Capítulo 4

Integrais Duplos e Triplos.

4.1 Integrais Duplos

Exercício 4.1.1
Calcule os seguintes integrais.

a. $\displaystyle\int_1^2 \int_{-1}^2 15xy + 10y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_0^4 \int_{-2}^{-1} \left(6xy^3 + x\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

c. $\displaystyle\int_0^1 \int_1^e \frac{y}{x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

d. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (xcos(y) - ycos(x)) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{-2x+2} (4 - x - 2y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

f. $\displaystyle\int_1^2 \int_{x^3}^{x} e^{\frac{y}{x}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

Exercício 4.1.2
Esboce a região R delimitada pelas curvas dadas pelas equações seguintes e calcule a sua área.

a. $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$

b. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 2$

c. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$

d. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$

Exercício 4.1.3
Esboce a região de integração para cada um dos seguintes integrais iterados:

a. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3\sqrt{y}} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

c. $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \int_{\sin(y)}^{\ln(y)} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

e. $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

f. $\displaystyle\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

Exercício 4.1.4
Para cada uma das seguintes alíneas calcule $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A$.

a. $f(x,y) = y + 2x$ e R é o rectângulo de vértices $(-1,1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$, $(-1,-1)$.

b. $f(x,y) = xy$, $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\right\}$

c. $f(x,y) = xy^2$ e R é triângulo de vértices $(2,9)$, $(2,1)$, $(-2,1)$.

d. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le sin(x) \wedge 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$

e. $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ e R é a região delimitada pelas rectas de equações $y = 2x+1$, $y = -x+1$, $y = 4$.

Exercício 4.1.5
Considerando $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$ calcule $\displaystyle\iint_R e^{x+y}\,\mathrm{d}A$.

Exercício 4.1.6
Uma lâmina com densidade de massa por área $\delta(x,y)$ é delimitada pelas curvas de equações dadas. Calcule a massa da lâmina através de um integral duplo.

a. $\delta(x,y) = y^2$; $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

b. $\delta(x,y) = x^2 + y^2$; $xy^2 = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

Exercício 4.1.7
Calcule o volume dos sólidos limitados pelas seguintes superfícies.

a. Parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2 + 1$, plano $x + y = 1$ e planos coordenados.

b. Parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ e os planos $z = 0$ e $x = 1$.

c. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$ e $z = 0$.

4.2 Valor Médio de Uma Função

Exercício 4.2.1
Calcule o valor médio das funções nas alíneas dos exercícios 4.1.4 e 4.1.7 na respectiva região de integração.

Exercício 4.2.2
Determine o valor médio do quadrado da distância de um ponto $P \in S$ à origem do referencial, sendo
$$S = \{\,(x,y) :\ (x-a)^2 + y^2 \le r^2\}$$
onde a e r são constantes reais não nulas.

Exercício 4.2.3
Mostre que:

a. Se D é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,0)$ então, $\dfrac{1}{6} \leq \displaystyle\iint_D \dfrac{\mathrm{d}A}{y-x+3} \leq \dfrac{1}{4}$

b. Se D é o circulo de raio 2 e centrado na origem então, $4\pi \leq \displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2+1\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq 20\pi$

c. Para $D=[0,1]\times[0,1]$, $\dfrac{1-\cos 1}{2} \leq \displaystyle\iint_D \dfrac{\sin x}{1+(xy)^4}\,\mathrm{d}A \leq 1$

d. Para $D=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$, $\dfrac{1}{e} \leq \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\iint_D e^{\sin(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq e$

4.3 Troca da Ordem de Integração

Exercício 4.3.1
Calcule os seguintes integrais, invertendo previamente a ordem de integração:

a. $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^2 e^{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_0^9\int_{\sqrt{y}}^3 sin(x^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

c. $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} x^2y^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

d. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3 sin(y^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 y^4 cos(xy^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

f. $\displaystyle\int_1^e\int_0^{ln(x)} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

4.4 Integrais Triplos

Exercício 4.4.1
Calcule os seguintes integrais triplos:

a. $\displaystyle\int_0^2\int_{-1}^1\int_1^3 2x+y-3z\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

b. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{z^2}\int_{x-z}^{x+z} z\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

c. $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+z^2}\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

d. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_0^{6-z} \frac{y}{x}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

Exercício 4.4.2
Calcule o volume dos sólidos limitados por:

a. $z=4-x^2-y^2 \wedge z=0$.

b. $x+y+z=3$ e pelos planos coordenados.

c. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

d. $x^2+y^2+z^2=r^2$ e $z^2=x^2+y^2$ (externo em relação ao cone).

Exercício 4.4.3
Um sólido de densidade $\delta(x, y, z)$ é delimitado pelas superfícies de equações dadas. Calcule a massa do sólido através de um integral triplo.

a. $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$; $x + 2y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b. $\delta(x, y, z) = z + 1$; $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Exercício 4.4.4
Próximo do nível do mar, a densidade δ da atmosfera terrestre a uma altura de z metros pode ser aproximada por $\delta = 1,225 - 0,000113z\, kg/m^3$. Aproxime a massa de uma região da atmosfera que tenha a forma de um cubo com $1\, km$ de aresta e uma das faces apoiada na superfície da Terra.

4.5 Mudança de Variável no Integral Duplo e Triplo.

Exercício 4.5.1
Calcule os integrais que se seguem, utilizando coordenadas polares:

a. $\displaystyle\iint_R 4 - x^2 - y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde R é o círculo de raio 2 centrado na origem.

b. $\displaystyle\iint_R y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9,\ x \leq y \leq 0\}$.

c. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde R é a coroa circular dada por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

d. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

e. $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sin(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercício 4.5.2
Calcule a área da região definida (em coordenadas cartesianas) por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, usando coordenadas (r, θ) tais que $x = a\rho\cos(\theta)$, $y = b\rho\sin(\theta)$.

Exercício 4.5.3
Calcule a massa de uma placa limitada pelas circunferências de equações

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4; \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

supondo que a densidade em cada ponto é directamente proporcional à distância à origem.

Exercício 4.5.4
Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x + 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Calcule $\displaystyle\iint_S e^{\frac{x-y}{x+y}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, utilizando a seguinte mudança de variáveis:

$$u = \frac{x - y}{x + y}, \quad v = x + y.$$

Exercício 4.5.5
Sejam $K = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u^2 - v^2 \leq 4, 1 \leq uv \leq 3, u \geq 0, v \geq 0\right\}$ e $g : K \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$

a. Esboce a região K.

b. Mostre que a mudança de variáveis g envia a região K num rectângulo.

c. Mostre que

$$\iint_K \left(u^2 + v^2\right)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \frac{1}{4}\, \boldsymbol{\acute{A}rea}\,(K)$$

Exercício 4.5.6
Use coordenadas cilíndricas para calcular os seguintes integrais:

a. $\displaystyle\iiint_E (x^2 + z^2)\ \mathrm{d}V;\ E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x^2 + z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0\right\};$

b. $\displaystyle\iiint_E 2y\ \mathrm{d}V$, onde

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq 4,\ x + y + z \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0\right\};$$

c. $\displaystyle\iiint_E xy\ \mathrm{d}V;\ E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq z,\ x \geq 0,\ y \geq 0, z \leq 2\right\};$

d. $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z;\ E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \leq 9 - x^2 - y^2,\ x \leq y,\ z \geq 0\right\};$

e. $\displaystyle\iiint_R y\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, onde R é limitada por $y = x^2 + z^2,\ y = \sqrt{20 - x^2 - z^2}$.

f. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2-1}^{2-x}\ \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$

Exercício 4.5.7
Use coordenadas esféricas para calcular os seguintes integrais:

a. $\displaystyle\iiint_R D(x,y,z)\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, onde R é a esfera de raio 1 centrada na origem e $D(\mathbf{P})$ é a distância de $\mathbf{P}$ à origem.

b. $\displaystyle\iiint_R y + 1\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, onde R é a semi-esfera de raio 2 centrada na origem cujos pontos têm cota positiva.

c. $\displaystyle\iiint_E x^2 + y^2\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z;\ E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y,\ z \geq 0\right\};$

d. $\displaystyle\iiint_R y\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$, onde R é o sólido que se encontra no 1º octante entre as esferas de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

e. $\displaystyle\iiint_E 2y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, onde $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2+y^2+z^2 \le 16,\; x^2+y^2-z^2 \le 0,\; z \ge 0\right\}$;

f. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

4.6 Exercícios Variados. Aplicações.

Para a resolução dos exercícios desta secção, consulte o formulário no final deste capítulo.

Exercício 4.6.1
Determine o valor médio das funções seguintes nos conjuntos, D, indicados.

a. $f(x,y) = y\sin(xy)$, $\quad D = [0,\pi]\times[0,\pi]$.

b. $f(x,y) = e^{x+y}$, D : triângulo de vértices $(0,0), (0,1)$ e $(1,0)$.

Exercício 4.6.2
Determine o centro de massa das seguintes regiões cujas densidades são as indicadas.

a. Região plana compreendida entre $y = x^2$ e $y = x$ e densidade $\delta = x + y$.

b. Região plana compreendida entre $y = 0$ e $y = x^2$, $0 \le x \le \pi/2$, e densidade $\delta = 1$.

Exercício 4.6.3
Determine a massa e o centro de massa de um sólido hemisférico de raio a, sabendo que a sua densidade em cada ponto $\mathbf{P}$ é directamente proporcional à distância do centro da base a $\mathbf{P}$.

Exercício 4.6.4
Supondo que a Terra é esférica com raio 6 370 km, a densidade δ (em kg/m^3) da atmosfera a uma distância de ρ metros do centro da Terra pode ser aproximada por

$$\delta = 619,09 - (9,7\times 10^{-5})\rho$$

para $6\,370\,000 \le \rho \le 6\,373\,000$.

a. Dê uma estimativa da massa da atmosfera entre o nível do solo e uma altitude de $3\,km$.

b. A atmosfera estende-se para além de uma altitude de $100\,km$ e tem uma massa total de aproximadamente $5,1\times 10^{18}\,kg$. Que percentagem da massa está nos $3\,km$ inferiores da atmosfera?

Exercício 4.6.5
Uma peça, plana, em ouro pode ser descrita matematicamente como a região plana

$$D = \{\,(x,y) :\; 0 \le x \le 2\pi \;\wedge\; 0 \le y \le \pi\}.\text{(unidades em centímetros)}$$

Considere-se que a densidade da peça é descrita por $\delta(x,y) = y^2\sin^2(4x) + 2$, $[g/cm^2]$.

a. Se a cotação do ouro for de 7€$/g$, determine o valor da peça.

b. Qual a densidade de massa média da peça (em g/cm^2)?

Exercício 4.6.6
Considerem-se coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) em $\mathbb{R}^3$. Suponha-se que uma superfície que limita um sólido contendo a origem do referencial é dada pela função continua e positiva $\rho = f(\theta, \phi)$. Mostre que o volume do sólido limitado pela superfície é

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [f(\theta, \phi)]^3 \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta.$$

Exercício 4.6.7
Considere B : triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)1$, e $(1,1)$. Usando uma mudança de variáveis adequada calcule

$$\iint_B e^{\frac{y-x}{y+x}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \quad \text{(veja o ex. 4.5.4)}$$

Exercício 4.6.8
Suponha que a densidade de um sólido esférico de raio r é dado por $\delta(x, y) = \left(1 + d(x, y)^3\right)^{-1}$, onde $d(x, y)$ é a distância do ponto (x, y) da esfera ao centro desta. Calcule a massa total do sólido.

Exercício 4.6.9
Determine o valor médio das funções seguintes nos conjuntos D indicados.

a. $f(x, y, z) = \sin^2(\pi z) \cos^{\pi x}, \quad D = [0, 2] \times [0, 4] \times [0, 6].$

b. $f(x, y, z) = e^{-z}, \quad D = \{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$

Exercício 4.6.10
Determine o momento de inércia segundo o eixo Oy da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ supondo que a sua densidade de massa é constante e igual a δ.

Exercício 4.6.11
Considere a região sólida limitada superiormente pelo plano $z = a$ e inferiormente pelo cone definido em coordenadas esféricas por $\phi = k$, onde k é uma constante, $0 < k < \pi/2,$. Se o sólido tem densidade constante δ, construa um integral (mas não o calcule) que corresponda ao momento de inércia do sólido segundo o eixo Oz.

Exercício 4.6.12
Determine o centro de massa da região sólida, de densidade constante, definida por

$$y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}, \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x \geq 1.$$

Exercício 4.6.13
Determine o centro de massa da região sólida, de densidade $\delta = (x^2 + y^2)z^2$, definida por

$$y^2 + y^2 \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 2.$$

Apêndice: Formulário

Valor Médio

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o *valor médio* de f, em D é:

$$\bar{f} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

onde $A(D)$ é a área de D.
Analogamente, se $f : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o *valor médio* de f, em W é:

$$\bar{f} = \frac{1}{V(W)} \iiint_D f(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

onde $V(W)$ é o volume de W.

Centros de Massa

Considere-se uma placa bidimensional D com densidade $\delta(x,y)$. As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do *centro de massa* de D são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\delta(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\iint_D \delta(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,\delta(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\iint_D \delta(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}$$

Para um objecto sólido W de densidade $\delta(x,y,z)$ sabe-se que:

$$\begin{aligned} \text{Volume:} \quad V &= \iiint_W \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ \text{Massa:} \quad m &= \iiint_W \delta(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Consequentemente, as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ do *centro de massa* de W são dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iiint_W x\,\delta(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \iiint_W y\,\delta(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ \bar{z} &= \frac{1}{m} \iiint_W z\,\delta(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Momentos de Inércia

Dado um corpo sólido W de densidade uniforme $\delta \equiv \delta(x,y,z)$, os *momentos de inércia* I_x, I_y e I_z são dados por:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_W \left(y^2 + z^2\right) \delta\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ I_y &= \iiint_W \left(x^2 + z^2\right) \delta\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \\ I_z &= \iiint_W \left(x^2 + y^2\right) \delta\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \end{aligned}$$