Capítulo 4 - Interpolação Polinomial

Carlos Balsa

balsa@ipb.pt

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança

2º Ano - Eng. Civil e Electrotécnica

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Sumário

Interpolação

- Problema tipo de interpolação: para os pontos dados

$$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots, (t_m, y_m) \quad \text{com} \quad t_1 < t_2 < \ldots < t_m$$

  queremos determinar a função polinomial $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p_n(t_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

- p_n é designado por polinómio interpolador
- Interpolação pode também ser feita com funções não-polinomiais, contudo iremos apenas considerar as polinomiais
- Substituindo a função tabelada (discreta) pelo polinómio interpolador permite estimar a função entre pontos assim com aproximar a derivada e o integral

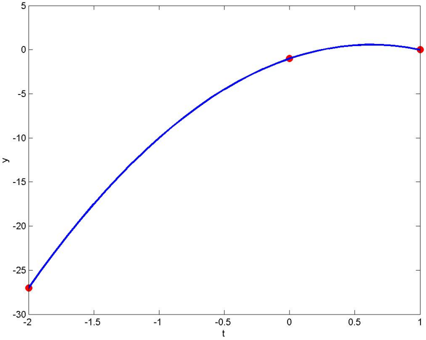
Exemplo 1

- Polinómio interpolador associado à seguinte função tabelada

t	-2	0	1
y	-27	-1	0

é

$$p_2(t) = -1 + 5t - 4t^2$$



Funções Base

- Polinómios interpoladores gerados através da combinação linear de outras funções polinomiais pertencentes a bases de funções $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$
- Polinómio interpolador p_n é escolhido como combinação linear de uma base de funções

$$p_n(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j(t)$$

- Impondo que p_n interpole os dados (t_i, y_i) significa que

$$p_n(t_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j(t_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

correspondendo a um sistema linear $Ax = b$, em que x é um vector com n componentes x_j e as entradas da matriz A, de dimensão $m \times n$, são dadas por $a_{ij} = \phi_j(t_i)$

Funções Base, continuação

- Problema pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1) & \cdots & \phi_n(t_1) \\ \phi_1(t_2) & \phi_2(t_2) & \cdots & \phi_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(t_m) & \phi_2(t_m) & \cdots & \phi_n(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

- Fazendo $a_{ij} = \phi_j(t_i)$ e $b_i = y_i$ podemos escrever

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b$$

Existência, Unicidade e Condicionamento

- Existência e unicidade do polinómios interpoladores depende do numero de dados m e do número de funções da base n
- Se $m > n$, polinómio interpolador normalmente não existe
- Se $m < n$, polinómio interpolador não é único
- Se $m = n$, como a matriz A é não-singular desde que os pontos dados t_i sejam distintos o polinómio interpolador existe e é único
- Sensibilidade de x a perturbações nos dados depende de $cond(A)$ que por sua vez depende da escolha da base de funções

Polinómio Interpolador

- Existem muitas técnicas de representar ou calcular um polinómio interpolador, mas em teoria todas devem conduzir ao mesmo resultado

$\Rightarrow$ Geralmente, dados n pontos (t_i, y_i), existe um e um só polinómio de grau $n-1$ que passa pelos n pontos

Método da Base Monómica

- Base monómica

$$\phi_j(t) = t^{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n$$

origina polinómio interpolador da forma

$$p_{n-1}(t) = x_1 + x_2 t + \ldots + x_n t^{n-1}$$

com coeficientes x_i dados pela resolução do sistema linear

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y$$

Exemplo 2: Método da Base Monómica

- Determine o polinómio que interpola os seguintes pontos: $(-2,-27)$, $(0,-1)$ e $(1,0)$
- Usando a base monómica, o sistema linear é

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

- Para estes dados particulares o sistema linear é

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $x = [-1\ 5\ \ -4]^T$, pelo que o polinómio interpolador é

$$p_2(t) = -1 + 5t - 4t^2$$

Método de Lagrange

- Dado um conjunto de pontos (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, as funções da base de Lagrange são definidas por

$$\ell_j(t) = \prod_{k=1, k\neq j}^{n} (t - t_k) \Big/ \prod_{k=1, k\neq j}^{n} (t_j - t_k), \quad j = 1, \ldots, n$$

- Para a base de Lagrange

$$\ell_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

  pelo qua a matriz dos coeficientes do sistema linear $Ax = b$ é a matriz identidade.

- Polinómio de Lagrange que interpola os dados (t_i, y_i) é dado por

$$p_{n-1}(t) = y_1\ell_1(t) + y_2\ell_2(t) + \ldots + y_n\ell_n(t)$$

Exemplo 3: Método de Lagrange

- Determine, pelo método de Lagrange, o polinómio que interpola os seguintes pontos: $(-2, -27)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$
- Polinómio interpolador de Lagrange, de grau dois, que interpola os três pontos (t_1, y_1), (t_2, y_2) e (t_3, y_3) é

$$p_2(t) = y_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + y_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + y_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

- Para estes dados particulares obtemos

$$p_2(t) = -27 \frac{(t)(t-1)}{(-2)(-2-1)} + (-1) \frac{(t+2)(t-1)}{(2)(-1)} + 0 \frac{(t+2)(t)}{(1+2)(1)}$$

Método de Newton

- Dado um conjunto de pontos (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, as funções da base de Newton são definidas por

$$\pi_j(t) = \prod_{k=1}^{j-1} (t - t_k)\,, \quad j = 1, \ldots, n$$

  em que o valor do produtório é 1 se os limites da multiplicação forem nulos

- Polinómio interpolador de Newton tem a forma

$$p_{n-1} = x_1 + x_2(t-t_1) + x_3(t-t_1)(t-t_2) + \ldots + x_n(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_{n-1})$$

- Para $i < j$, $\pi_j(t_i) = 0$, pelo que a matriz A é triangular inferior, com $a_{ij} = \pi_j(t_i)$

Exemplo: Método de Newton

- Determine, pelo método de Newton, o polinómio que interpola os seguintes pontos: $(-2, -27)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$
- Usando a base de Newton o sistema linear é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

- Para estes dados particulares o sistema linear é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução, obtida por substituição progressiva, é $x = [-27\ 13\ \ -4]^T$, pelo que o polinómio interpolador é

$$p_2(t) = -27 + 13(t + 2) - 4(t + 2)t$$

Considerações Finais

→ *Métodos Disponíveis na NMLibforOctave:*

- Base monomial: `P = itpol_monom(X,Y,x)`
- Lagrange: `P = lagrange(X,Y,x)`
- Newton: `P = itpol_newt(X,Y,x)`

→ *BIBLIOGRAFIA: Exposição baseada essencialmente no capítulo 7 de*

- Michael T. Heath. "Scientific Computing an Introductory Survey". McGraw-Hill, 2002, New York.