Soluções da ficha prática do Capítulo 4

4.1.1.

a) $\int_1^2 \left(\int_{-1}^2 \left(15xy+10y^2\right) dy\right) dx = \frac{255}{4}$

b) $\int_0^4 \left(\int_{-2}^{-1} \left(6xy^3+x\right) dx\right) dy = -582$

c) $\int_0^1 \left(\int_1^e \left(\frac{y}{x}\right) dx\right) dy = \frac{1}{2}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\cos y - y\cos x\right) dy\right) dx = -\frac{7}{144}\pi^2$

e) $\int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} \left(4-x-2y\right) dy\right) dx = \frac{7}{3}$

f) $\int_1^2 \left(\int_{x^3}^{x} \left(e^{\frac{y}{x}}\right) dy\right) dx = 2e - \frac{1}{2}e^4$

4.1.2.

a) $A = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} (1)\, dy\right) dx = \int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 (1)\, dx\right) dy = \frac{16}{3}$

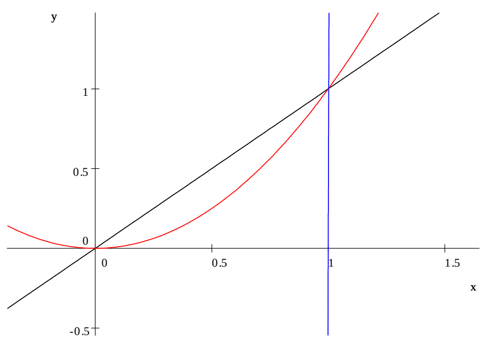
b) $A = \int_0^2 \left(\int_0^{y^{1/3}} (1)\, dx\right) dy = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left(\int_{x^3}^2 (1)\, dy\right) dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

c) $A = \int_0^2 \left(\int_0^{x^3} (1)\, dy\right) dx = \int_0^8 \left(\int_{y^{1/3}}^2 (1)\, dx\right) dy = 4$

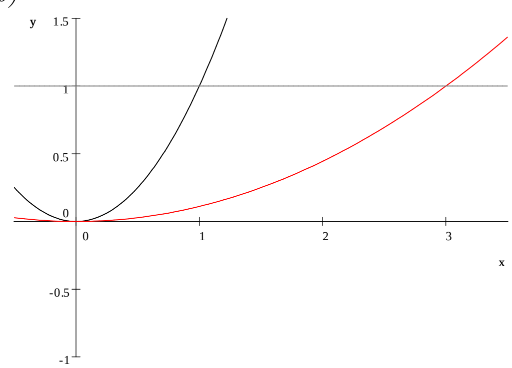
d) $A = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (1)\, dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^{1/3}} (1)\, dx\right) dy = \frac{5}{12}$

4.1.3.

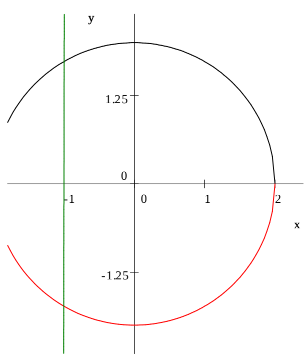
a)



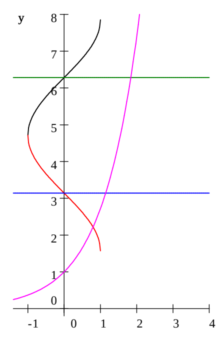
b)



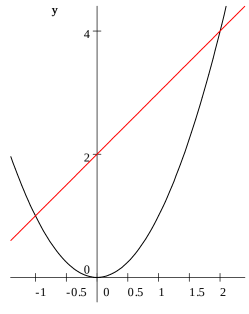
c)



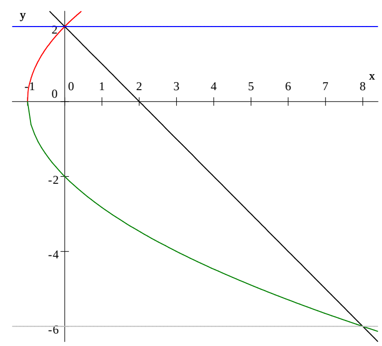
d)



e) $\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dydx$



f)



4.1.4.

a) $\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{2}\left(\int_{-1}^{1}(y+2x)\,dy\right)dx = 6$

b) $\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{x^2}(xy)\,dy\right)dx = \frac{16}{3}$

c) $\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_{-2}^{2}\left(\int_{1}^{2x+5}(xy^2)\,dy\right)dx = \frac{1504}{5}$

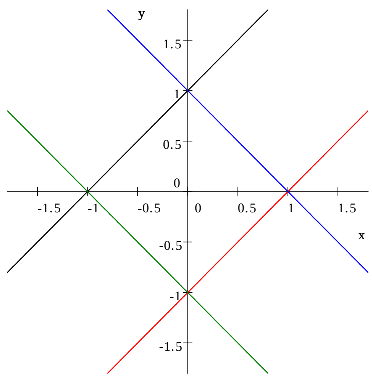
d) $\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_{0}^{\pi/2}\left(\int_{0}^{\sin x}(x^2+y^2)\,dy\right)dx = \pi - \frac{16}{9}$

e) $\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_{0}^{4}\left(\int_{-y}^{y/2}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)dx\right)dy \overset{(*)}{=} 8\left(e^{1/2}-e^{-1}\right)$

$(*)$ integral impróprio, pois $e^{x/y}$ não está definida no ponto $(0,0)$ que faz parte do domínio de integração;

$\int_0^4\left(\int_{-y}^{y/2}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)dx\right)dy = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{4}\left(\int_{-y}^{y/2}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)dx\right)dy = \left(e^{1/2}-e^{-1}\right)\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{4^2-\varepsilon^2}{2}\right) = 8\left(e^{1/2}-e^{-1}\right)$

4.1.5 $\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x-1}^{x+1}\left(e^{x+y}\right)dy\right)dx + \int_{0}^{1}\left(\int_{x-1}^{-x+1}\left(e^{x+y}\right)dy\right)dx = e - e^{-1}$



4.1.6

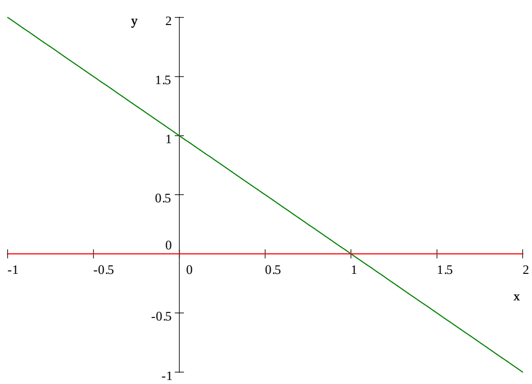
a) $\iint\limits_R \delta(x,y)dA = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{e^{-x}}\left(y^2\right)dy\right)dx = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3}$

b) $\iint\limits_R \delta(x,y)dA = \int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{1/y^2}\left(x^2+y^2\right)dx\right)dy = \frac{511}{480}$

4.1.7

a) $V = \iint\limits_R f(x,y)dA = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1-x}\left(2x^2+y^2+1\right)dy\right)dx = \frac{3}{4}$

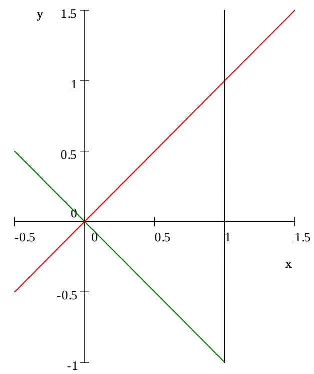
Projecção, do sólido resultante, no plano $z=0$ (xoy) - região de integração:
$y = 1-x$; $(x=0;\ y=0)$ - eixos coordenados.



b) $V = \iint\limits_R f(x,y)dA = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} \left(x^2 - y^2\right) dy \right) dx = \frac{1}{3}$

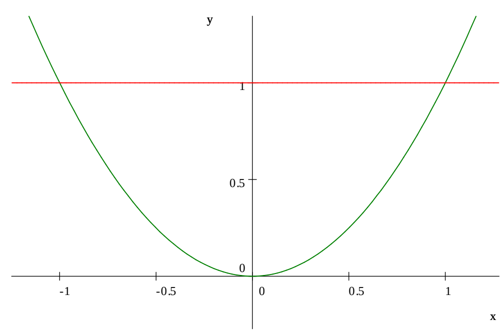
Projecção, do sólido resultante, no plano $z = 0$ (xoy) - região de integração:

$\begin{cases} z = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x \vee y = x$ e $x = 1$. *(A condição $y = 0$ é desnecessária e causa ambiguidade)*



c) $V = \iint\limits_R f(x,y)dA = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{1} \left(x^2 + y^2\right) dy \right) dx = \frac{88}{105}$

Projecção do sólido resultante no plano $z = 0$ (xoy) - região de integração:
$y = x^2$ e $y = 1$



4.2.1 Pelo Teorema do Valor Médio: *Seja $f : R \to R$ uma função contínua e R uma região elementar (i.e., do tipo 1, 2 ou 3); então para algum ponto $(x_0, y_0) \in R$, tem-se:*

$$V = \iint\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = f(x_0,y_0).Area(R).$$

O valor médio de f em $\mathcal{R}$ é dado por: $\dfrac{\iint\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)dA}{Area(\mathcal{R})}$, onde $Area(\mathcal{R}) = \iint\limits_{\mathcal{R}} 1dA$.

a) Valor médio de $f(x,y) = x^2 - y^2$ é $\frac{\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(2x^2+y^2+1\right)dy\right)dx}{\int_0^1 \left(\int_0^{1-x}(1)dy\right)dx} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$.

b) Valor médio de $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 1$ é $\frac{\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} \left(x^2-y^2\right)dy\right)dx}{\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x}(1)dy\right)dx} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$.

c) Valor médio de $f(x,y) = x^2 + y^2$ é $\frac{\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{1} \left(x^2+y^2\right)dy\right)dx}{\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{1}(1)dy\right)dx} = \frac{\frac{88}{105}}{\frac{4}{3}} = \frac{22}{35}$.

4.2.2 Supondo que $a, r \in \mathbb{R}^+$, $f(x,y) = x^2+y^2$ definida S e o valor médio de f é dado por: $\dfrac{\displaystyle\int_{-a-r}^{a+r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{r^2-(x-a)^2}} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right) dy \right) dx}{\displaystyle\int_{-a-r}^{a+r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{r^2-(x-a)^2}} (1) dy \right) dx}$

4.2.3 Como $\mathcal{D}$ é uma região é uma região fechada e limitada, então em $\mathcal{D}$, f tem máximo - M e tem mínimo - m, e portanto,

$$m \leq f(x,y) \leq M \,, \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathcal{D}. \tag{1}$$

Como pelo teorema do valor médio sabemos que existe $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ tal que o valor médio de f em D é $f(x_0, y_0) = \dfrac{\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dA}{Area(\mathcal{D})}$. Então de (1) temos

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad m \leq f(x_0, y_0) \leq M &\text{(2a)}\\
&\Longleftrightarrow \quad m \leq \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dA}{Area(\mathcal{D})} \leq M\\
&\Longleftrightarrow \quad m * Area(\mathcal{D}) \leq \iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dA \leq M * Area(\mathcal{D}).
\end{aligned}$$

a) $\mathcal{D}$ é o triângulo $\Delta[(0,0);(1,1);(1,0)]$ cuja área é $A(\mathcal{D}) = \frac{base.altura}{2} = \frac{1}{2}$, e $f(x,y) = \frac{1}{y-x+3}$ onde $M = f(1,0) = \frac{1}{2}$ (que é onde o denominador é mínimo: onde y toma menor e x o valor maior) e $m = f(0,1) = \frac{1}{4}$. Portanto de (2a) temos

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} \leq \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{y-x+3} dA \leq \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

b) $\mathcal{D}$ é o círculo de raio 2 centrado na origem $(x^2+y^2 \leq 2^2)$ cuja área é $A(\mathcal{D}) = \pi.raio^2 = 4\pi$, e $f(x,y) = x^2+y^2+1$ onde $M = 2^2+1 = 5$ (que é onde x^2+y^2 toma o seu maior valor, que no círculo de raio 4 isso ocorre no bordo, ou seja na circunferência $x^2+y^2 = 4$) e $m = f(0,0) = 0+1 = 1$. Portanto de (2a) temos

$$1 * 4\pi \leq \iint_{\mathcal{D}} \left(x^2+y^2+1\right) dA \leq 5 * 4\pi.$$

c) $\mathcal{D}$ é o quadrado $[0,1] \times [0,1]$ cuja área é $A(\mathcal{D}) = base * altura = 1$, e $f(x,y) = \frac{\sin x}{1+(xy)^4}$. Em $\mathcal{D}$ temos o seguinte enquadramento para a função f : $m = \frac{1-\cos 1}{2} \leq \frac{1-\cos x}{2} \leq \frac{1-\cos^2 x}{2} \leq \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{2} \leq \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1+(xy)^4} \leq \frac{\sin x}{1+(xy)^4} \leq \frac{1}{1+(xy)^4} \leq 1 = M$. Portanto de (2a) temos

$$\frac{1-\cos 1}{1} \leq \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sin x}{1+(xy)^4} dA \leq 1.$$

d) $\mathcal{D}$ é o quadrado $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ cuja área é $A(\mathcal{D}) = 4\pi^2$, e $f(x,y) = \frac{e^{\sin(x+y)}}{4\pi^2}$ onde $M = \frac{e^1}{4\pi^2} = \frac{e}{4\pi^2}$ (que ocorre onde $\sin(x+y)$ toma o seu maior valor, ou seja, 1) e $m = \frac{e^{-1}}{4\pi^2} = \frac{1}{e4\pi^2}$. Portanto de (2a) temos

$$\frac{1}{e4\pi^2}.4\pi^2 \leq \iint_{\mathcal{D}} \frac{e^{\sin(x+y)}}{4\pi^2} \leq \frac{e}{4\pi^2}.4\pi^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathcal{D}} e^{\sin(x+y)} dA \leq e.$$

4.3.1

a) $\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2}\, dydx = \int_0^2 \left(\int_0^{y/2} \left(e^{y^2}\right) dx\right) dy = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}$

b) $\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin\left(x^3\right) dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^{x^2} \left(\sin\left(x^3\right)\right) dy\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 27$

c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} x^2y^4 dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \left(x^2y^4\right) dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{(2-x)^2} \left(x^2y^4\right) dy\right) dx = \frac{79}{2145}$

d) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3) dydx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \left(x^3 \sin(y^3)\right) dx\right) dy = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}\cos 1$

e) $\int_0^2 \int_x^2 y^4 \cos\left(xy^2\right) dydx = \int_0^2 \left(\int_0^y \left(y^4 \cos\left(xy^2\right)\right) dx\right) dy = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 8$

f) $\int_1^e \int_0^{\ln x} ydydx = \int_0^1 \left(\int_{e^y}^e (y)\, dx\right) dy = \frac{1}{2}e - 1$