

Licenciaturas em Engenharia Civil e Electrotécnica
Métodos Numéricos - 2009/2010
Exame Época Normal - 29 de Junho 2010
Docente: Carlos Balsa - Departamento de Matemática - ESTiG

Instruções:

- A parte teórica é sem consulta bibliográfica.
- A parte prática é com consulta bibliográfica.
- Os cálculos deverão ser efectuados recorrendo apenas ao software Octave.
- Apresente os resultados dos cálculos com uma precisão de pelo menos 5 dígitos significativos.
- Os computadores não poderão ser ligados à *Internet*.

I - Parte teórica (Duração: 20 min, cotação: 4 valores).

1. Indique um majorante para o erro relativo associado a um número x correctamente arredondado a t algarismos (ou dígitos) significativos.
2. Qual o significado do condicionamento de um problema.
3. Que tipo de solução pode ter um sistema de equações lineares? Analise cada uma das situações possíveis.
4. Como resolveria um sistema sobredeterminado, isto é, um sistema com mais equações do que incógnitas?

II - Parte prática (duração: 2h00, cotação: 16 valores)

1. Considere o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 2.44 & 3.96 & 6.33 \\ 2.44 & 0.40 & 2.04 \\ 1.52 & 2.49 & 0.97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 10.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Permute a ordem das equações de forma a reforçar a dominância por linhas da diagonal.
- (b) Escreva o esquema iterativo de Gauss-Seidel para a resolução do sistema anterior.
- (c) Aproxime a solução deste sistema efectuando três iterações do método de Gauss-Seidel.
- (d) Calcule o resíduo relativo em cada uma das iterações efectuadas.
- (e) Resolva computacionalmente este sistema através do método de Gauss-Seidel (use a função `gauss_seidel` da NLibforOctave), considerando o seguinte critério de paragem

$$\frac{\|b - Ax^{(k)}\|_2}{\|b\|_2} \leq 10^{-6}.$$

Indique a aproximação inicial à solução, o número de iterações e a solução obtida correctamente arredondada.

2. Considere a equação $e^{-x} = x$.

- (a) Localize graficamente a solução desta equação (copie para o papel o gráfico obtido no Octave, indicando aonde se encontra a solução).
- (b) Indique o esquema iterativo de Newton-Raphson que deve ser utilizado para a aproximação da solução desta equação.
- (c) Efectue três iterações pelo método de Newton-Raphson para aproximar a solução da equação (apresente todos os cálculos efectuados). Calcule uma estimativa do erro associado e arredonde correctamente a solução obtida em cada iteração.
- (d) Aplique o método de Newton-Raphson para aproximar a raiz com um erro inferior a 0.5×10^{-9} (utilize a função `nle_newtraph` da NMLibforOctave). Indique a aproximação inicial à solução, o número de iterações e a solução obtida correctamente arredondada.

3. Considere a função $y = f(x)$ conhecida apenas através dos seguintes valores:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	1.000	1.221	1.491	1.822	2.225

- (a) Determina a recta de regressão linear que melhor ajusta estes dados no sentido nos mínimos quadrados (indique todos os cálculos efectuados).
- (b) Estime os valores da função tabela em $x = 0.17$ e $x = 0.23$.

4. Considere o problema de valor inicial $y' = -2t - y$ para $t \geq 0$ com $y(0) = -1$,

- (a) Aproxime o valor de $y(0.2)$ através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem (apresente todos os cálculos efectuados para obter a solução).
- (b) Aproxime o valor de $y(t)$ para valores de t compreendidos entre 0 e 1, utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com um passo de tempo $h = 0.2$ (utilize a função `ode45` do Octave).