Capítulo 5

Integrais Sobre Caminhos e Superfícies. Teoremas de Integração do Cálculo Vectorial.

5.1 Integral de Um Caminho. Integral de Linha.

Exercício 5.1.1
Seja $f(x,y,z) = y$ e $\mathbf{c}(t) = t\,\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$. Mostre que $\int_{\mathbf{c}} f\,\mathrm{d}s = 0$

Exercício 5.1.2
Determine os integrais das funções seguintes ao longo dos caminhos indicados.

a. $f(x,y,z) = x + y + z \quad \mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, t),\ t \in [0, 2\pi]$.

b. $f(x,y,z) = \cos z \quad \mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, t),\ t \in [0, 2\pi]$.

c. $f(x,y,z) = e^{\sqrt{z}} \quad \mathbf{c}(t) = (1, 2, t^2),\ t \in [0, 1]$.

d. $f(x,y,z) = (x + y)/(y + z) \quad \mathbf{c}(t) = (t, \frac{2}{3}t\sqrt{t}, t),\ t \in [1, 2]$.

Exercício 5.1.3
Seja $f(x,y) = 2x - y$ e considere-se o caminho $\mathbf{c}(t) = t^4\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j},\ -1 \le t \le 1$.

a. Calcule $\int_{\mathbf{c}} f\ \mathrm{d}s$ e interprete geometricamente.

b. Reparametrize o caminho por comprimento de arco e responda, de novo, à alínea anterior.

Exercício 5.1.4

a. Mostre que o integral de $f(x,y)$ ao longo do caminho dado, em coordenadas polares, por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta),\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2$, é

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\ \mathrm{d}\theta$$

b. Calcule o comprimento do caminho dado por $\mathbf{r}(\theta) = 1 + \cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

Exercício 5.1.5

Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine o integral de $\mathbf{F}$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos.

a. $\mathbf{c}(t) = (t,t,t),\ 0 \le t \le 1$.

b. $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ 0 \le t \le 2\pi$.

c. $\mathbf{c}(t) = (\sin t, 0, \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

d. $\mathbf{c}(t) = (t^2, 3t, 2t^3),\ -1 \le t \le 2$.

Exercício 5.1.6

Considere o campo de forças $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado pelo campo no movimento de uma partícula ao longo da parábla $y = x^2$, de $x = -1$ a $x = 2$.

Exercício 5.1.7

Para os campos $\mathbf{F}$ e caminhos $\mathbf{c}$ seguintes calcule $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

a. $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x),\ \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

b. $\mathbf{F}(x,y) = (x, y),\ \mathbf{c}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)),\ 0 \le t \le 2$.

c. $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy),\ \mathbf{c}:$ caminho que une, por segmentos de recta, o ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(0,1,0)$ e este a $(0,0,1)$.

d. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, -xy, 1),\ \mathbf{c}:$ parábola $z = x^2$ no plano $y = 0$ que une o ponto $(-1,0,1)$ ao ponto $(1,0,1)$.

e. $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k},\ \mathbf{c}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$.

Exercício 5.1.8

A *hipociclóide* é uma curva que que é a imagem do caminho $\mathbf{c}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),\ t \in [0, 2\pi]$. Calcule $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para $\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$.

Exercício 5.1.9

Seja $\mathbf{c}(t)$ um caminho e $\mathbf{T}(t)$ um vector unitário tangente a $\mathbf{c}(t)$ em cada instante t. Qual o significado de $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s}$?

5.2 Superfícies Parametrizadas. Área de uma Superfície.

Exercício 5.2.1

Considere a superfície S parametrizada por $x = u^2,\ y = v^2,\ z = u^2 + v^2$. Determine a equação do plano tangente a S no ponto $(u,v) = (1,1)$.

Exercício 5.2.2

Parametrize as seguintes superfícies e determine planos tangentes nos pontos, P, indicados.

a. $S:\ z = 3x^2 + 8xy, \quad P = (1,0,3)$.

b. $S:\ x^3 + 3xy + z^2 = 2,\ z \ge 0, \quad P = (1, 1/3, 0)$.

Exercício 5.2.3

Considere a superfície S, em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por

$$\mathbf{\Phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta), \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 4\pi.$$

a. Descreva a superfície.

b. Determine um vector unitário normal à superfície.

c. Determine uma equação do plano tangente a S no ponto (x_0, y_0, z_0).

d. Considere um ponto $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Verifique que o segmento de recta de comprimento unitário que tem origem no ponto $(0, 0, z_0)$ e que passa em P está contido na superfície e no plano tangente a S em P.

Exercício 5.2.4

Considere a esfera de raio 2 centrada na origem. Determine a equação do plano tangente à esfera no ponto $P = (1, 1, \sqrt{2})$ considerando-a como:

a. uma superfície parametrizada por: $\mathbf{\Phi}(\theta,\phi) = (2\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\cos\phi, 2\cos\phi)$;

b. uma superfície de nível de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;

c. o gráfico de $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Exercício 5.2.5

Considere-se o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

a. Parametrize a superfície.

b. Determine uma expressão para um vector normal unitário em cada ponto do hiperbolóide.

c. Determine a equação do plano tangente à superfície nos pontos $(x_0, y_0, 0)$ para os quais se verifica $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

d. Mostre que as rectas $r_1(t) = (x_0 - y_0 t, y_0 + x_0 t, 5t)$ e $r_2(t) = (x_0 + y_0 t, y_0 - x_0 t, 5t)$ estão contidas na superfície e no plano tangente calculado na alínea anterior.

Exercício 5.2.6

Determine a área da esfera unitária representada parametricamente por

$$\mathbf{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{\Phi}(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

onde $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

Exercício 5.2.7

Determine a área da helicóide, imagem de $\mathbf{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, considerando $D = [0, 1] \times [0, 3\pi]$.

Exercício 5.2.8

Determine a área da porção da esfera unitária cortada pelo cone $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercício 5.2.9
Parametrize a superfície $S : x^2 - y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ x > 0$. Exprima a área da superfície através de um integral.

Exercício 5.2.10
Determine a área das superfícies seguintes.

a. $S:\ x + y + z = 1,\ x^2 + 2y^2 \leq 1$.

b. $S:\ x = r\cos\theta,\ y = 2r\sin\theta,\ z = \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exercício 5.2.11
O cilindro de equação $x^2 + y^2 = x$ divide a esfera unitária em duas regiões de superfícies S_1, exterior ao cilindro, e S_2, interior ao cilindro. Determine o rácio das áreas $A(S_1)/A(S_2)$.

Exercício 5.2.12
Exprima através de um integral duplo, sem o calcular, a área dos gráficos das funções seguintes nas regiões indicadas.

a. $f(x,y) = (x + 2y)^2, \quad D = [-1,2] \times [0,2]$.

b. $f(x,y) = xy + x/(y+1), \quad D = [1,4] \times [1,2]$.

c. $f(x,y) = xy^3 e^{x^2y^2}, \quad D:$ círculo unitário centrado na origem.

d. $f(x,y) = y^3\cos^2 x, \quad D:$ triângulo de vértices $(-1,1),\ (0,2)$ e $(1,1)$.

5.3 Integrais de Campos Escalares e Vectoriais Sobre Superfícies.

Exercício 5.3.1
Calcule os integrais de superfície $\iint_S f\, \mathrm{d}S$, para:

a. $f(x,y,z) = z,\ S:\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0,\ (a > 0)$.

b. $f(x,y,z) = z,\ S:\ z = x^2 + y^2$, com $x^2 + y^2 \leq 1$.

c. $f(x,y,z) = z,\ S:\ z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$.

d. $f(x,y,z) = x,\ S:\ z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq a$.

e. $f(x,y,z) = x,\ S:$ parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ contida no cone da alínea anterior.

Exercício 5.3.2
Calcule os integrais de superfície dos campos vectoriais seguintes nas superfícies indicadas.

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right),\ S:$ parabolóide de equação $x^2 + y^2 + z = 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

b. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\ \mathbf{i} - x\ \mathbf{j} + \ \mathbf{k}$, S : superfície parametrizada por $\mathbf{\Phi}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

c. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\ \mathbf{i} + y^2\ \mathbf{j} + z^2\ \mathbf{k}$, S : superfície parametrizada por $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u + v, u - v, u)$, $0 \le u \le 2$, $1 \le v \le 3$.

d. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\ \mathbf{i} + y^2\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$, S : triângulo definido pelo plano $x + y + z = 1$ e pelos planos coordenados.

e. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$, S : porção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $z = -1/\sqrt{2}$ e $z = 1/\sqrt{2}$.

Exercício 5.3.3
Calcule o fluxo da campo $\mathbf{V}(x, y, z) = 3xy^2\ \mathbf{i} + 3xy^2\ \mathbf{j} + z^3\ \mathbf{k}$ que atravessa a esfera centrada na origem e de raio 1.

Exercício 5.3.4
Considere o campo eléctrico $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\ \mathbf{i} + 2y\ \mathbf{j} + 2z\ \mathbf{k}$. Determine o fluxo do campo através da superfície do hemisfério superior $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$, incluindo a base.

Exercício 5.3.5
Considere o campo de forças de um fluido $\mathbf{F}(x, y, z) = \ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$ (medido em ms^{-1}). Determine quantos metros cúbicos de fluido atravessam, por segundo, a superfície do hemisfério superior: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$, não incluindo a base.

5.4 O Teorema de Green.

Nos exercícios desta secção, salvo menção em contrário, deve usar o Teorema de Green para responder às questões propostas.

Exercício 5.4.1
Calcule:

a. A área do círculo de raio $r > 0$.

b. $\int_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$, sendo C a fronteira do quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

c. A área da região limitada por um arco da *ciclóide* C : $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $(a > 0)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, e o eixo Ox.

d. $\int_{C^+} \left(y^2 + x^3\right)\,\mathrm{d}x + x^4\,\mathrm{d}y$, sendo C^+ o perímetro do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ orientado no sentido directo.

e. A área de uma das "pétalas" da *rosa de 4 pétalas*: $r = 3\sin 2\theta$. (Sug. $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$)

f. $\int_{\partial D} \left(2x^3 - y^3\right)\,\mathrm{d}x + \left(x^3 + y^3\right)\,\mathrm{d}y$, sendo D o círculo unitário.

g. O mesmo integral da alínea anterior mas com $D:\ a \leq x^2 + y^2 \leq b,\ 0 < a < b,$ considerando a circunferência exterior orientada no sentido directo e a circunferência interior orientada no sentido inverso.

Exercício 5.4.2
Verifique o teorema de Green para a região $D : x^2 + y^2 \leq r,\ (r > 0),$ e para os campos:

a. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathrm{d}x - yx^2\,\mathrm{d}y$

b. $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$

c. $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$

d. $\mathbf{F}(x, y) = 2y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$

Exercício 5.4.3
a. Verifique o Teorema da Divergência no Plano para o campo $\mathbf{F} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j},$ e para a região $D:\ x^2 + y^2 \leq 1.$

b. Calcule o integral, ao longo da elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$ da componente normal, relativamente à elipse, do campo $\mathbf{F} = 2xy\ \mathbf{i} - y^2\ \mathbf{j}.$

Exercício 5.4.4
Considere as funções $P(x, y) = -y/\left(x^2 + y^2\right)$ e $Q(x, y) = x/\left(x^2 + y^2\right).$ Mostre que não se verifica o teorema de Green para o campo $\mathbf{F} = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ no disco de raio 1, centrado na origem. Justifique.

Exercício 5.4.5
Usando o Teorema da Divergência no Plano e calculando directamente, mostre que

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0,$$

onde $\mathbf{F}(x, y) = y\ \mathbf{i} - x\ \mathbf{j}$ e $D:\ x^2 + y^2 \leq 1.$

5.5 Campos Conservativos. O Teorema de Stokes.

Campos Conservativos

Exercício 5.5.1
Indique quais dos seguintes campos vectoriais F são conservativos e calcule, nesse caso, uma função escalar f para a qual $\mathbf{F} = \nabla f.$

a. $\mathbf{F}(x, y) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j}$

b. $\mathbf{F}(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)\ \mathbf{i} + 2xy\ \mathbf{j}$

c. $\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{x^2y^2 + 1}\,(x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j})$

d. $\mathbf{F}(x, y) = \big(\cos(xy) - xy\sin(xy), -x^2\sin(xy)\big)$

Exercício 5.5.2
Em cada alínea seguinte calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. (sug. verifique se o campo é conservativo)

a. $\mathbf{F}(x,y) = \left(xy^2 + 3x^2y\right)\,\mathbf{i} + (x+y)\,x^2\,\mathbf{j}$, $\quad C:$ Curva que une por segmentos de recta o ponto $(1,1)$ ao ponto $(0,2)$ e este a $(3,0)$.

b. $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{2x}{y^2+1}\,\mathbf{i} - \dfrac{2y\left(x^2+1\right)}{\left(y^2+1\right)^2}\,\mathbf{j}$, $\quad C:$ Curva parametrizada por $x = t^3 - 1,\ y = t^6 - 1$, $0 \le t \le 1$.

c. $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x \sin y)\,\mathbf{i} + (e^x \cos y)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, $\quad C:$ imagem do caminho $\mathbf{c}(t) = \left(\sqrt{t}, t^3, e^{\sqrt{t}}\right)$, $t \in [0,1]$.

d. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + \sin x)\,\mathbf{i} + x^2 z\,\mathbf{j} + x^2 y\,\mathbf{k}$, $\quad C:$ imagem do caminho $\mathbf{c}(t) = \left(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4\right)$, $t \in [0,\pi]$.

Exercício 5.5.3
Indique se algum dos seguintes campos $\mathbf{F}$ é rotacional de um outro campo de vectores $\mathbf{G}$ e, em caso afirmativo, calcule o campo $\mathbf{G}$.

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

b. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+1)\,\mathbf{i} + (z - 2xy)\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$.

c. $\mathbf{F}(x,y,z) = xe^y\,\mathbf{i} - x\cos z\,\mathbf{j} - ze^y\,\mathbf{k}$.

d. $\mathbf{F}(x,y,z) = x\cos y\,\mathbf{i} - \sin y\,\mathbf{j} + \sin x\,\mathbf{k}$.

O Teorema de Stokes

Nos exercícios desta subsecção, salvo menção em contrário, deve usar o Teorema de Stokes para responder às questões propostas.

Exercício 5.5.4
Considerando os campos e superfícies seguintes calcule $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$. (considere $\mathbf{n}$ o vector normal unitário exterior)

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + y - 4)\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} + (2xz + z^2)\,\mathbf{k}$, $\quad S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \le 0$

b. $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + zx^3y^2\,\mathbf{k}$, $\quad S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0$

c. $\mathbf{F}(x,y,z) = x^3\,\mathbf{i} - y^3\,\mathbf{j}$, $\quad S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \ge 0$

d. $\mathbf{F}(x,y,z) = \sin(xy)\,\mathbf{i} + e^x\,\mathbf{j} - yz\,\mathbf{k}$, $\quad S:\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$.

Exercício 5.5.5
Verifique o teorema de Stokes para os seguintes campos e superfícies.

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$, $\quad S:$ helicóide parametrizada por $\mathbf{\Phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,\pi/2]$.

b. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)\,\mathbf{i} + (x+z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, $\quad S:$ superfície do cone $z^2 = x^2 + y^2$ compreendida entre $z = 0$ e $z = 1$.

c. $\mathbf{F}(x,y,z) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j}$, S : superfície do parabolóide $z = x^2 + y^2$ dentro do cilindro $z^2 = x^2 + y^2$.

d. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y)\ \mathbf{i} + yz\ \mathbf{j} + (x-z^2)\ \mathbf{k}$, S : triângulo definido pelo plano $2x+y+2z=2$ e por $x,y,z \geq 0$.

Exercício 5.5.6

Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\ \mathbf{i} + (2xy+x)\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$. Considere-se a curva C : $x^2+y^2=1$ e a superfície $S : x^2+y^2 \leq 1,\ z=0$.

a. Determine o fluxo de $\mathbf{F}$ que atravessa a superfície S.

b. Determine a circulação do campo $\mathbf{F}$ ao longo de C.

c. Calcule o fluxo de $\nabla \times \mathbf{F}$ e verifique, directamente, o teorema de Stokes.