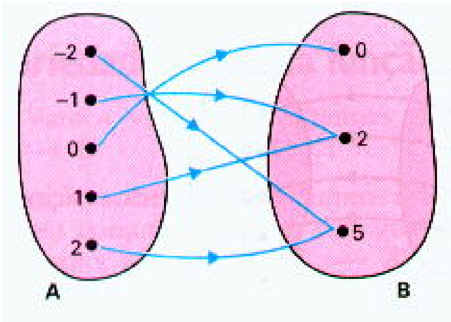
c) **Função Bijetora:** Uma função é bijetora quando ela é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo. Por exemplo, a função f: IR→IR definida por $y=3x$ é injetora, como vimos no exemplo anterior. Ela também é sobrejetora, pois Im=B=IR. Logo, esta função é bijetora.
Já a função f: IN→IN definida por $y=x+5$ **não** é sobrejetora, pois Im={5,6,7,8,...} e o contradomínio CD=IN, mas é injetora, já que valores diferentes de **x** têm imagens distintas. Então essa função **não** é bijetora.

Observe os diagramas abaixo:

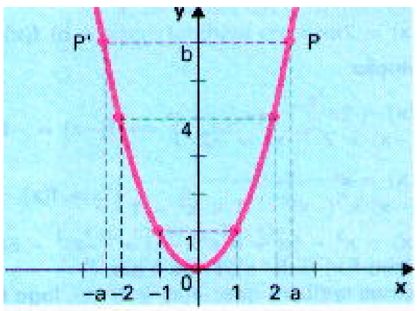
	• Essa função é sobrejetora, pois não sobra elemento em **B** • Essa função não é injetora, pois existem dois elementos com mesma imagem • Essa função não é bijetora, pois não é injetora
	• Essa função é injetora, pois elementos de **B** são “flechados” só uma vez. • Essa função não é sobrejetora, pois existem elementos sobrando em **B** • Essa função não é bijetora, pois não é sobrejetora
	• Essa função é injetora, pois elementos de **B** são “flechados” só uma vez. • Essa função é sobrejetora, pois não existem elementos sobrando em **B** • A função é bijetora, pois é injetora e sobrejetora

FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Dada uma função f: A→B, dizemos que **f** é **par** se, e somente se, $f(x)=f(-x)$ para todo $x \in A$. Ou seja: os valores simétricos devem possuir a mesma imagem. O diagrama a seguir mostra um exemplo de função par:

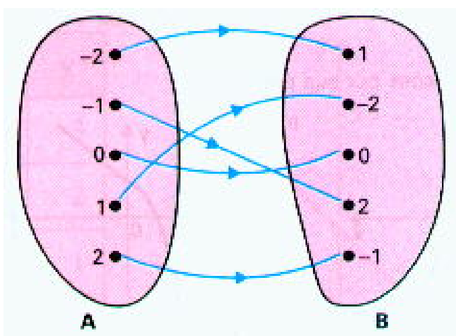


Por exemplo, a função f: IR→ IR definida por $f(x)=x^2$ é uma função par, pois $f(x)=x^2=(-x)^2=f(-x)$. Podemos notar a paridade dessa função observando o seu gráfico:

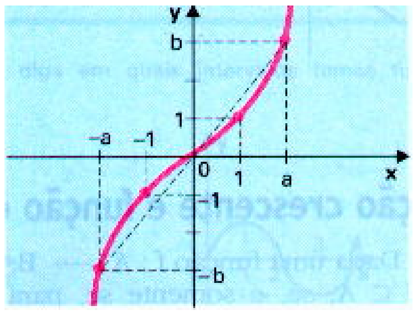


Notamos, no gráfico, que existe uma **simetria em relação ao eixo vertical**. Elementos simétricos têm a mesma imagem. Os elementos 2 e –2, por exemplo, são simétricos e possuem a imagem 4.

Por outro lado, dada uma função f: A→B, dizemos que **f** é **ímpar** se, e somente se, $f(-x)=-f(x)$ para todo $x \in A$. Ou seja: valores simétricos possuem imagens simétricas. O diagrama a seguir mostra um exemplo de função ímpar:



Por exemplo, a função f: IR→ IR definida por $f(x)=x^3$ é uma função ímpar, pois $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. Podemos notar que a função é ímpar observando o seu gráfico:



Notamos, no gráfico, que existe uma **simetria em relação a origem 0**. Elementos simétricos têm imagens simétricas. Os elementos 1 e –1, por exemplo, são simétricos e possuem imagens 1 e –1 (que também são simétricas).

Obs: Uma função que não é par nem ímpar é chamada *função sem paridade*.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

1) Classifique as funções abaixo em pares, ímpares ou sem paridade:

a) f(x)=2x
$f(-x)= 2(-x) = -2x$ → $f(-x) = -f(x)$, portanto **f é ímpar**.

b) $f(x)=x^2-1$
$f(-x)= (-x)^2-1 = x^2-1$ → $f(x)=f(-x)$, portanto **f é par**.

c) $f(x)=x^2-5x+6$
$f(-x)= (-x)^2-5(-x)+6 = x^2+5x+6$
Como $f(x) \neq f(-x)$, então **f não é par**.
Temos também que $-f(x) \neq f(-x)$, logo **f não é ímpar**.
Por não ser par nem ímpar, concluímos que **f é função sem paridade**.

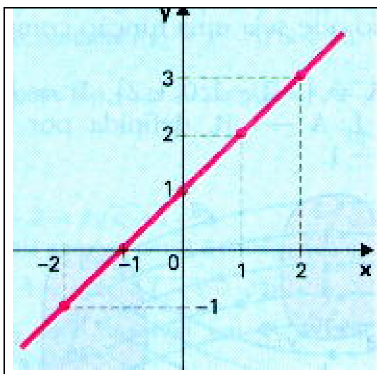
FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

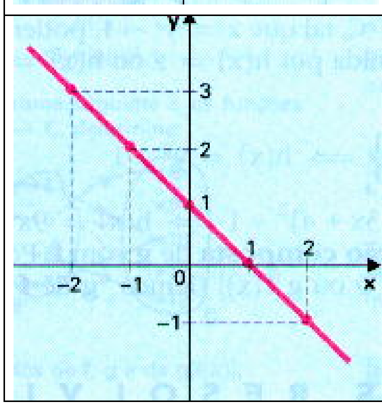
Dada uma função f: A→B, dizemos que **f** é **crescente** em algum conjunto A' $\subset$ A, se, e somente se, para quaisquer $x_1 \in$ A' e $x_2 \in$ A', com $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1)<f(x_2)$.

Por exemplo, a função f:IR→IR definida por f(x)=x+1 é crescente em IR, pois $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Ou seja: quando os valores do domínio crescem, suas imagens também crescem.

Por outro lado, dada uma função f: A→B, dizemos que **f** é **decrescente** em algum conjunto A' $\subset$ A, se, e somente se, para quaisquer $x_1 \in$ A' e $x_2 \in$ A', com $x_1<x_2$, tivermos $f(x_1)>f(x_2)$.

Por exemplo, a função f:IR→IR definida por f(x)= -x+1 é decrescente em IR, pois $x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow -x_1+1>-x_2+1 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Ou seja: quando os valores do domínio crescem, suas correspondentes imagens decrescem.

<table>
<tr>
<td>


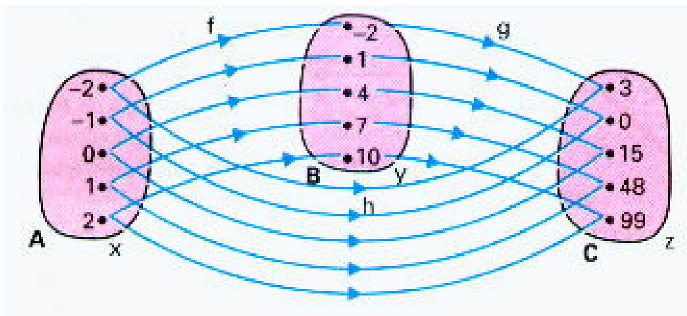
</td>
<td>Esse é um exemplo de função crescente. Podemos notar no gráfico que à medida que os valores de x vão aumentando, suas imagens também vão aumentando.</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>Esse é um exemplo de função decrescente. Podemos notar no gráfico que à medida que os valores de x vão aumentando, suas imagens vão diminuindo.</td>
</tr>
</table>

FUNÇÃO COMPOSTA

Vamos analisar um exemplo para entender o que é uma função composta.

Consideremos os conjuntos A={-2,-1,0,1,2}, B={-2,1,4,7,10} e C={3,0,15,48,99}, e as funções f:A→B definida por f(x)=3x+4, e g:B→C definida por $g(y)=y^2-1$.



Como nos mostra o diagrama acima, para todo x ∈ A temos um único y ∈ B tal que y=3x+4, e para todo y ∈ B existe um único z ∈ C tal que $z=y^2-1$, então concluímos que existe uma função **h** de **A** em **C**, definida por h(x)=z ou $h(x)=9x^2+24x+15$, pois:

$h(x)=z$ ➔ $h(x)= y^2-1$

E sendo y=3x+4, então $h(x)=(3x+4)^2-1$ ➔ $h(x)= 9x^2+24x+15$.

A função h(x) é chamada **função composta** de **g** com **f**. Podemos indicá-la por **g o f** (lemos "**g** composta com **f**") ou g[f(x)] (lemos "**g** de **f** de **x**"). Vamos ver alguns exercícios para entender melhor a idéia de função composta.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) Dadas as funções $f(x)=x^2-1$ e g(x)=2x, calcule f[g(x)] e g[f(x)].
   Resolução:
   $f[g(x)] = f(2x) = (2x)^2-1 = 4x^2-1$
   $g[f(x)] = g(x^2-1) = 2(x^2-1) = 2x^2-2$

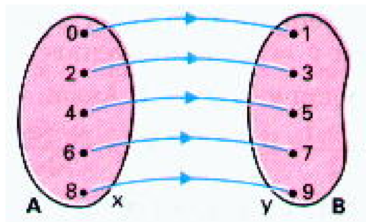
2) Dadas as funções f(x)=5x e f[g(x)]=3x+2, calcule g(x).
   Resolução:
   Como f(x)=5x, então f[g(x)]= 5.g(x).
   Porém, f[g(x)]=3x+2; logo 5.g(x)=3x+2, e daí g(x)=(3x+2)/5

3) Dadas as funções $f(x)=x^2+1$ e $g(x)=3x-4$, determine $f[g(3)]$.

Resolução: $g(3)=3.3-4=5 \rightarrow f[g(3)]= f(5)= 5^2+1 = 25+1= 26$.

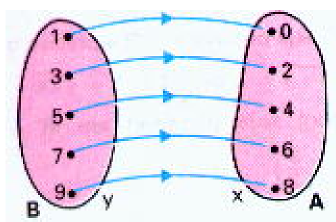
FUNÇÃO INVERSA

Consideremos os conjuntos A={0,2,4,6,8} e B={1,3,5,7,9} e a função $f:A\rightarrow B$ definida por $y=x+1$. A função **f** está representada no diagrama abaixo:



A função **f** é uma função **bijetora**. A cada elemento **x** de A está associado um único elemento **y** de B, de modo que $y=x+1$.

Porém, como **f** é bijetora, a cada elemento **y** de B está associado um único elemento **x** de A, de modo que $x=y-1$; portanto temos uma outra função $g:B\rightarrow A$, de modo que $x=y-1$ ou $g(y)=y-1$. Essa função está representada no diagrama abaixo:



Pelo que acabamos de ver, a função **f** leva **x** até **y** enquanto a função **g** leva **y** até **x**. A função $g:B\rightarrow A$ recebe o nome de **função inversa de f** e é indicada por $\mathbf{f^{-1}}$.

O domínio de **f** é o conjunto imagem de **g**, e o conjunto imagem de **f** é o domínio de **g**. Quando queremos, a partir da sentença $y=f(x)$, obter a sentença de $f^{-1}(x)$, devemos dar os seguintes passos:

1º) Isolamos **x** na sentença $y=f(x)$

2º) Pelo fato de ser usual a letra **x** como símbolo da variável independente, trocamos **x** por **y** e **y** por **x**.

Por exemplo, para obter a função inversa de $f:IR\rightarrow IR$ definida por $y=2x+1$, devemos:

1º) isolar **x** em y=2x+1. Assim y=2x+1 ➔ y-1=2x ➔ x=(y-1)/2

2º) trocar **x** por **y** e **y** por **x**: y=(x-1)/2.

Portanto a função inversa de **f** é: **f^{-1}(x)=(x-1)/2**.

Observação: Para que uma função **f** admita a inversa **f^{-1}** é necessário que ela seja bijetora. Se **f** não for bijetora, ela não possuirá inversa.

1) Dada a função $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}, (x \neq -2)$, calcule $f^{-1}(-1)$.

Resolução:

Sabemos que $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ e devemos isolar x nessa igualdade

Então: $y = \dfrac{x-1}{x+2} \Rightarrow y(x+2) = x-1 \Rightarrow y.x + 2y = x - 1 \Rightarrow y.x - x = -1 - 2y \Rightarrow$

$\Rightarrow x(y-1) = -(1+2y) \Rightarrow x = \dfrac{-(1+2y)}{y-1} \Rightarrow x = \dfrac{1+2y}{1-y}$

Trocando x por y e y por x, obtemos: $y = \dfrac{1+2x}{1-x}$, ou seja $f^{-1}(x) = \dfrac{1+2x}{1-x}$.

O valor de $f^{-1}(-1)$ é $f^{-1}(-1) = \dfrac{1+2(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{1-2}{1+1} = \dfrac{-1}{2}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Esse documento foi criado por Juliano Zambom Niederauer.
Os gráficos e diagramas utilizados no documento foram retirados do livro:
Matemática – Volume Único. FACCHINI. Ed.Saraiva.