Capítulo 3

Funções Vectoriais

3.1 Aceleração e 2ª Lei de Newton.

Exercício 3.1.1
Para cada alínea seguinte calcule a velocidade e a aceleração nos instantes indicados.

a. $\mathbf{c}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin(2t)\ \mathbf{j},\ t = 0$

b. $\mathbf{c}(t) = \sqrt{2}t\ \mathbf{i} + e^t\ \mathbf{j} + e^{-t}\ \mathbf{k},\ t = 0$

c. $\mathbf{c}(t) = t \sin t\ \mathbf{i} + t \cos t\ \mathbf{j} + \sqrt{3}t\ \mathbf{k},\ t = 0$

Exercício 3.1.2
Considere os caminhos $\mathbf{c}_1(t) = e^t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j} + t^3\ \mathbf{k}$ e $\mathbf{c}_2(t) = e^{-t}\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j} - 2t^3\ \mathbf{k},\ t \in \mathbb{R}$. Calcule:

a. $\mathbf{c}_1'(t) \cdot \mathbf{c}_2'(t)$

b. $\mathbf{c}_1'(t) \times \mathbf{c}_2'(t)$

c. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{c}_1(t) \cdot \mathbf{c}_2(t)\right)$

d. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbf{c}_1'(t) \times \mathbf{c}_2'(t)\big)$

Exercício 3.1.3
Para cada caminho seguinte determinar a força que actua numa partícula de massa $m = 1$, que percorre o caminho, no instante t indicado.

a. $\mathbf{c}(t) = 6t\ \mathbf{i} + 3t^2\ \mathbf{j} + t^3\ \mathbf{k},\ t = 0.$

b. $\mathbf{c}(t) = \cos t\ \mathbf{i} + \sin(2t)\ \mathbf{j},\ t = 0.$

Exercício 3.1.4
Considere o movimento de uma partícula segundo um dado caminho. Mostre que se a aceleração da partícula for, em cada instante, perpendicular á sua velocidade então a velocidade escalar (celeridade) da partícula é sempre constante.

Exercício 3.1.5
Determine um caminho $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{c}(0) = (0, -5, 1)$ e $\mathbf{c}'(t) = (t,\ e^t,\ t^2)$.

3.2 O Comprimento do Arco.

Exercício 3.2.1
Parametrize as seguintes curvas no plano e no espaço.

a. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$

b. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$

c. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 = 4\}$

d. C : recta em $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e contém o ponto de coordenadas (a,b,c).

Exercício 3.2.2
Determine o comprimento das curvas parametrizadas pelos seguintes caminhos.

a. $\mathbf{c}(t) = (2\cos t,\, 2\sin t,\, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

b. $\mathbf{c}(t) = (1,\, 3t^2,\, t^3)$, $0 \le t \le 1$.

c. $\mathbf{c}(t) = (t,\, \ln t,\, 2\sqrt{2}t)$, $1 \le t \le 2$

d. $\mathbf{c}(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

e. $\mathbf{c}(t) = (e^{3t},\, e^{-3t},\, 3\sqrt{2}t)$, $0 \le t \le 1/3$

f. $\mathbf{c}(t) = (t,\, \ln t)$, $0 \le t \le 2$

Exercício 3.2.3
Considere o caminho

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right), \; t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que se $\alpha = \measuredangle\{\mathbf{c}(t)\,;\,\mathbf{c}'(t)\}$, então $\cos(\alpha) = k$ para alguma constante k.

Exercício 3.2.4
Um caminho $\mathbf{c}$, definido num intervalo $[a,b]$, diz-se que está *parametrizado pelo comprimento do arco* se $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1, \forall\, t \in [a,b]$. Verifique se os caminhos seguintes estão parametrizados por comprimento de arco e, em caso negativo, reparametrize-os usando a função *comprimento do arco*: $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\|\, d\tau$, com $a = 0$.

a. $\mathbf{c}(t) = (\cosh t,\, \sinh t,\, t)$

b. $\mathbf{c}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t)$

3.3 Campos Vectoriais

Exercício 3.3.1
Em cada alínea mostre que o caminho $\mathbf{c}$ é uma linha de fluxo do campo de velocidades $\mathbf{F}$, dado.

a. $\mathbf{c}(t) = \left(e^{2t},\, \ln|t|,\, 1/t\right)$, $t \neq 0$, $\quad \mathbf{F}(x,y,z) = \left(2x, z, -z^2\right)$

b. $\mathbf{c}(t) = \left(\sin t,\, \cos t,\, e^t\right)$, $\quad \mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, z)$

c. $\mathbf{c}(t) = \left(t^{-3},\, e^t,\, t^{-1}\right)$, $t \neq 0$, $\quad \mathbf{F}(x,y,z) = \left(-3z^4, y, -z^2\right)$

d. $\mathbf{c}(t) = \left(t^2,\, 2t-1,\, \sqrt{t}\right)$, $t > 0$, $\quad \mathbf{F}(x,y,z) = \left(y+1, 2, \dfrac{1}{2z}\right)$

Exercício 3.3.2
Calcule a divergência de cada um dos seguintes campos.

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = e^{xy}\ \mathbf{i} - e^{xy}\ \mathbf{j} + e^{yz}\ \mathbf{k}$

b. $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\ \mathbf{i} + (x+y)^2\ \mathbf{j} + (x+y+z)^2\ \mathbf{k}$

c. $\mathbf{F}(x,y) = x^3\ \mathbf{i} - x\sin(xy)\ \mathbf{j}$

d. $\mathbf{F}(x,y) = xe^y\ \mathbf{i} - [y/(x+y)]\ \mathbf{j}$

Exercício 3.3.3
Calcule o rotacional de cada um dos seguintes campos.

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$

b. $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\ \mathbf{i} + xz\ \mathbf{j} + xy\ \mathbf{k}$

c. $\mathbf{F}(x,y,z) = \sin y\ \mathbf{i} + \cos x\ \mathbf{j}$

d. $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\ \mathbf{i} + (x^2 - y^2)\ \mathbf{j}$

Exercício 3.3.4
Mostre que os campos de vectores seguintes *não são* campos gradiente.

a. $\mathbf{F}(x,y) = [y\cos x]\ \mathbf{i} + [x\sin y]\ \mathbf{j}$

b. $\mathbf{F}(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\ \mathbf{i} - 2xy\ \mathbf{j}$

Exercício 3.3.5
Considere dois campos vectoriais, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, tais que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. Qual dos seguintes campos tem, necessariamente, divergência nula?

a. $\mathbf{F} + \mathbf{G}$

b. $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$

Exercício 3.3.6
Considere o campo escalar $f(x,y,z) = x^2y$ e o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = 2xz^2\ \mathbf{i} + \ \mathbf{j} + y^3zx\ \mathbf{k}$. Calcule:

a. ∇f

b. $\nabla \times \mathbf{F}$

c. $\mathbf{F} \times \nabla f$

d. $\mathbf{F} \cdot \nabla f$

Exercício 3.3.7
Para os campos escalares seguintes mostre que $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

a. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b. $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

c. $f(x,y,z) = 1/\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

d. $f(x,y,z) = x^2y^2 + y^2z^2$

Exercício 3.3.8
Seja $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2y\ \mathbf{i} + \left(x^3 + y^3\right)\ \mathbf{j}$.

a. Verifique que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

b. Determine uma função escalar, f, tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. (Nota: no capítulo 5 usaremos um método para determinar a função f. Neste exercício procure f por tentativas)

3.4 Exercícios Variados

Exercício 3.4.1
Nas alíneas seguintes determine a velocidade, a aceleração, a velocidade escalar (celeridade) e a recta tangente aos caminhos nos pontos indicados.

a. $\mathbf{c}(t) = \left(t^3+1, e^{-t}, \cos(\pi t/2)\right)$, $t=1$.

b. $\mathbf{c}(t) = \left(t^2-1, \cos(t^2), t^4\right)$, $t=\sqrt{\pi}$.

c. $\mathbf{c}(t) = \left(e^t, \sin t, \cos t\right)$, $t=0$.

d. $\mathbf{c}(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $t=2$.

Exercício 3.4.2
Determine a velocidade e a aceleração do caminho (ciclóide) $\mathbf{c}(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t)$ no instante $t = \pi/4$.

Exercício 3.4.3
a. Considere um caminho $\mathbf{c}$ tal que $\|\mathbf{c}(t)\| = \mathit{constante}$, $\forall\, t \in [a,b]$. Mostre que $\mathbf{c}'(t) \perp \mathbf{c}(t)$.

b. Considere um caminho $\mathbf{c}$ tal que $\|\mathbf{c}'(t)\| \neq 0$, $\forall\, t \in [a,b]$. Mostre que

$$\|\mathbf{c}(t)\| = \mathit{constante} \Leftrightarrow \mathbf{c}''(t) \perp \mathbf{c}'(t).$$

Exercício 3.4.4
Uma partícula de massa m desloca-se segundo o caminho $\mathbf{c}(t) = (t^2,\, \sin t,\, \cos t)$. Determine a força que actua na partícula no instante $t = 0$.

Exercício 3.4.5
Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2,\, 0,\, z(1+x)\right)$. Mostre que uma linha de fluxo para $\mathbf{F}$ é o caminho

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{1}{1-t},\, 0,\, \frac{e^t}{1-t}\right),\quad t \neq 1.$$

Exercício 3.4.6
Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = f(x^2+y^2)\,(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$, onde f é uma função real de variável real. Que equação deverá satisfazer a função real de variável real, g, de modo que o caminho

$$\mathbf{c}(t) = [\cos(g(t))]\ \mathbf{i} + [\sin(g(t))]\ \mathbf{j},$$

seja uma linha de fluxo para $\mathbf{F}$?

Exercício 3.4.7

Considere uma partícula de massa m que se desloca segundo a *hélice elíptica*:

$$\mathbf{c}(t) = (4\cos t,\, \sin t,\, t)\,,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

a. Determine a equação da tangente à hélice no instante $t = \pi/4$.

b. Qual a força que actua na partícula nesse instante?

c. Determine uma expressão, em termos de um integral, do comprimento do arco de hélice entre $t = 0$ e $t = \pi/4$.

Exercício 3.4.8

Considere o campo escalar $g(x, y, z) = x^3 + 5yz + z^2$.

a. Calcule $\mathbf{F} = \nabla g$ e verifique, directamente, que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, em todos os pontos (x, y, z).

b. Seja h uma função de uma variável tal que $h(1) = 0.5$.
Defina o campo escalar $f(x, y, z) = (h \circ g)(x, y, z)$. Partindo do ponto $(1, 0, 0)$ determine a(s) direcção(ões) na(s) qual(ais) a taxa de variação de f é metade da sua taxa de variação máxima (nesse ponto).

Exercício 3.4.9

a. Parametrize a curva que resulta da intersecção das superfícies $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 3$, e $S_2 : y = 1$.

b. Calcule uma expressão para a recta tangente à curva no ponto $(1, 1, 1)$.

c. Determine uma expressão integral para o comprimento do arco desta curva.